

QUESITI PROPOSTI

1) Calcolare $\frac{29^3 - 27}{14}$ in Z_{31}

- 2) Nel mezzo dello scontro tra le forze dell'Oscurato Sire e i popoli della Terra di Un Mezzo, Gausdalf si accorge che, dette a le unità dell'esercito di Tauron e b le unità che costituiscono quello dei popoli liberi, vale la relazione $5a^4 = 6b^3$. Qual è il numero totale minimo di soldati presenti sul campo di battaglia considerando entrambi gli eserciti e supponendo che effettivamente qualcuno ci fosse? (gara nazionale a squadre 2009)
- 3) Frobbio ha ereditato anni fa l'anello del potere dal suo parente Bobo Mattilinks. Frobbio si è chiesto molte volte come Gausdalf abbia scoperto che quello di Bobo era davvero l'anello del potere. Ebbene, un'antica pergamena dice che l'anello si sarebbe illuminato se qualcuno avesse pronunciato le soluzioni intere (x,y) dell'equazione

$$\frac{2x^2 + 5y^2}{xy - 14} = 11$$

Gausdalf racconta con emozione del giorno in cui, dopo aver a lungo riflettuto, prese in mano l'anello e iniziò a recitare le soluzioni. Quanto vale la somma dei valori assoluti di tutti i numeri che disse in quell'occasione? (gara nazionale a squadre 2009)

- 4) Vi sono 10000 lampadine numerate da 1 in poi. All'inizio tutte le lampadine sono spente poi si premono (e quindi si accendono) 9 tutte le lampadine contrassegnate dai multipli di 1. In seguito si premono gli interruttori contrassegnati dai multipli di 2 e, in successione, quelli contrassegnati dai multipli di 3, di 4 e così fino ai multipli di 10000.

Quale delle seguenti lampadine resterà accesa al termine delle operazioni?

- a) la numero 9405 b) 9406 c) 9407 d) 9408 e) 9409

- 5) Determinare il più piccolo intero n con la seguente proprietà: dati comunque n interi a_1, a_2, \dots, a_n ne esistono due distinti tali che la loro somma o la loro differenza siano multipla di 9.
- 6) Il professor Abacus ha scritto due numeri naturali alla lavagna. Il figlio cancella i due numeri e li sostituisce con il loro prodotto meno 1 e con la loro somma. Non soddisfatto cancella anche questi e li sostituisce ancora con il loro prodotto meno 1 e la loro somma. Infine ci pensa un po', li cancella e scrive al loro posto la loro somma cioè 1309. Quanto valeva la somma dei numeri di partenza?
- 7) Trovare tutte le coppie (p,q) di numeri primi tali che l'equazione $x^2 - (6p-4q)x + 3pq = 0$ abbia due radici intere
- 8) Il giovane Meriandin Escherbach, detto Morry, alterna regolarmente 12 ore di veglia e 15

di sonno, il pasticcere del villaggio sforna le sue sfogliatelle celebri in tutta la contea ogni domenica a mezzogiorno . Sempre a mezzogiorno, ogni 30 giorni esatti, il padrone di casa di Morry viene a reclamare l'affitto. Oggi Morry si è svegliato esattamente mentre il pasticcere sfornava le sfogliatelle e il padrone bussava alla sua porta. Tra quanti giorni succederà di nuovo? (gara nazionale a squadre 2009)

- 9) Consideriamo un qualsiasi insieme di 20 interi positivi consecutivi, tutti maggiori di 50. Quanti di essi, al massimo, possono essere primi?
- 10) Quanti interi positivi n hanno la proprietà che la loro rappresentazione in base 2 coincide con la rappresentazione in base 3 di $2n$?
- 11) Quante sono le terne ordinate distinte di numeri interi positivi tali che $x^2+2xy + y^2-z^2= 9$
- 12) Per quali valori di a l'equazione $x^2+ax-16 = 0$ ha soluzioni intere?
- 13) Determinare le soluzioni dell'equazione $2x-11y = 3$
- 14) Siano a e b numeri interi e sia $\text{MCD}(a,b) = 1$; siano x e y interi tali che $a x+by=d$. Dimostrare che $\text{MCD}(x y) = 1$

Soluzioni ai quesiti

Quesito 1

$$29 \equiv -1 \qquad 27 \equiv -4 \qquad \frac{29^3 - 27^3}{14} = \frac{(-2)^3 - (-4)^3}{14} = \frac{-4}{14}$$

quindi dobbiamo trovare l'inverso di 14 in Z_{31} .

Tale inverso esiste infatti $(14, 31)=1$

Si tratta di trovare un valore k per il quale $14k=1$ in Z_{31} cioè determinare un h tale che $14k = 31h+1$

Applichiamo l'algoritmo di Euclide

$$31 = 14 \cdot 2 + 3$$

$$14 = 3 \cdot 4 + 2$$

$$3 = 2 \cdot 1 + 1$$

$$\text{da cui } 1 = 3 - 2 = 3 - (14 - 3 \cdot 4) = 3 \cdot 5 - 14 = 5 \cdot (31 - 14 \cdot 2) = 31 \cdot 5 - 11 \cdot 14$$

$$k=-11 \quad h=5$$

$$\text{perciò l'inverso di } [14] \text{ è } [-11] \text{ ovvero } [20] \text{ da cui } [-4][20] = [-80] = [13]$$

Quesito 2

$$5a^4=6b^3$$

da questa uguaglianza ricaviamo che $6|a$ e $5|b$

gli esponenti con cui i fattori 2,3 e 5 compaiono nei due numeri devono essere uguali perciò

$$\text{I) poniamo } a = 5^k \text{ e } b = 5^h \text{ otteniamo che } 4k+1=3h \text{ da cui } k=2 \text{ e } h=3$$

$$\text{perciò } 5^2|a \text{ e } 5^3|b$$

$$\text{ii) poniamo } a = 2^k3^h \text{ e } b = 2^m3^n \text{ otteniamo } 4h = 43m \text{ e } 4h=4n \text{ da cui } k=h=m=n=1$$

$$\text{perciò } 6|a \text{ e } 6|b$$

$$\text{i due più piccoli valori di } a \text{ e di } b \text{ sono } a = 6 \cdot 5^2 = 150 \quad b = 6 \cdot 5^3 = 750$$

$$a+b = 900$$

Quesito 3

l'equazione si può trasformare nel modo seguente:

$$2x^2 + 5y^2 = 11xy - 154$$

$$x^2 + 25y^2 - 10xy + x^2 - 20y^2 - xy = -154$$

$$(x-5y)^2 + (x-5y)(x+4y) = -154$$

$$(x-5y)(x-5y+x+4y) = -154$$

$$(x-5y)(2x-y) = -154$$

essendo $154 = 2 \cdot 7 \cdot 11$ abbiamo le possibili coppie $(\pm 1, \mp 154)$ $(\pm 154, \mp 1)$ $(\pm 2, \mp 77)$ $(\pm 77, \mp 2)$ $(\pm 7, \mp 22)$ $(\pm 22, \mp 7)$ $(\pm 11, \mp 14)$ $(\pm 14, \mp 11)$

otterremmo 16 sistemi. Chiamiamo a e b i possibili divisori di -154. Osserviamo però che $\begin{cases} x - 5y = a \\ 2x - y = b \end{cases}$ è equivalente a $\begin{cases} 2x - 10y = 2a \\ 2x - y = b \end{cases}$ da cui ricaviamo la condizione che $2a-b$ deve essere multiplo di 9

risolvendo dolo i sistemi che danno soluzioni intere otteniamo le coppi $(\pm 43, \pm 9)$ $(\pm 13, \pm 4)$ $(\pm 9, \pm 4)$ da cui la somma richiesta è 164

Quesito 4

Ogni interruttore viene toccato una volta sola per ogni divisore del numero nche lo individua.. Per restare acceso n deve avere un numero dispari di divisori quindi è un quadrato perfetto. Intanto escludiamo il 4907 e il 4908 in qunato nessun quadrato perfetto può terminare con 7 o 8

$$\text{Osserviamo che } 9405 \equiv 5 \pmod{8}$$

$$9406 \equiv 6 \pmod{8}$$

quindi resta 4909

Quesito 5

Consideriamo i resti nella divisione per 9 sono 0,1,2,3,4,5,6,7,8

- I) se il numero fosse 5 posso avere come resti i numeri che vanno da 0 a 4 e quindi né la somma nè la differenza sono divisibili per 9
- II) consideriamo $n \geq 6$ Ho due possibilità:
 - se due numeri hanno uguale resto allora la differenza è divisibile per 9
 - consideriamo allora tutti i resti diversi. Ma se ho 6 numeri con resti diversi significa che restano esclusi solo tre resti per cui si ottiene almeno una delle seguenti coppie di resti (1,8) (2,7) (3,6) (4,5) ed allora esiste sempre una coppia di numeri che ha somma divisibile per 9.