Problemi di Aritmetica

1 Primo gruppo

Problema 1 (Febbraio 2004)**.** Determinare il più piccolo intero n con la seguente proprietà: dati comunque n interi $a_1 \ldots, a_n$, ne esistono due distinti tali che la loro somma o la loro differenza è divisibile per 10.

Problema 2 (Febbraio 2002)**.** Un sottoinsieme A dei numeri naturali compresi fra 1 e 100 è tale che la somma di due suoi elementi qualsiasi è divisibile per 6. Quanti elementi può avere, al massimo, il sottoinsieme A?

Problema 3 (Febbraio 1999)**.** Qual è la cifra delle unità del numero $2^{(2^1)} + 2^{(2^2)} + 2^{(2^3)} + 2^{(2^4)} + \cdots + 2^{(2^{1999})}$?

Problema 4 (Febbraio 2006)**.** Un numero si dice "moderno" se, in base 10, può essere espresso concatenando "un po"' di scritture decimali di 2006: ad esempio 200620062006 è moderno, mentre 20200606 e 2006200 non lo sono. Quante cifre ha il più piccolo quadrato perfetto moderno positivo?

Problema 5 (Febbraio 2000)**.** Qual è il più piccolo numero intero positivo che possiede esattamente 15 divisori? (Nota: per divisori di un numero intero positivo si intendono i divisori positivi includendo 1 e il numero stesso. Per esempio, il numero 6 ha esattamente 4 divisori: $1, 2, 3, 6$).

2 Secondo gruppo

Problema 6 (Febbraio 2004)**.** Dimostrare che ogni numero intero n può essere scritto nella forma $n = a^2 + b^2 - c^2$, dove a, b e c sono opportuni numeri interi.

Problema 7 (Febbraio 2006)**.** Sia $k \geq 1$ un numero naturale. Determinare, in funzione di k il numero di interi positivi n con le seguenti proprietà:

(a) in base dieci si scrivono con k cifre, tutte dispari;

(b) sono divisibili per 5 e il quoziente $\frac{n}{5}$, scritto in base dieci, ha ancora k cifre, tutte dispari.

Problema 8 (Febbraio 2002)**.** Determinare qual è il massimo comun divisore tra tutti i numeri che si possono scrivere come somma di 2002 dispari consecutivi tutti positivi e minori di 10000 (due numeri dispari si dicono consecutivi se differiscono di 2).

Problema 9 (Febbraio 2005)**.** Siano a, b interi positivi primi tra loro. Qual è il massimo valore che può assumere l'MCD tra $(a + b)^4$ e $a - b$?

Problema 10 (Febbraio 2006)**.** I membri di una tribù hanno dieci dita alle mani e nove ai piedi e quindi contano indifferentemente in base 10 o 19. Nella loro cultura matematica, un numero intero positivo è detto "sacro" se in entrambe le basi si scrive con le stesse cifre (comprese tra 1 e 9). Quanti sono i numeri sacri?

3 Terzo gruppo

Problema 11 (Febbraio 1999)**.** Quanti sono i numeri naturali che in base 10 si scrivono con 3 cifre e in base 2 si scrivono con 7 cifre?

Problema 12 (Febbraio 2003)**.** Si determinino:

(i) tutte le coppie (m, n) di interi positivi che soddisfano l'equazione $n^2 - 2^m = 1$;

(ii) tutte le coppie (m, n) di interi positivi che soddisfano l'equazione $2^m - n^2 = 1$.

Problema 13 (Febbraio 2009)**.** Determinare tutti gli interi positivi m per i quali sia $\frac{2 \cdot 5^m + 10}{3^m + 1}$ che $\frac{9^m + 1}{5^m + 5}$ sono interi.

Problema 14 (Febbraio 1997)**.** Dato un numero primo p, determinare tutte le coppie ordinate di numeri naturali (m, n) che verificano l'equazione: $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{p}$.

Problema 15 (Febbraio 1998)**.** Dato un numero intero positivo M la cui scrittura decimale è $a_n a_{n-1} \dots a_0$ (cioè M è uguale a $10^n a_n + \cdots + 10a_1 + a_0$) con $0 \leq a_0, \dots, a_n \leq 9$, sia $f(M) = a_n + 2a_{n-1} + 2^2 a_{n-2} + \cdots + 2^n a_0$ (si intende che se $M = a_0$, $f(M) = a_0$).

1) Si determini l'insieme X di tutti gli interi positivi per cui $f(M) = M$.

2) Si dimostri che, per ogni intero positivo M, la successione

$$M, f(M), f(f(M)), f(f(f(M))), \dots$$

contiene un elemento di X.

4 Quarto gruppo

Problema 16 (Cesenatico 2007)**.** Sia data la successione

$$\begin{cases} x_1 = 2; \\ x_{n+1} = 2x_n^2 - 1 \quad \text{per } n \geq 1. \end{cases}$$

Dimostrare che n e x_n sono relativamente primi per ogni $n \geq 1$.

Problema 17 (Febbraio 2000)**.** Determinare tutte le coppie ordinate (m, n) di numeri interi positivi tali che si abbia $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} - \frac{1}{mn} = \frac{2}{5}$.

Problema 18 (?)**.** Una stanza rettangolare ha il pavimento rivestito con mattonelle quadrate; la metà di esse è adiacente alle pareti. Trovare quante possono essere le mattonelle su ciascun lato.

Problema 19 (?)**.** Si dimostri che per ogni terna di numeri naturali (a, b, c) il numero $5^{5a+1} + 4^{5b+2} + 3^{5c}$ è divisibile per 11.

Problema 20 (?)**.** Determinare tutte le terne (a, b, c) di numeri interi positivi tali che valga l'uguaglianza $a^2 + 3^b = 2^c$.