1 Soluzioni

1.1 Esercizi ripresi da altre gare

1. Scegliamo i primi due calzini, poi separiamo i due casi.

2. Se nelle prime tre partite uno dei tre giocatori non vince, la partita finisce. Quindi le prime tre partite le vincono tre giocatori diversi e tornano a tre gettoni a testa. A questo punto sono necessarie almeno altre tre partite perché uno resti senza gettoni.

3. Contiamo il numero totale di triangoli (terne non ordinate) e sottraiamo i triangoli che giacciono su una faccia del cubo.

4. Il numero di divisori dipende dagli esponenti della fattorizzazione in primi. Riducendo il numero di casi da considerare, basta confrontare 2^{14} e $2^4 3^2$.

5. Valutiamo i due casi in cui una persona risulti malata dal test e notiamo che sono equiprobabili. Trick: prendiamo un campione di persone e supponiamo che seguano le percentuali.

6. Il numero di mosse è sempre lo stesso e si verifica per induzione: per mettere assieme n pezzi bisogna mettere assieme due sistemi di x e $n-x$ pezzi (con $0 < x < n$) e unirli.

7. La scacchiera ha più caselle di un colore che dell'altro, caselle adiacenti hanno colori diversi, dunque i dispari devono stare su un colore e i pari sull'altro. I casi rimasti funzionano (trovare gli esempi).

8. La probabilità di saltare un certo numero n è quella di non saltare $n-1$ e che al contempo esca croce. Questo ci permette di porre un'equazione tra le probabilità di n e $n-1$, e studiando quando $p_n > \frac{2}{3}$ giungiamo alla conclusione.

9. Immaginiamo di lasciare il suo voto per ultimo. Abbiamo due casi: gli altri giurati si sono divisi 4 e 4 (in tal caso l'ultimo giurato farà per forza parte della maggioranza), oppure si sono divisi in modo non equo (e il voto dell'ultimo giurato diventa ininfluente per il verdetto, dunque la sua probabilità di appartenere alla maggioranza è $\frac{1}{2}$). Si fanno i conti. Il caso n dispari è analogo e basta impostare i conti per arrivare alla conclusione. Per il caso n pari, per ogni scelta dei primi $n-1$ giurati, l'ultimo ha $\frac{1}{2}$ di probabilità di finire nella maggioranza stretta (questo sia nel caso il suo voto sia influente per la maggioranza, sia nel caso non lo sia, dato che la differenza è sempre almeno 1 prima che lui voti).

10. Se l'abitante k dice il falso, dicono il falso anche tutti quelli successivi. Se solo i primi h abitanti sono cavalieri, ci sono esattamente h furfanti, ma dato che gli altri mentono i furfanti si possono contare anche come $n-h$.

1.2 Altri esercizi

1. La scacchiera avrà una casella nera in più di quelle bianche (o viceversa, basta scambiare i colori). Un tassello 2x1 copre una casella per colore, quindi quello 1x1 deve coprire una casella nera. Si verifica con esempi che tutti e cinque i casi vanno bene. Estendendo a nxn (con n dispari) si può fare lo stesso ragionamento, ma diventa più difficoltoso trovare gli esempi, che necessitano di ridursi ai casi precedenti (induzione o altri metodi).

2. Scomposto il polinomio in fattori irriducibili, segue lo stesso ragionamento della scomposizione di un numero in fattori primi per contare i divisori.

3. Se una persona in una posizione dispari mente, quella nella posizione successiva, che è pari, dice la verità, e per induzione i dispari seguenti sono furfanti. Se tutti i dispari minori di 2009 dicono la verità, devono essere cavalieri, e tutti i pari minori di 2009 sono furfanti. Ma allora non ci sarebbero paggi tra i primi 2000 abitanti.

4. L'evento "Alfredo vince sapendo che il duello non è finito e che ora tocca a lui sparare" ha sempre la stessa probabilità. Si può porre un'equazione in una sola incognita considerando che se colpisce subito Bruno vince, altrimenti Bruno deve mancare e ritorniamo nel caso di partenza.

5. Colori uguali devono stare su facce opposte, quindi non possiamo avere più di due facce per colore. Se usiamo solo tre colori, abbiamo una sola possibilità (togliendo le rotazioni). Usandone un quarto, i colori devono dividersi in 2,2,1,1 e, dato che i primi due colori occupano due coppie di facce opposte, diventa banale disporre gli ultimi due.

6. Dato per noto il gettone estratto (al quale corrispondono, ordinatamente, due numeri distinti), immaginiamo di dare via i 40 biglietti: è equivalente a dividere i 90 numeri in due insiemi rispettivamente di cardinalità 40 e 50. Dobbiamo vedere quando il primo numero appartiene all'insieme da 40 e il secondo a quello da 50 (calcolo banale).

7. Essendo il numero palindromo, limitiamoci a scegliere le prime 4 cifre. Scegliamo la seconda cifra in modo che sia pari, e scegliamo la terza e la quarta cifra a piacere: applicando il criterio di congruenza per 3, la prima cifra (che non può essere zero) deve essere scelta in un insieme di tre cifre determinato caso per caso.

8. Non ci interessa il numero di calzini in ogni scatola (basta che ce ne sia almeno uno in ciascuna), quanto il numero di scatole. Pigeonhole.

9. Per ciascuna riga o colonna abbiamo due possibilità (a meno dell'ordine): (0,0,1) e (-1,1,1). Se non ci sono caselle con -1, abbiamo 6 possibilità (in ogni riga e colonna avremo due 0 e un 1). Se in una casella c'è un -1, tutte le altre caselle della riga e della colonna a cui appartiene devono contenere degli 1. Se c'è un solo -1, tutte le altre caselle appartenenti alla sua stessa riga e colonna contengono un

1 e tutte le altre devono contenere 0. Se ci sono almeno due -1, sistemato il primo (e di conseguenza la sua riga e la sua colonna) possiamo sistemare il secondo in una delle quattro caselle rimanenti, lasciandoci solo una casella da sistemare, che dovrà contenere anch'essa un -1.

10. Ad ogni mossa cambia la parità del numero di pile di monete sul tavolo. Il gioco è finito e la situazione vincente (rimuovere l'ultima pila dal tavolo) ha un numero di pile dispari. L'esito del gioco non dipende dalla scelta delle mosse dei due giocatori, ma soltanto dal numero di pile iniziali.