

Olimpiadi della Matematica

L.S.S. I. Newton (Roma) - Corso di Approfondimento

docenti: Callegari, Raparelli, Vitali

Lezione n. **1**

A.S. 2010-2011

4 Ottobre 2010

ore 14.30-16.30

1. Problemi proposti a lezione

1. Nel triangolo ABC si prendono i punti B' sul lato AB e C' sul lato AC in modo che $AB' = \frac{5}{7}AB$ e $AC' = \frac{3}{8}AC$.
Se l'area di $AB'C'$ è di 45cm^2 , quanto vale l'area di ABC ?

2. In un rombo $ABCD$ sia P il punto medio del lato DC e Q il punto medio del segmento DP . Infine sia R l'intersezione tra la diagonale DB e il segmento AQ . Sapendo che il triangolo PQR ha area unitaria, determinare l'area del rombo $ABCD$.

3. Nel trapezio scaleno $ABCD$ con basi AB e CD , le diagonali si intersecano nel punto E . Sapendo che il triangolo ABE ha area 1922 e il triangolo CDE ha area 1250, determinare l'area totale del trapezio.

4. Nel quadrilatero convesso $ABCD$ le diagonali si incontrano nel punto P . Sapendo che le aree dei triangoli ABP , BCP e CDP , misurano rispettivamente 900cm^2 , 450cm^2 e 144cm^2 , dire quanto vale l'area del quadrilatero $ABCD$.

5. Nel quadrilatero convesso $ABCD$ le diagonali si incontrano nel punto P . Sappiamo che le aree dei triangoli ABP e CDP , misurano rispettivamente 900cm^2 e 144cm^2 , e che l'area di BCP è il quadruplo di quella di DAP . Quanto vale l'area del quadrilatero $ABCD$?

6. Nel triangolo ABC si prolunghi il lato AB , dalla parte di B di un segmento BA' che misura il doppio di AB ; inoltre si prolunghi il lato BC , dalla parte di C di un segmento CB' che misura il triplo di BC ; infine si prolunghi il lato CA , dalla parte di A di un segmento AC' che misura il quadruplo di CA .
Se il triangolo ABC ha area di 12cm^2 , qual è l'area del triangolo $A'B'C'$?

7. Dato il quadrato $ABCD$, di lato unitario, si costruiscano, esternamente ad esso, i quattro triangoli equilateri ABP , BCQ , CDR e DAS . Trovare la somma delle aree dei triangoli PQB , QRC , RSD e SPA .

8. (Propedeutico al Teorema di Ceva) In un triangolo ABC , sia P un punto del lato AB diverso dai vertici e sia Q un punto del segmento CP diverso da C . Allora il rapporto tra le aree dei triangoli AQC e BQC è uguale al rapporto tra i segmenti AP e PB .

9. (Teorema di Ceva diretto) Sia dato un triangolo ABC e siano X , Y e Z punti rispettivamente dei lati BC , CA e AB diversi dai vertici tali che AX , BY e CZ si incontrano nello stesso punto.
Allora vale la relazione

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = 1.$$

10. (Teorema di Ceva inverso) Sia dato un triangolo ABC e siano X , Y e Z punti rispettivamente dei lati BC , CA e AB diversi dai vertici tali che valga la relazione:

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = 1.$$

Allora AX , BY e CZ si incontrano nello stesso punto.

11. (Correlato al Teorema di Ceva) Sia dato un triangolo ABC e siano X , Y e Z punti rispettivamente dei lati BC , CA e AB diversi dai vertici tali che AX , BY e CZ si incontrano tutti nello stesso punto P .
Allora vale la relazione:

$$\frac{CY}{YA} + \frac{CX}{XB} = \frac{CP}{PZ}.$$

12. Il triangolo ABC , rettangolo in B , ha il cateto AB che misura 1Km e l'ipotenusa AC che misura 2Km. Sia P un punto sul segmento AB tale che $PB = \frac{1}{100}AB$ e Q un punto sul segmento CB tale che $QB = \frac{1}{100}CB$. Sia R l'intersezione tra PC e QA .
Qual è la misura (in centimetri) del segmento BR ?

13. Nel triangolo ABC si prendano un punto P sul lato AC ed un punto Q sul lato BC e indichiamo con R l'intersezione tra AQ e BP . Se le aree dei triangoli ARP , ABR e BQR sono rispettivamente 20, 36 e 52, quanto vale l'area del triangolo ABC ?

14. Nel triangolo ABC si prendano un punto P sul lato AC ed un punto Q sul lato BC . Indichiamo con S l'intersezione tra AQ e BP e prolunghiamo CS fino ad intersecare il lato AB nel punto R . Se le aree dei triangoli ASP , ASR e BSR sono rispettivamente 126, 84 e 24, quanto vale l'area del triangolo ABC ?

15. Nel triangolo ABC si ha $AB = 130\text{cm}$, $BC = 140\text{cm}$ e $CA = 150\text{cm}$. Sul lato AB si prendono i punti P e Q in modo tale che $AP = PQ = QB$. Analogamente, sul lato BC si prendono i punti R e S in modo tale che $BR = RS = SC$. Trovare l'area (espressa in cm^2) dell'intersezione tra i triangoli CPQ e ARS .

16. I tre triangoli formati con le parallele per D ai lati del triangolo ABC (evidenziati in grigio in figura 1) hanno area 4, 9 e 49. Trovare l'area del triangolo ABC .

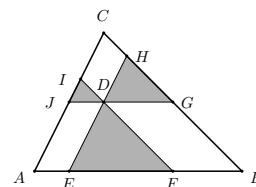


figura 1

17. Il quadrato $ABCD$ ha il lato di 288cm. Detti E , G , I e K i punti medi dei suoi lati, si consideri l'ottagono regolare $EFGHIJKL$ (vedi figura 2). Infine si prenda sulla diagonale BD il punto M in modo che BM sia congruente a BA .

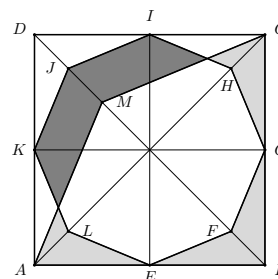


figura 2

Qual è la differenza (espressa in cm^2) tra l'area della zona evidenziata in grigio chiaro e quella della zona evidenziata in grigio scuro?

18. Su un tetraedro (non regolare) avente vertici $ABCP$ si prendono i punti A' , B' e C' rispettivamente sugli spigoli PA , PB e PC , in modo che valgano le seguenti proprietà:

1. l'area del triangolo APB è 21 volte l'area del triangolo $A'PB'$;
2. l'area del triangolo CPB è 35 volte l'area del triangolo $C'PB'$;
3. l'area del triangolo APC è 135 volte l'area del triangolo $A'PC'$;

Se il volume del tetraedro $A'B'C'P$ è 11cm^3 , quanto è, sempre espresso in cm^3 , il volume del tetraedro $ABCP$?

C.A.P.O.2010 (Corso Annuale di Preparazione Olimpica)

Olimpiadi della Matematica

L.S.S. I. Newton (Roma) - Corso di Approfondimento

docenti: Callegari, Raparelli, Vitali

Lezione n. **2**

A.S. 2010-2011

11 Ottobre 2010

ore 14.30-16.30

2. Problemi proposti a lezione

Per affrontare i problemi che proponiamo qui di seguito si suppone che lo studente sia a conoscenza dei concetti base del calcolo combinatorio, che sono stati esposti nella prima lezione del corso base di **C.A.P.O 2010** di Giovedì 7 Ottobre 2010.

Ovviamente ci sarà bisogno talvolta di altre nozioni: i problemi proposti saranno appunto la scusa per introdurle.

19. Quanti sono i monomi nelle variabili x, y, z e w aventi tutti coefficiente 1 e grado non superiore a 10?

20. Che posizione occupa la parola MONOCOLO nella lista di tutti i suoi anagrammi, compresi quelli senza senso, messi in ordine alfabetico?

21. Una pulce salta sui punti di coordinate intere dello spazio, partendo da $(0,0,0)$. Ogni suo salto consiste nell'incrementare di 1 una e una sola delle 3 coordinate. In quanti modi può arrivare in $(3,3,3)$ rimanendo sempre sulla superficie del cubo di lato 3 avente un vertice in $(0,0,0)$ e gli spigoli paralleli agli assi cartesiani?

22. Sia $\mathbf{N}$ l'insieme dei numeri naturali, cioè $\mathbf{N} = \{0, 1, \dots, n, \dots\}$, e sia $f: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ una funzione avente le seguenti proprietà:

1. $f(0) = 0$.
2. per ogni $n \in \mathbf{N}$ si ha $f(n) \leq f(n+1) \leq f(n) + 1$.
3. presi comunque n e k in $\mathbf{N}$, con $2 \leq k \leq 10$, si ha $f(nk) = f(nk+1)$.

Trovare il massimo valore che può avere $f(8!)$.

23. Ad una tavola rotonda con 10 posti si siedono 5 dame e 5 cavalieri in modo che non ci siano mai cavalieri seduti su sedie vicine. In quanti modi diversi possono farlo?

24. Ugo, Aldo, Luca, Ada, Eva, Ida, Sara e Claudia si siedono ad una tavola rotonda con 8 posti in modo che due maschi non siano mai vicini tra loro. In quanti modi diversi possono farlo? (Due modi di disporsi al tavolo vanno considerati lo stesso, se esiste una rotazione del tavolo che li porta a coincidere)

25. Una pulce parte salta sui punti di coordinate intere del piano cartesiano, partendo da $(0,0)$. Se ogni suo salto consiste nell'incrementare di 1 l'ascissa o l'ordinata (ma non entrambe), in quanti modi può arrivare in $(10,10)$? In quanti modi può farlo rimanendo sempre strettamente sotto la bisettrice del primo quadrante (a parte punto iniziale e finale)?

26. In quanti modi si possono colorare i lati di un pentagono regolare usando tanti colori quanti sono i lati e colorando ciascun lato con un colore diverso? (Due colorazioni vanno considerate uguali se esiste una rotazione che le porta a coincidere) In quanti modi lo si può fare, invece, colorando ciascun lato di bianco o di nero?

27. Come il problema **26** ma con un poligono regolare di 11 lati invece che 5.

28. Come il problema **26** ma con un poligono regolare di 43 lati invece che 5.

29. Come il problema **26** ma con un poligono regolare di 6 lati invece che 5.

30. Come il problema **26** ma con un poligono regolare di 22 lati invece che 5.

31. In quanti modi si possono colorare le facce di un cubo usando sei colori diversi, uno per ciascuna faccia? (Due colorazioni vanno considerate uguali se esiste una rotazione che le porta a coincidere) In quanti modi lo si può fare colorando ciascuna faccia di bianco o di nero?

32. In quanti modi si possono colorare le facce di un ottaedro regolare usando otto colori diversi, uno per ciascuna faccia? (Due colorazioni vanno considerate uguali se esiste una rotazione che le porta a coincidere) In quanti modi lo si può fare colorando ciascuna faccia di bianco o di nero?

33. Quanti sono, nel piano cartesiano, i quadrati i cui vertici sono del tipo (m,n) con m e n naturali e non maggiori di 10?

34. Su ciascuno dei 3 lati di un triangolo equilatero si prendano 10 punti in modo da dividerlo in 11 segmenti congruenti. Per ciascuno di tali punti si traccino le parallele ai 2 lati del triangolo su cui il punto non giace. Sia $\mathcal{A}$ l'insieme costituito dai 3 vertici del triangolo e da tutti i punti interni al triangolo o sul suo bordo, per i quali passino almeno 2 rette distinte di quelle tracciate prima. Dire quanti sono i triangoli equilateri aventi per vertici 3 punti di $\mathcal{A}$, contando anche quelli i cui lati non sono paralleli a quelli del triangolo iniziale.

35. L'alfabeto della lingua marziana è composto da 6 vocali e 25 consonanti. Quante sono le parole di 10 lettere, terminanti per vocale e tali che non vi siano mai due lettere consecutive uguali, né due consonanti vicine tra loro.

Olimpiadi della Matematica

L.S.S. I. Newton (Roma) - Corso di Approfondimento

docenti: Callegari, Raparelli, Vitali

Lezione n. **3**

A.S. 2010-2011

18 Ottobre 2010

ore 14.30-16.30

3. Gara simulata

Allo scopo di dare agli studenti il tempo di consolidare la loro comprensione degli argomenti svolti, in questa lezione non si faranno argomenti nuovi, ma si proverà a testare la loro preparazione attraverso una gara simulata.

I problemi che seguono sono tutti delle variazioni di problemi già visti a lezione, tranne il **39** che, pur comparso nella lezione 2 (anche se con numeri diversi), non è stato ancora svolto.

Tutti hanno per soluzione un numero intero compreso tra 0 e 9999.

36. Quanti sono gli anagrammi della parola **ABRACADABRA** tali che le lettere che li compongono vi compaiono in ordine alfabetico.

37. Una pulce parte salta sui punti di coordinate intere del piano cartesiano, partendo da $(0, 0)$. Se ogni suo salto consiste nell'incrementare di 1 l'ascissa o l'ordinata (ma non entrambe), in quanti modi può arrivare in $(10, 10)$ passando per $(2, 7)$?

38. Una pulce salta sui punti di coordinate intere dello spazio, partendo da $(0, 0, 0)$. Ogni suo salto consiste nell'incrementare di 1 una e una sola delle 3 coordinate. In quanti modi può arrivare in $(2, 2, 2)$ rimanendo sempre sulla superficie del cubo di lato 2 avente un vertice in $(0, 0, 0)$ e gli spigoli paralleli agli assi cartesiani?

39. In quanti modi si possono colorare i lati di un poligono regolare di 7 lati colorando ciascun lato di bianco o di nero? (Due colorazioni vanno considerate uguali se esiste una rotazione che le porta a coincidere)

40. Il quadrilatero convesso $ABCD$ ha l'area di 17cm^2 . Sia A' il simmetrico di A rispetto a B , B' il simmetrico di B rispetto a C , C' il simmetrico di C rispetto a D e D' il simmetrico di D rispetto a A . Quanto vale in cm^2 l'area di $A'B'C'D'$?

41. Il triangolo ABC ha l'area di 5400cm^2 . Si prenda un punto P sul lato CB in modo che $CP = 2PB$ e un punto Q sul lato CA in modo che $CQ = 3QA$. Detta T l'intersezione di AP e QB , calcolare l'area, in cm^2 , del quadrilatero $CQTP$.

Olimpiadi della Matematica

L.S.S. I. Newton (Roma) - Corso di Approfondimento

docenti: Callegari, Raparelli, Vitali

Lezione n. **4**

A.S. 2010-2011

25 Ottobre 2010

ore 14.30-16.30

4. Contenuti della Lezione

In questa lezione non è stato proposto materiale nuovo.

Ci si è limitati a svolgere alcuni dei problemi che erano rimasti in sospeso dalla lista proposta nella lezione **2** e dalla gara simulata della lezione **3**.

In particolare si è preso spunto dalla seconda parte del problema **25** per fare una digressione sui numeri di Catalan. Gli studenti interessati possono cercare altre informazioni su www.wikipedia.it cercando appunto la voce *numeri di Catalan*.

Inoltre dopo aver osservato che la soluzione del problema **33**, è data dal numero che si ottiene calcolando l'espressione:

$$1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 9^2 + 3 \cdot 8^2 + 4 \cdot 7^2 + 5 \cdot 6^2 + 6 \cdot 5^2 + 7 \cdot 4^2 + 8 \cdot 3^2 + 9 \cdot 2^2 + 10 \cdot 1^2$$

si è voluto generalizzare il problema nel modo seguente:

42. Calcolare $n + 4(n-1) + 9(n-2) + 16(n-3) + \dots + (n-1)^2 \cdot 2 + n^2 \cdot 1$.