1 Esercizi ripresi da altre gare

1. Febbraio 97
Abbiamo su un tavolo tre paia di calzini: un paio rosso, uno blu e uno verde. In quanti modi possiamo disporre in ordine i sei calzini in modo che calzini adiacenti siano di colori diversi?

2. Febbraio 97
Tre amici possiedono ciascuno tre gettoni. Dopo ogni partita il vincitore riceve un gettone da ognuno degli altri due amici. Qual è la probabilità che il gioco non si debba interrompere entro cinque partite poiché uno dei giocatori rimane senza gettoni?

3. Febbraio 98
Dato un cubo C, quanti sono i triangoli che hanno per vertici tre vertici di C e che non giacciono su nessuna delle facce di C?

4. Febbraio 00
Qual è il più piccolo numero intero positivo che possiede esattamente 15 divisori?

5. Febbraio 01
In un paese l'uno per cento della popolazione è affetto da una certa malattia. Il test per sapere se si è contagiati sbaglia nell'uno per cento dei casi. Lorenzo si sottopone al test e risulta malato. Qual è la probabilità che egli sia sano?

6. Febbraio 02
Un puzzle da 1000 pezzi può essere montato incastrando i pezzi uno dopo l'altro, in modo da inserire ciascun nuovo pezzo nella porzione di puzzle già composta, oppure costruendo diversi gruppi di pezzi e poi unendo questi tra di loro. Ogni unione (di due singoli pezzi, o di due gruppi, o di un pezzo a un gruppo) conta una mossa. Qual è il numero minimo di mosse necessarie per completare il puzzle?

7. Febbraio 02
Gli interi da 1 a 9 sono scritti nelle nove caselle di una scacchiera 3x3, ogni intero in una casella diversa, in modo tale che ogni coppia di numeri consecutivi sia scritta in due caselle adiacenti (cioè aventi un lato in comune). Quanti sono i valori possibili del numero posto sulla casella centrale?

8. Cesenatico 89
Immaginiamo di lanciare una moneta molte volte. Se esce testa otteniamo un gettone, se esce croce ne otteniamo due. Vinciamo il gioco se, ad un certo punto, arriviamo a possedere **esattamente** 100 gettoni. Dire se la probabilità di vincere è maggiore, uguale o minore di $\frac{2}{3}$.

9. Cesenatico 92
Una giuria formata da 9 persone deve esprimere un verdetto di colpevolezza o innocenza. Supponendo che non siano ammesse astensioni e che ciascun giurato voti indipendentemente e con una probabilità del 50% per ciascuna delle due decisioni, si dica qual è la probabilità che al termine della votazione un determinato giurato faccia parte della maggioranza.
Bonus Question: Nel caso di una giuria composta da n persone, si dica per quali valori di n la probabilità di far parte della maggioranza (intesa come maggioranza stretta nel caso degli n pari) è maggiore di $\frac{1}{2}$, uguale a $\frac{1}{2}$, minore di $\frac{1}{2}$.

10. Cesenatico 94
Un giornalista deve fare un articolo su una classica isola di furfanti e cavalieri, in cui tutti gli abitanti o mentono sempre (e sono furfanti) o dicono sempre la verità (e sono cavalieri) e tutti si conoscono reciprocamente. Supponiamo che il giornalista intervisti una e una sola volta tutti gli n abitanti dell'isola e che il k-esimo abitante gli risponda che "sull'isola ci sono almeno k furfanti" per ogni $k \in \{1, \dots, n\}$. Può il giornalista stabilire se sull'isola ci sono più furfanti o più cavalieri?

2 Altri esercizi

1. Supponiamo di avere una scacchiera 3x3 da coprire completamente con un tassello quadrato 1x1 e quattro tasselli rettangolari 2x1. In quante diverse posizioni posso mettere il tassello quadrato affinché questo sia possibile?
   Bonus Question: Estendere al caso nxn, dove n è un intero positivo dispari, avendo a disposizione un solo tassello 1x1 e $(n-1)/2$ tasselli 2x1.

2. Quanti divisori polinomi monici ha $p(x) = x^9 - x^7 - x^5 + x^3$?

3. In un'isola gli abitanti si dividono in cavalieri (che dicono sempre la verità), furfanti (che mentono sempre) e paggi (che seguono regole particolari). Supponiamo di disporre in fila 2009 abitanti e di numerarli ordinatamente da 1 a 2009. Sappiamo che i paggi mentono quando si trovano in una posizione dispari, dicono la verità se si trovano in una posizione pari. Ciascuno dei primi 2008 abitanti dice: "il mio successivo è un furfante". Sapendo che tra i primi 2000 abitanti c'è almeno un paggio, possiamo determinare l'identità del 2009-esimo abitante?

4. I pistoleri Alfredo e Bruno si sono sfidati a duello. Alfredo è più veloce, quindi sparerà il primo colpo, poi sarà il turno di Bruno (se sarà sopravvissuto), quindi di nuovo di Alfredo e così via. Bruno però è più preciso di Alfredo, e infatti ha il 50% di possibilità di colpire l'avversario, mentre Alfredo ha soltanto il 25%. Qual è la probabilità che Alfredo ha di vincere?

5. Vogliamo colorare le facce di un cubo in modo tale che facce con uno spigolo in comune non siano mai dello stesso colore. Se abbiamo 4 colori a disposizione, in quanti modi diversi possiamo colorare il cubo, a meno di rotazioni?

6. Guglielmo ha organizzato una piccola lotteria: ha venduto 40 biglietti con numeri compresi tra 1 e 90 (tutti diversi tra loro) e si prepara a estrarre un numero tra 1 e 90 per decidere chi vincerà il premio. Guglielmo, essendo una persona truffaldina e volendo aumentare la sua probabilità di tenersi i soldi, ha preparato per l'estrazione dei gettoni speciali, con due numeri diversi sulle due facce: se da un lato il numero del gettone è k, dall'altro è $91-k$. Quando estrarrà il gettone, se il numero che vede corrisponderà a uno dei biglietti che ha venduto, girerà il gettone dall'altro lato e mostrerà quello. Qual è la probabilità che la truffa di Guglielmo abbia buon fine, e cioè che a estrazione fatta lui vinca soltanto girando il gettone?

7. Determinare quanti sono i numeri naturali di sette cifre palindromi (cioè che si leggono uguali da destra e da sinistra), multipli di 3 e con la seconda cifra pari.

8. Abbiamo quindici scatole, ciascuna contenente calzini di un diverso colore. La prima scatola contiene 20 calzini, la seconda ne contiene 40, la terza 60 e così via. Quanti calzini dobbiamo prendere come minimo per essere certi di averne almeno due dello stesso colore?

9. Supponiamo di avere una tabella 3x3 e di voler scrivere in ciascuna casella un numero tra $-1, 0, 1$ in modo tale che in ciascuna riga e in ciascuna colonna la somma dei numeri sia sempre 1. Quante configurazioni diverse sono possibili?

10. Alberto e Barbara fanno un gioco. Presa una pila di n monete, a turno, cominciando da Barbara, possono fare una delle seguenti azioni: prendere una pila contenente un numero pari di monete e dividerla in due pile più piccole e uguali, oppure prendere una pila contenente un numero dispari di monete e rimuoverle dal tavolo. Determinare al variare di n chi ha una strategia vincente.
    Bonus Question: Generalizzare a una situazione iniziale con un qualsiasi numero di pile con una quantità non necessariamente uguale di monete.