Problemi di Geometria

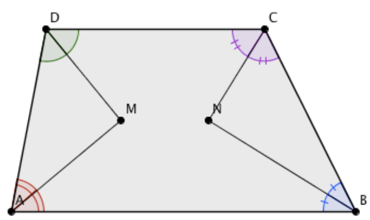
Firenze, 6-12-09

Problema 1. Nel triangolo ABC siano AF, CE mediane, e si supponga $B\widehat{A}F = B\widehat{C}E = \frac{\pi}{6}$; mostrare che ABC è equilatero.

Problema 2. Sia O il centro del rettangolo $ABCD$; determinare il luogo dei punti M che verificano:

$$AM \geq OM; \; BM \geq OM; \; CM \geq OM; \; DM \geq OM.$$

Problema 3. Con M, N individuati dalle bisettrici in figura, mostrare che $2MN = |AB + CD - BC - AD|$.



Problema 4. Sia O un punto interno al triangolo ABC e siano d_a, d_b, d_c le distanze di O dai lati BC, CA, AB rispettivamente, R_a, R_b, R_c le distanze dai vertici A, B, C rispettivamente. Mostrare

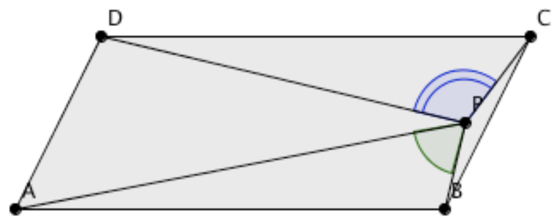
$$aR_a \geq cd_c + bd_b$$

$$R_a + R_b + R_c \geq 2(d_a + d_b + d_c)$$

Problema 5. Dato un triangolo si suddivida ciascun lato in n parti uguali mediante $n - 1$ punti; si congiunga ora ogni vertice con i punti individuati sul lato opposto. Dimostrare che se n è un primo maggiore di 2 non esistono punti che appartengano simultaneamente a tre dei segmenti tracciati.

Problema 6. È dato un parallelogrammo $ABCD$; sia P un punto tale che la somma degli angoli $A\widehat{P}B$ e $C\widehat{P}D$ sia un angolo piatto (vedi figura). Dimostrare che si ha

$$AB \cdot AD = BP \cdot DP + AP \cdot CP.$$



Problema 7. Siano ABC un triangolo, P un punto del piano e A', B', C' punti su BC, CA, AB tali che le rette AA', BB', CC' concorrano in P. Siano poi D l'intersezione di BC con $B'C'$, E l'intersezione di AC con $A'C'$, F l'intersezione di AB con $A'B'$. Dimostrare che D, E, F (se esistono) sono allineati.

Problema 8. Vi sono quattro strade rettilinee sul piano, tra cui non ve ne sono due parallele né tre concorrenti. Ciascuna è percorsa da un viaggiatore che si sposta a velocità costante lungo di essa (ma le velocità dei quattro viaggiatori possono essere diverse). Il Viaggiatore 1 ha incontrato tutti gli altri durante il suo tragitto (nei punti d'intersezione delle rispettive strade con la sua); 2 ha incontrato 3 e 4, e ovviamente 1. Mostrare che allora anche 3 e 4 si sono incontrati.

Problema 9. Sia ABC un triangolo, sia H il suo ortocentro e siano L, M, N i punti medi dei lati AB, BC, CA rispettivamente. Dimostrare che ABC è acutangolo se e solo se

$$HL^2 + HM^2 + HN^2 < AL^2 + BM^2 + CN^2.$$