Shortlist Geometria

[Lu1]Data la configurazione in figura, mostrare

$$\frac{1}{\sqrt{c}} = \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} \ .$$

(In figura: tre circonferenze tangenti a coppie, con una retta tangente comune, di raggi a, c, b.)

[Lu2]Nel triangolo ABC si scelgano i punti E su AB, F su BC e G su AC in modo che valga

$$\frac{AE}{EB} = \frac{BF}{FC} = \frac{CG}{GA} = k < 1 \ .$$

Sia T il triangolo individuato dalle rette AF, BG e CE; determinare il rapporto fra l'area di T e quella di ABC.

[Lu4]Sia O il centro di $A_1, \dots, A_n$; dato un punto generico X, mostrare

$$\sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{OA_k} = \overrightarrow{O}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{XA_k} = n\overrightarrow{XO}$$

[Lu5]Siano, in un triangolo ABC, $A_1 \in BC$, $B_1 \in CA$, $C_1 \in AB$ di modo che $AA_1 \cap BB_1 \cap CC_1 = \{O\}$. Mostrare che, se vale una delle seguenti condizioni:

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{O}$$

$$\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1} = \overrightarrow{O}$$

$$\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{O}$$

allora AA_1, BB_1, CC_1 sono le mediane.

[Lu6]Siano $P_1, \dots, P_{2n+1}$ punti su una semicirconferenza unitaria di centro O; mostrare che $|\sum_{k=1}^{2n+1} \overrightarrow{OP_k}| \geq 1$.

[Lu7]Siano $a_1, ..., a_n$ di modulo minore o uguale a 1 e sia $c = \pm a_1 \pm ... \pm a_n$; mostrare che c ha modulo minore o uguale a $\sqrt{2}$ qualunque sia la scelta dei segni.

[Lu9]Un triangolo ABC viene mosso in modo che AB, BC siano tangenti a circonferenze S_1, S_2 interne all'angolo in B; dimostrare che esiste un punto interno a tale angolo la cui traiettoria è un arco di circonferenza.

[Lu11]In un n-gono convesso non ci sono lati paralleli; sia O un suo punto interno: mostrare che per O non passano $n+1$ rette tali che ciascuna bisechi l'area dell'n-gono.

[Lu12]Sia Γ una circonferenza, e siano A e B due punti fissati di Γ; al variare di C su Γ, si determini la traiettoria del baricentro di ABC.

[Lu14]Se le bisettrici del triangolo ABC sono lunghe al più 1 allora l'area vale al più $\sqrt{3}/3$.

[Lu15]In un triangolo di lati a, b, c mostrare che

$$S = \frac{p^2}{3\sqrt{3}}; \quad p \geq 3\sqrt{3}r; \quad S \geq \frac{a^2+b^2+c^2}{4\sqrt{3}};$$

$$a^2+b^2+c^2-(a-b)^2-(b-c)^2-(b-a)^2 \geq 4\sqrt{3}S.$$

[Lu16]Nel trapezio $ABCD$ $\widehat{A} < \widehat{D} < \pi/2$; mostrare che $AC < BD$.