C.A.P.O.2010 (Corso Annuale di Preparazione Olimpica)

Olimpiadi della Matematica

L.S.S. I. Newton (Roma) - Corso Base

docente: Callegari

Lezione n. 1

A.S. 2010-2011
7 Ottobre 2010
ore 15.30-17.00

1. Calcolo Combinatorio (livello zero)

Il nostro punto di partenza sono le 2 formulette per le permutazioni semplici e con ripetizione. Più precisamente si consideri il seguente problema:

1. Data una parola di n lettere, tutte diverse, quanti sono i suoi anagrammi?

Gli anagrammi che ci chiede di contare il problema 1 prendono il nome di permutazioni semplici di n oggetti e si può dimostrare (anche se, per ora, ometteremo di farlo) che il loro numero è dato da:

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

Tale espressione si sintetizza spesso scrivendo $n!$ (si legge: *enne fattoriale*).
Ad esempio gli anagrammi di **NASO** sono $4!$, cioè $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, cioè 24.
Invece gli anagrammi della parola **CINEMA** sono $6!$, cioè $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, cioè 720.
Ma cosa succede se la parola di cui si vogliono contare gli anagrammi ha delle lettere che si ripetono?
Ad esempio, se prendiamo la parola **ANNA**, che ha quattro lettere come la parola **NASO**, la verifica diretta mostra che gli anagrammi non sono 24 come quelli di **NASO**, bensì 6.
Più in generale consideriamo il seguente problema:

2. Sia data una parola costituita solo da due tipi di lettere (ad esempio contenente solo lettere **A** e lettere **B**) e tale che una delle due lettere vi compare n volte e l'altra m volte.
Quanti sono i suoi anagrammi?

Si può dimostrare (ma anche questa volta omettiamo momentaneamente la dimostrazione) che il numero di anagrammi che ci chiede di contare il problema 2 è:

$$\frac{(n+m)!}{n! \cdot m!}$$

Ad esempio la parola **MAMMA** è costituita da 3 lettere **M** e 2 lettere **A**, quindi i suoi anagrammi sono

$$\frac{(3+2)!}{3! \cdot 2!} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot (2 \cdot 1)} = 10.$$

Il problema 2 può essere ulteriormente generalizzato considerando parole con lettere che si ripetono, costituite da più di 2 tipi di lettere, come vediamo nel seguente problema:

3. Sia data una parola costituita da k tipi di lettere: n_1 uguali alla lettera X_1, n_2 uguali alla lettera X_2, ..., n_k uguali alla lettera X_k.
Quanti sono i suoi anagrammi?

Si può dimostrare (ma di nuovo omettiamo momentaneamente la dimostrazione) che il numero di anagrammi richiesti dal problema 3 è:

$$\frac{(n_1 + n_2 + \ldots + n_k)!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}$$

Ad esempio la parola **BANANA** è costituita da 3 lettere **A**, 2 lettere **N** e 1 lettera **B**, quindi i suoi anagrammi sono

$$\frac{(3+2+1)!}{3! \cdot 2! \cdot 1!} = \frac{6!}{3! \cdot 2! \cdot 1!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot (2 \cdot 1) \cdot (1)} = 60,$$

mentre la parola **ALLATTA** è costituita da 3 lettere **A**, 2 lettere **L** e 2 lettere **T**, quindi i suoi anagrammi sono

$$\frac{(3+2+2)!}{3! \cdot 2! \cdot 2!} = \frac{7!}{3! \cdot 2! \cdot 2!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot (2 \cdot 1) \cdot (2 \cdot 1)} = 210.$$

Lo studente scrupoloso non si allarmi del fatto che abbiamo momentaneamente saltato la dimostrazione delle formule più importanti del corso. Abbiamo solo ritenuto che, dal punto di vista didattico fosse meglio posticiparle di qualche lezione, in modo da fargliele affrontare con un briciolo di maturità matematica in più.
La cosa che invece ci preme ora è metterlo in condizione di riconoscere che problemi apparentemente molto diversi da questi, in realtà si risolvono facilmente riconducendosi ai 3 problemi appena visti (soprattutto al problema 2).
A volte la relazione sarà abbastanza semplice da trovare, mentre altre volte potrà essere anche abbastanza nascosta. Tuttavia è proprio questa l'abilità che ci preme di sviluppare nello studente: la capacità di riconoscere, in situazioni nuove, le strutture che gli sono già note. È proprio questa, infatti, la caratteristica che contraddistingue il bravo risolutore di problemi e, in generale, il ragazzo davvero bravo in matematica.

2. Problemi di base

Quelli che seguono sono semplici, ma importanti problemi di base del calcolo combinatorio.

Probabilmente lo studente conosce già alcune formulette che permettono di risolverli, tuttavia quello che ci preme fare ora è di mostrare come, senza alcuna formula pronta, è possibile ricondurre ciascuno di tali problemi al problema di contare gli anagrammi di un'opportuna parola.

4. La classe 5F della scuola elementare di San Cesareo è composta da 24 alunni. La maestra Tina, che è arrivata a scuola con la luna storta, per tirarsi su di morale ha deciso di interrogare 6 persone.
In quanti modi diversi le può scegliere?
Più in generale, da un insieme di n oggetti, in quanti modi se ne possono scegliere k?

5. Un papà ha 4 figli e 10 caramelle (identiche). In quanti modi diversi può distribuire le caramelle ai figli? (vanno contati anche i modi "ingiusti" di distribuire le caramelle, come ad esempio dare tutte le caramelle al figlio più giovane e lasciare senza tutti gli altri)
Più in generale, in quanti modi si possono distribuire n caramelle a k bambini?

6. Si consideri la seguente scacchiera infinita:

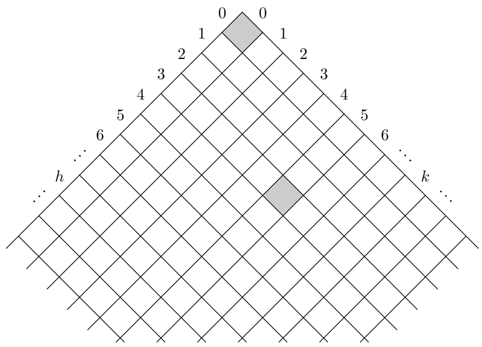

figura 1

Una pulce, partendo dalla casella $(0,0)$ vuole raggiungere la casella $(3,5)$, facendo solo due tipi di salti: spostarsi dalla casella in cui si trova a quella adiacente in basso a destra, oppure a quella adiacente in basso a sinistra. Ovviamente può fare molti percorsi diversi. Nella figura seguente ne vediamo evidenziati 2:

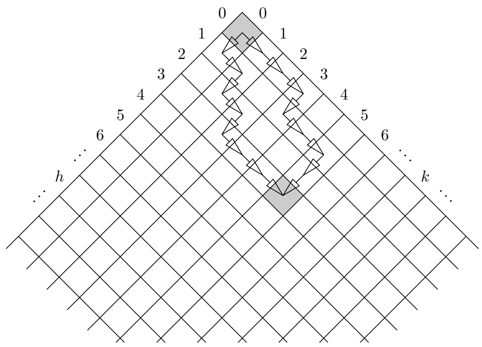

figura 2

Quanti sono in tutto i diversi percorsi che può fare?
In generale quanti sono i diversi percorsi che può fare per passare dalle casella $(0,0)$ alla generica casella (h,k)?

7. (Triangolo di Pascal) Si immagini di scrivere un numero intero in ciascuna delle caselle della scacchiera infinita di figura 1 rispettando le seguenti regole:

1. in tutte le caselle del bordo scriviamo 1;
2. in ogni casella che non stia sul bordo scriviamo un numero ottenuto sommando il numero della casella contigua in alto a destra con il numero della casella contigua in alto a sinistra;

Tale configurazione di numeri prende il nome di triangolo di Pascal ed ha diverse notevoli proprietà.
Trovare una formula che permetta di calcolare direttamente il numero che sta nella casella di coordinate (h,k) senza bisogno di dover calcolare i numeri di tutte le caselle che le stanno sopra.

3. Problemi per esercitarsi

8. La classe 5C della scuola elementare di San Cesareo è composta da 21 alunni. La maestra Gloria, per far passare l'ora di ginnastica, fa mettere gli alunni in cerchio e gli fa fare giro-giro tondo per tutta l'ora.
In quanti diversi li può disporre in cerchio?

9. Un papà distribuisce 17 caramelle (uguali) alle sue 5 figlie, in modo che ciascuna ne abbia almeno 2. In quanti modi lo può fare?

10. Quante sono le parole di 8 lettere (anche senza senso) contenenti solo vocali (cioè A, E, I, O, U) e tali che le lettere che vi compaiono siano disposte in ordine alfabetico?

11. In quanti modi si possono scegliere 5 carte da un mazzo di 52?
Quanti di questi modi corrispondono ad un poker (= 4 carte hanno lo stesso valore)?
Quanti ad un full (= 3 carte hanno lo stesso valore e le 2 rimanenti hanno valore uguale tra loro, ma non alle altre 3)?
Quanti ad un colore (tutte le carte hanno lo stesso seme)?

12. Un papà ha 10 caramelle (uguali). In quanti modi le può distribuire ai suoi 4 figli, tenendone eventualmente alcune per se (anche tutte!)?

13. Una classe è composta da 5 ragazze e 5 ragazzi. I ragazzi sono tutti amici tra di loro e anche con ciascuna delle ragazze. Le ragazze invece, pur essendo amiche dei ragazzi, si odiano tutte tra loro. All'ora di pranzo si mettono in fila nella mensa della scuola (che è costituita da quell'unica classe).
In quanti modi possono mettersi in fila in modo che due persone che si odiano non siano mai vicine?
E se i ragazzi fossero 6?
E se invece fossero 6 le ragazze?

14. Una classe è composta da 8 ragazze e 4 ragazzi. Nell'ora di ginnastica la classe viene divisa in modo casuale in 2 gruppi di 6 persone.
Qual è la probabilità che i maschi siano tutti nella stessa squadra?

15. In un gruppo di 8 amici solo 2 hanno la patente. Avendo a disposizione 2 macchine (diverse) ciascuna con 4 posti, in quanti modi gli 8 amici si possono suddividere tra le 2 macchine?

16. Si mischia un mazzo di 40 carte. Qual è la probabilità che non ci siano carte di bastoni consecutive?

C.A.P.O.2010 (Corso Annuale di Preparazione Olimpica)

Olimpiadi della Matematica

L.S.S. I. Newton (Roma) - Corso Base

docente: Callegari

Lezione n. 2

A.S. 2010-2011
14 Ottobre 2010
ore 15.30-17.00

4. Passare al quoziente

Nella lezione precedente avevamo date per scontate le formule per contare gli anagrammi di una parola: ci eravamo solo divertiti a constatare come tanti problemi, apparentemente diversi, si riconducono al calcolo di anagrammi di opportune parole.
In questa lezione abbiamo voluto colmare questa lacuna: dopo una breve introduzione in cui abbiamo dimostrato che le permutazioni di n oggetti diversi sono $n!$, abbiamo affrontato il problema delle permutazioni con ripetizione.
La tecnica che, tra le tante possibili, abbiamo adottato per risolverlo è il tema della presente lezione.
È istruttivo cominciare con un esempio concreto: contere gli anagrammi della parola **MAMMA**.
Per cominciare possiamo supporre che le 3 lettere **M** e le 2 lettere **A** siano distinguibili tra loro. Ad esempio possiamo pensareche le 3 lettere **M** siano, in realtà, $\mathbf{M_1}$, $\mathbf{M_2}$ ed $\mathbf{M_3}$, mentre le 2 lettere **A** siano in realtà $\mathbf{A_1}$ e $\mathbf{A_2}$.
In tal modo ci siamo ricondotti al caso di 5 lettere tutte diverse, le cui permutazioni sono in tutto 5!, cioè 120.
Tuttavia questa non è la risposta che cerchiamo visto che, in realtà, le 3 **M** e le 2 **A** sono indistinguibili tra loro e quindi molte delle 120 permutazioni ottenute corrispondono allo stesso anagramma della parola **MAMMA**.
Ad esempio alla parola **MAMMA** corrispondono le 12 parole

$\mathbf{M_1A_1M_2M_3A_2}$	$\mathbf{M_1A_2M_2M_3A_1}$
$\mathbf{M_1A_1M_3M_2A_2}$	$\mathbf{M_1A_2M_3M_2A_1}$
$\mathbf{M_2A_1M_1M_3A_2}$	$\mathbf{M_2A_2M_1M_3A_1}$
$\mathbf{M_2A_1M_3M_1A_2}$	$\mathbf{M_2A_2M_3M_1A_1}$
$\mathbf{M_3A_1M_1M_2A_2}$	$\mathbf{M_3A_2M_1M_2A_1}$
$\mathbf{M_3A_1M_2M_1A_2}$	$\mathbf{M_3A_2M_2M_1A_1}$

che si ottengono permutando in tutti i modi possibili le lettere $\mathbf{A_1}$ e $\mathbf{A_2}$ tra le seconda e la quinta posizione e le lettere $\mathbf{M_1}$, $\mathbf{M_2}$ ed $\mathbf{M_3}$ tra la prima, la terza e la quarta posizione. I modi di farlo sono appunto $(2!) \cdot (3!)$, cioè 12.
In generale, ad ogni anagramma della parola **MAMMA** corrisponde un insieme di 12 anagrammi della parola $\mathbf{M_1A_1M_2M_3A_2}$, di conseguenza gli anagrammi di **MAMMA** sono $\frac{120}{12}$, cioè 10.
La famiglia dei sottoinsiemi in cui è stato ripartito l'insieme di tutti gli anagrammi della parola $\mathbf{M_1A_1M_2M_3A_2}$, prende il nome di **insieme quoziente**: ecco il motivo per cui questa lezione ha per titolo Passare al quoziente.

5. Problemi svolti e/o proposti

Anche per risolvere i problemi seguenti si può applicare la tecnica del quozientare.
Attenzione però che, molte volte, le classi di equivalenza non hanno lo stesso numero di elementi.
Inoltre, per i problemi che vanno dal **23** al **28**, si trova che è decisamente più semplice trattare il caso in cui il numero di lati è un numero primo.

17. In quanti modi 10 persone possono sedersi ad una tavola rotonda? (Due modi di sedersi vanno considerati identici se si possono ottenere uno dall'altro con una rotazione)

18. In quanti modi 10 persone possono sedersi ad una tavola rotonda? (Due modi di sedersi vanno considerati identici se ogni persona è seduta vicino alle stesse due persone, senza distinguere il caso in cui si ha una persona alla propria destra dal caso in cui la si ha alla propria sinistra)

19. Ad una tavola rotonda con 10 posti si siedono 5 dame e 5 cavalieri in modo che non ci siano mai cavalieri seduti su sedie vicine. In quanti modi diversi possono farlo?

20. In quanti modi il numero 200 può essere scritto come somma di 3 numeri interi non negativi, eventualmente anche nulli? (due modi vanno considerati uguali se, a meno dell'ordine, sono composti dagli stessi numeri)

21. In quanti modi il numero 10^{10} può essere scritto come prodotto di 3 numeri interi positivi? (due modi vanno considerati uguali se, a meno dell'ordine, sono composti dagli stessi numeri)

22. Quanti sono i parallelepipedi aventi volume 10^{10}cm^3 e spigoli la cui misura espressa in cm è intera? (due parallelepipedi vanno considerati uguali se, a meno dell'ordine, le misure dei loro spigoli coincidono)

23. In quanti modi si possono colorare i lati di un pentagono regolare usando tanti colori quanti sono i lati e colorando ciascun lato con un colore diverso? (Due colorazioni vanno considerate uguali se esiste una rotazione che le porta a coincidere) In quanti modi lo si può fare, invece, colorando ciascun lato di bianco o di nero?

24. Come il problema **23** ma con un poligono regolare di 11 lati invece che 5.

25. Come il problema **23** ma con un poligono regolare di 43 lati invece che 5.

26. Come il problema **23** ma con un poligono regolare di 6 lati invece che 5.

27. Come il problema **23** ma con un poligono regolare di 22 lati invece che 5.

28. Come il problema **23** ma con un poligono regolare di 8 lati invece che 5.

C.A.P.O.2010 (Corso Annuale di Preparazione Olimpica)

Olimpiadi della Matematica

L.S.S. I. Newton (Roma) - Corso Base

docente: Callegari

Lezione n. 3

A.S. 2010-2011
21 Ottobre 2010
ore 15.30-17.00

6. Contenuti della lezione

In realtà, in questa lezione non ho proposto materiale nuovo.
Infatti nella lezione precedente sono stati svolti solo pochi dei problemi proposti, quindi questa lezione è stata utilizzata per svolgere parte dei problemi che nella lezione scorsa non erano stati risolti.
Pù precisamente, quasi tutto il tempo è stato impiegato per spiegare in dettaglio come si risolvono i problemi **20** e **24**.
In particolare si è fatto notare come la generalizzazione di **24** al caso di p lati (con p primo) e n colori fosse strettamente collegata col teorema di Fermat.

C.A.P.O.2010 (Corso Annuale di Preparazione Olimpica)

Olimpiadi della Matematica

L.S.S. I. Newton (Roma) - Corso Base

docente: Callegari

Lezione n. 4

A.S. 2010-2011
28 Ottobre 2010
ore 15.30-17.00

7. Una proprietà del tr. di Pascal

Tutti i problemi proposti in questa lezione si possono ricondurre al seguente problema:

29. Ricordiamo che il triangolo di Pascal è una tabella come quella della figura **3**, illimitata nelle due direzioni in basso a sinistra e in basso a destra, le cui caselle sono state riempite con numeri interi utilizzando le due regole seguenti:

1. in tutte le caselle del bordo scriviamo 1;
2. in ogni casella che non stia sul bordo scriviamo un numero ottenuto sommando il numero della casella contigua in alto a destra con il numero della casella contigua in alto a sinistra;

Mostrare che, nel triangolo di Pascal, comunque si fissino n e k interi non negativi (vedi figura **3**), la somma delle caselle colorate in grigio chiaro è uguale al contenuto della casella grigio scuro.

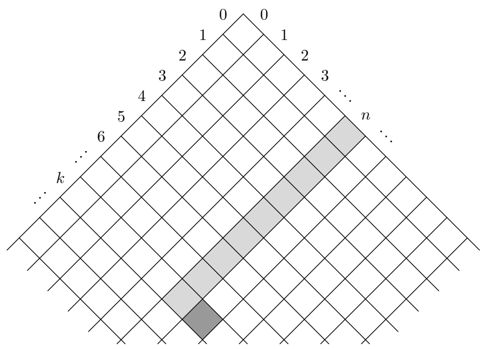

figura 3

Ricordiamo ora che abbiamo già dimostrato (vedi problema **7** della lezione **1**) che il numero contenuto nella casella di coordinate p e q del triangolo di Pascal è dato dalla formula $\dfrac{(p+q)!}{p!\cdot q!}$.

Se a questo punto introduciamo la notazione

$$\binom{n}{k} \overset{\text{def}}{=} \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$$

possiamo dire che il numero contenuto nella casella di coordinate p e q del triangolo di Pascal è $\dbinom{p+q}{p}$.

Quindi il problema **29** è esattamente equivalente al seguente:

30. Mostrare che: $\dbinom{n}{0}+\dbinom{n+1}{1}+\dbinom{n+2}{2}+\ldots+\dbinom{n+k}{k}=\dbinom{n+k+1}{k+1}$.

8. Problemi svolti e/o proposti

Nella maggior parte dei casi, i seguenti problemi possono essere risolti senza ricorrere alla proprietà del triangolo di Pascal citata nel problema **29**.

Tuttavia è molto istruttivo rendersi conto che il problema **29**, opportunamente interpretato, può fornire la chiave per risolverli tutti.

Ad ogni modo, di ogni problema si darà più di un modo di risolverlo, perché riteniamo che è proprio coltivando molti punti di vista diversi che si riesce a sviluppare un buon intuito per risolvere i problemi non standard.

31. Definiamo $n-$esimo **numero triangolare**, il numero che si ottiene sommando tutti in numeri interi tra 1 ed n.
Più precisamente, se decidiamo di indicare con T_n l'ennesimo numero triangolare, si ha:

$$\begin{aligned}
&T_1 = 1\\
&T_2 = 1+2 = 3\\
&T_3 = 1+2+3 = 6\\
&T_4 = 1+2+3+4 = 10\\
&T_5 = 1+2+3+4+5 = 15\\
&T_6 = 1+2+3+4+5+6 = 21\\
&\quad\vdots\\
&T_n = 1+2+3+4+5+6+\ldots+n = ?
\end{aligned}$$

Detto questo, dove si trovano i numeri triangolari nel triangolo di Pascal?
Riesci a indovinare (e poi dimostrare) la formula per calcolare l'ennesimo numero triangolare?

32. Calcolare la somma di tutti i numeri dispari compresi tra 1 e 1000.

33. Usando le stesse notazioni del problema **31**, calcolare $T_1+T_2+T_3+\ldots+T_{50}$.

34. Il piccolo Luca gioca a fare delle piramidi con i cubetti. La figura che segue mostra come è fatta la piramide alta 4 cubetti.

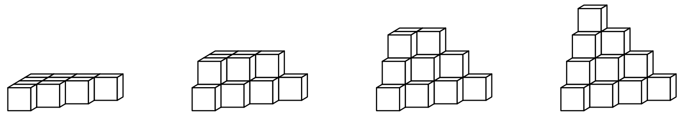

figura 4

Quanti cubetti gli servono per costruire una piramide alta 100 cubetti?

35. Calcolare la somma dei quadrati di tutti i numeri dispari compresi tra 1 e 1000.

36. Una piramide costruita con i cubetti è costituita da 25 strati quadrati. Lo strato alla base ha il lato di 25 cubetti. Quello immediatamente sopra ha il lato di 24 cubetti, e così via fino al venticinquesimo strato che è costituito da un cubetto solo. Quanti cubetti sono serviti per costruire la piramide?

37. Calcolare $1^3+2^3+\ldots+n^3$.

38. Nel gioco del **Risiko**, quando una regione attacca con 3 armate una regione difesa da un'armata sola, il combattimento si svolge nel modo seguente: l'attaccante lancia 3 dadi e il difensore ne lancia uno solo; se almeno uno dei tre dadi lanciati dall'attaccante dà un risultato strettamente maggiore di quello lanciato dal difensore, allora il difensore ha perso.
Sia $\dfrac{m}{n}$ la frazione (ridotta ai minimi termini) che rappresenta la probabilità che il difensore sia sconfitto al primo attacco.
Quanto vale m?

39. Nel gioco del **Risiko**, quando una regione attacca con 3 armate una regione difesa da un'armata sola, il combattimento si svolge nel modo seguente: l'attaccante lancia 3 dadi e il difensore ne lancia uno solo; se almeno uno dei tre dadi lanciati dall'attaccante dà un risultato strettamente maggiore di quello lanciato dal difensore, allora il difensore ha perso.
Inoltre, per complicare le cose, supponiamo che si usino dadi non a 6 facce, ma a 20.
Qual è la probabilità che il difensore sia sconfitto al primo attacco?

40. Quanto vale la somma delle aree di tutti i rettangoli aventi lati interi e perimetro uguale a 202.

41. Trovare una formula per $1^4+2^4+3^4+\ldots+n^4$.

9. Nota Post Lezione

I problemi che sono stati effettivamente svolti a lezione sono: **29**, **31**, **32**, **33**, **34** e **35**.

C.A.P.O.2010 (Corso Annuale di Preparazione Olimpica)

Olimpiadi della Matematica

L.S.S. I. Newton (Roma) - Corso Base

docente: Callegari

Lezione n. 5

A.S. 2010-2011
4 Novembre 2010
ore 15.30-17.00

10. Ancora su somme di potenze

Il materiale che utilizzeremo in questa lezione è costituito dai problemi che proponiamo nel paragrafo successivo e da quelli che ci erano rimasti da risolvere nella lezione precedente, cioè i problemi dal **36** in poi.

Ne approfitteremo, tra le altre cose, per far familiarizzare lo studente con il simbolo di sommatoria e con le sue proprietà.

Si noti che, notazione a parte, i problemi proposti nel paragrafo successivo (almeno quelli fino al **50**) sono, nella maggior parte dei casi, più semplici degli ultimi problemi della lista della lezione precedente.

Si noti anche che il materiale complessivo proposto è molto di più di quello che si riuscirà effettivamente a utilizzare nella lezione.

11. Problemi svolti e/o proposti

42. Calcolare la somma di tutti i numeri pari compresi tra 1 e 1000.

43. Calcolare la somma di tutti i multipli di 3 compresi tra 1 e 1000.

44. Calcolare la somma di tutti i numeri interi compresi tra 1 e 1000 che non sono multipli di 7.

45. Su di un piano sono state tracciate 100 rette. Qual è il massimo numero di regioni, contando sia quelle limitate che quelle illimitate, in cui il piano può essere stato suddiviso?

46. Calcolare $\displaystyle\sum_{k=1}^{100}(3k+2)$.

47. Calcolare $\displaystyle\sum_{k=0}^{50}(11k+5)$.

48. Calcolare la somma dei quadrati di tutti i numeri pari compresi tra 1 e 1000.

49. Calcolare la somma dei quadrati di tutti i multipli di 3 compresi tra 1 e 1000.

50. Calcolare la somma dei quadrati di tutti i numeri interi compresi tra 1 e 1000 che non sono multipli di 4.

51. Calcolare $\displaystyle\sum_{k=1}^{100}\left(2k^2+3k\right)$.

52. Calcolare $\displaystyle\sum_{k=1}^{100}(k\cdot(101-k))$.

53. Calcolare $1\cdot 200+2\cdot 199+3\cdot 198+\ldots+199\cdot 2+200\cdot 1$.

54. Calcolare $1\cdot 200^2+2\cdot 199^2+3\cdot 198^2+\ldots+199\cdot 2^2+200\cdot 1^2$.

55. Calcolare $\displaystyle\sum_{i,j=1}^{100}|i-j|$.

56. Calcolare $\displaystyle\sum_{i,j=1}^{100}(i-j)^2$.

57. Nello spazio sono stati presi 100 piani, che lo suddividono in tante regioni, limitate o non limitate. Qual è il massimo numero di tali regioni?

Info su questa e altre iniziative analoghe alla pagina www.mat.uniroma2.it/~olimpiad/trainingolimpico.html