Incontri Olimpici
Algebra

7 dicembre 2009

Problema 1. Dimostrare che il polinomio

$$x^{50} - 50x^{49} + 49x^{48} - \ldots + 1$$

non ha 50 radici reali positive.

Problema 2. Dimostrare che il polinomio $x^2 + x + 1$ divide il polinomio $x^{2n} + x^n + 1$ se e solo se n non è multiplo di 3.

Problema 3. Sia p un polinomio a coefficienti positivi. Dimostrare che se

$$p\left(\frac{1}{x}\right) \geq \frac{1}{p(x)}$$

è vera per $x = 1$, allora è vera per ogni $x > 0$.

Problema 4. Dimostrare che per a, b, c reali positivi, vale

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b}{c^2} + \frac{c}{a} \geq 2\sqrt{2}.$$

Problema 5. Dimostrare che per a, b reali positivi tali che $a + b = 1$, vale

$$\frac{a^2}{a+1} + \frac{b^2}{b+1} \geq \frac{1}{3}.$$

Problema 6. Siano x_0 e x_1 reali positivi. Definiamo la successione per ricorrenza

$$x_{n+2} = \frac{1 + x_{n+1}}{x_n}$$

quanto vale x_{2010}?

Problema 7. Trovare tutte le funzioni $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ tali che

$$f(x + y) = f(x) + f(y).$$

Problema 8. Trovare tutte le funzioni $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ tali che

$$f(x + f(y)) = f(x) + y.$$

Problema 9. Dimostrare che, per n intero maggiore di 1,

$$\frac{2^{4n+2} + 1}{5}$$

non è mai un numero primo.