

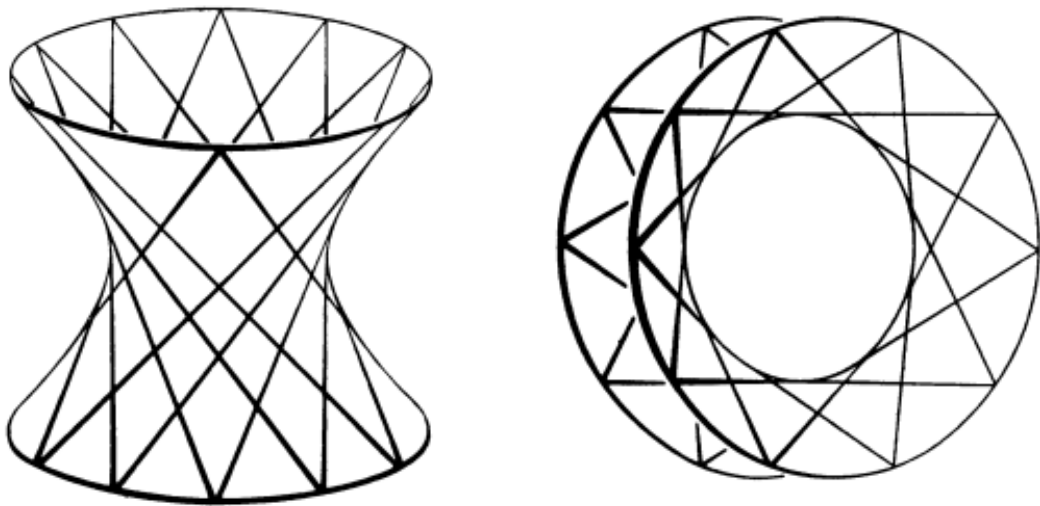
Università degli Studi di Firenze

Facoltà di Ingegneria

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Civile

A.A. 2011/2012

Esercitazione per il Corso di Fisica Matematica



Iperboloide iperbolico

Docente: prof. Marco Modugno

Allievo: Matteo Di Goro

Firenze, 6 marzo 2012

Premessa

Il presente lavoro è una applicazione dei concetti di geometria differenziale delle superfici appresi nel corso di Fisica Matematica del professor Marco Modugno, durante l'anno accademico 2011/2012. In particolare, il lavoro riguarda lo studio della geometria dell'iperboloide iperbolico di rotazione.

Il lavoro è suddiviso in tre capitoli. Il primo capitolo è introduttivo: la superficie viene brevemente studiata nel contesto classico della geometria euclidea, come tipicamente viene fatto nei primi corsi di geometria. Partendo dal presupposto che l'iperbole e l'iperboloide sono due luoghi geometrici la cui geometria è strettamente correlata, vengono brevemente richiamate le proprietà dell'iperbole e successivamente viene preso in esame l'iperboloide iperbolico. Dunque, ne vengono evidenziate alcune caratteristiche geometriche semplici, utili alla percezione della forma, aspetto imprescindibile per qualsiasi applicazione ingegneristica e architettonica. Successivamente, con l'ausilio dei potenti mezzi dell'algebra tensoriale e della geometria differenziale, si passa al lavoro vero e proprio. Secondo quanto appreso durante il corso, l'approccio è del tutto generale, basato sui concetti di base della geometria differenziale delle varietà. Lo studio della superficie è suddiviso in due fasi, alle quali sono dedicati il capitolo due e tre. Nel capitolo due viene analizzata la geometria dello spazio ambiente nel quale è immersa la superficie. In particolare, si considera una varietà coincidente con lo spazio affine euclideo, in cui, definito un sistema di coordinate adattato, vengono calcolati la metrica e i coefficienti della connessione. Sfruttando tali risultati, nel capitolo tre viene studiata la geometria della superficie presa in esame. Secondo l'approccio seguito, l'iperboloide è definito come una sottovarietà dello spazio ambiente, caratterizzata localmente dall'annullarsi di una certa funzione vincolare e quindi descritto da un sistema di coordinate indotto sulla sottovarietà. Dunque, vengono calcolate la metrica, le curvatures e la connessione della sottovarietà.

Questo studio, oltre ad aver contribuito in modo significativo alla comprensione di alcuni argomenti affrontati durante le lezioni, ha rappresentato uno stimolo alla coerenza ed al rigore matematico.

Inoltre, i concetti acquisiti rappresentano il fondamento per lo studio di numerose teorie dell'ingegneria strutturale, come ad esempio, la teoria lineare dei gusci elastici sottili.

M.D.G.

Indice

INTRODUZIONE	1
1.1 L'IPERBOLE	1
1.2 L'IPERBOLOIDE IPERBOLICO DI ROTAZIONE.....	4
SPAZIO AMBIENTE	9
2.1 SISTEMI DI COORDINATE.....	9
2.2 METRICA RIEMANNIANA	12
2.3 CONNESSIONE RIEMANNIANA	14
IPERBOLOIDE IPERBOLICO DI ROTAZIONE	17
3.1 SISTEMA DI COORDINATE INDOTTO	17
3.2 PRIMA FORMA FONDAMENTALE	18
3.3 CURVATURA ESTRINSECA	19
3.4 CONNESSIONE RIEMANNIANA INDOTTA	22
3.5 RELAZIONE TRA LA CURVATURA DI GAUSS E LA CURVATURA RIEMANNIANA.....	25
RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI	27

CAPITOLO 1

INTRODUZIONE

Nel presente capitolo vengono richiamate le definizioni di *iperbole* ed *iperboloide iperbolico* anche detto *iperboloide ad una falda*¹, mostrando alcune delle loro proprietà.

L'iperbole è una delle sezioni coniche (cerchi, ellissi, iperboli e parabole), cioè curve ottenibili come intersezione di un cono con un piano. Tale aspetto le rende direttamente riconducibili alla geometria lineare di rette e piani e pertanto possono essere studiate in maniera soddisfacente nell'ambito della geometria euclidea classica. In tal contesto si richiamano le proprietà principali dell'iperbole.

Successivamente si definisce l'iperboloide iperbolico. Dunque, se ne evidenzia il legame con la geometria dell'iperbole attraverso l'espressione algebrica di alcune sue sezioni con dei piani. Infatti, i sopraindicati luoghi geometrici sono legati dal fatto che opportune sezioni dell'iperboloide iperbolico con un piano sono delle iperboli. Inoltre, il cosiddetto iperboloide iperbolico di rotazione, desumibile come caso particolare dall'equazione canonica dell'iperboloide iperbolico, è una superficie di rotazione generata da un'iperbole rotante attorno ad uno dei suoi assi. In questo senso l'iperboloide può essere considerato l'analogo spaziale dell'iperbole.

Infine, si dimostra la natura rigata dell'iperboloide iperbolico di rotazione.

1.1 L'iperbole

Sia E lo spazio affine euclideo di dimensione 2 (piano euclideo). La definizione classica di iperbole è la seguente

Definizione 1.1 Un'iperbole I di fuochi $F, F' \in E$ e semiasse $a > 0$ è il luogo dei punti $P \in E$ tali che il valore assoluto della differenza delle distanze di P da F ed F' sia la costante $2a$, cioè

$$I = \{P \in E \mid |d(P, F) - d(P, F')| = 2a\}.$$

Si esige inoltre che sia $2a < d(F, F')$. □

Si sceglie un sistema di coordinate cartesiano ortonormale fissando un'origine $O \in E$ e una base ortonormale $\mathcal{B} \equiv (e_1, e_2)$ di \bar{E} , dove \bar{E} è lo spazio vettoriale di dimensione 2 a cui è associato E . Tale scelta è arbitraria e viene effettuata in maniera funzionale al contesto (FIGURA 1.1).

Si sceglie come origine il punto medio del segmento $\overline{FF'}$ e i versori ortogonali della base, tali che e_1 sia parallelo allo stesso segmento. In tal caso F ha coordinate $(c, 0)$ e F' coordinate $(-c, 0)$.

¹In generale esistono due tipi di iperbolidi: ellittici o a due falde ed iperboliche o a una falda.

Proposizione 1.1 Nel sistema di riferimento scelto l'equazione dell'iperbole è:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (1.1)$$

dove $b^2 = c^2 - a^2$.

Tale equazione è detta *equazione canonica dell'iperbole*.

DIMOSTRAZIONE. Nel sistema di riferimento prescelto, un punto P appartiene all'iperbole se e solo se

$$\left| \sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \right| = 2a.$$

Tenendo conto che deve essere $a < c$, elevando due volte al quadrato e riordinando, si ottiene l'equazione canonica dell'iperbole. *QED*

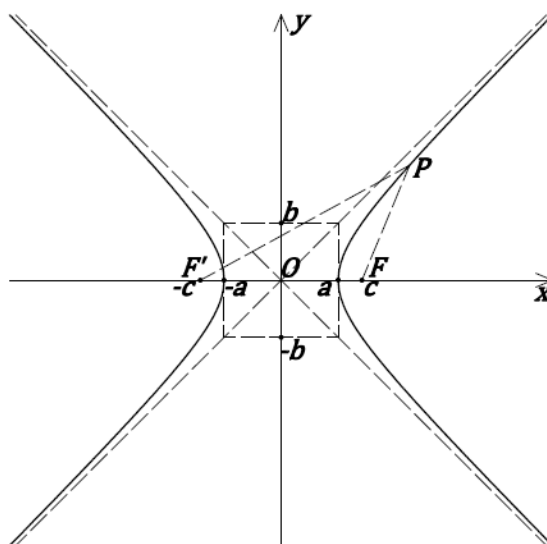


FIGURA 1.1 L'iperbole.

Nota 1.1 L'iperbole rientra nella famiglia delle *curve algebriche piane del secondo ordine*,² ovvero curve definite, in un sistema di coordinate cartesiane ortogonali, da un'equazione algebrica di secondo grado. □

Si è soliti usare la seguente terminologia:

- I segmenti $\overline{PF'}$ e \overline{PF} sono detti *raggi focali*.
- I punti $(a, 0)$ e $(-a, 0)$ sono detti *vertici* dell'iperbole.
- La condizione di appartenenza di un punto P all'iperbole $\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a$ definisce il *ramo sinistro* ed il *ramo destro* dell'iperbole.
- I parametri che caratterizzano l'iperbole sono: la *semidistanza trasversale* a , il *semiasse coniugato* b e la *semidistanza focale* $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.
- Il punto medio del segmento di retta $\overline{FF'}$ (in questo caso l'origine) è chiamato *centro* dell'iperbole.

² Le curve algebriche piane del secondo ordine sono anche dette coniche.

- La retta passante per il centro, i vertici e i fuochi, è l'*asse trasversale*.
- La retta passante per il centro e perpendicolare all'asse trasversale è l'*asse coniugato*.
- Il rettangolo di lati $2a$ e $2b$, disposto simmetricamente rispetto agli assi dell'iperbole e tangente all'iperbole nei suoi vertici, è detto *rettangolo di base*.
- L'iperbole ammette esattamente due asintoti: le rette di equazione cartesiana $y = \pm(b/a)x$, soluzioni dell'equazione degenera $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 0$. Un'iperbole si dice *equilatera* se $a = b$; ne risulta evidentemente che gli asintoti di un'iperbole equilatera sono rette tra loro perpendicolari.

Definizione 1.2 Si definisce *eccentricità* e dell'iperbole il rapporto tra la distanza dei fuochi dell'iperbole e la distanza dei suoi vertici, cioè:

$$e = \frac{c}{a} . \square$$

Definizione 1.3 Si definiscono *direttrici* dell'iperbole le due rette perpendicolari all'asse trasversale dell'iperbole e disposte simmetricamente rispetto al centro a distanza a/e da questo, cioè le rette di equazione

$$x = -\frac{a}{e} ; \quad x = +\frac{a}{e} .$$

Conveniamo di chiamare sinistra la prima direttrice e destra la seconda. \square

Osservazione 1.1 Poiché per l'iperbole $c > a$, si ha $e > 1$ e quindi $a/e < a$.

Essendo $a/e < a$, segue che la direttrice destra si trova tra il centro ed il vertice destro dell'iperbole; analogamente, la direttrice sinistra si trova tra il centro e il vertice sinistro (FIGURA 1.2).

Inoltre, essendo

$$e^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2} \Rightarrow e = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} ; \quad \frac{b}{a} = \sqrt{e^2 - 1} ,$$

l'eccentricità dell'iperbole caratterizza la forma del suo rettangolo di base e di conseguenza la forma dell'iperbole stessa. Tanto più piccola è l'eccentricità dell'iperbole, tanto più allungato è il suo rettangolo di base. \square

Teorema 1.1 Sia P un punto appartenente all'iperbole, r la distanza tra P e uno dei due fuochi e l la distanza tra P e la direttrice corrispondente a questo fuoco. Allora

$$e = \frac{r}{l} .$$

DIMOSTRAZIONE. Sia P in punto appartenente all'iperbole.

Se P si trova sul ramo destro si ha $l = x - a/e$. Dalla quale, valendo la relazione $r = ex - a$, si ha $r/l = e$.

Se P si trova sul ramo sinistro dell'iperbole $l = -x + a/e$. Dalla quale, valendo la relazione $r = -(ex - a)$, si ha $r/l = e$ (per i dettagli si veda [5]). *QED*

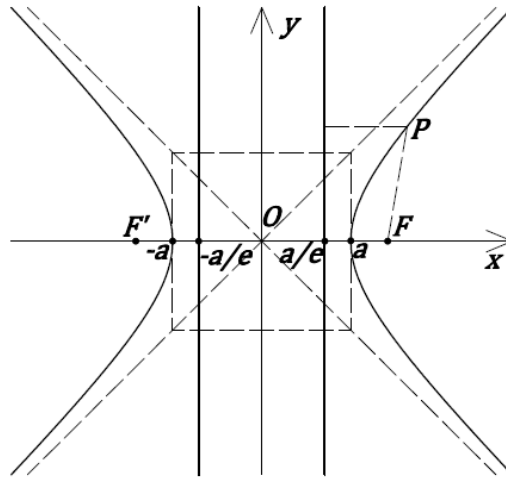


FIGURA 1.2 L'iperbole e le sue direttrici.

1.2 L'iperboloide iperbolico di rotazione

Sia E lo spazio affine euclideo di dimensione 3. Fissato un sistema di coordinate cartesiano ortonormale, si sottintenda l'usuale identificazione di E con \mathbb{R}^3 .

Definizione 1.4 Si definisce *iperboloide iperbolico*, anche detto *iperboloide ad una falda*, il luogo di punti di \mathbb{R}^3 definito, in un sistema di coordinate cartesiane ortogonali, dall'equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (1.2)$$

con a, b, c numeri reali positivi. La (1.2) è detta *equazione canonica dell'iperboloide iperbolico*.

Inoltre, si definisce *iperboloide iperbolico di rotazione*, anche detto *iperboloide ad una falda di rotazione*, il luogo di punti di \mathbb{R}^3 ottenuto dalla (1.2) ponendo $a = b$, ovvero

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \square \quad (1.3)$$

Due esempi di iperboloide iperbolico sono rappresentati in FIGURA 1.3.

Nota 1.2 L'iperboloide iperbolico rientra nella famiglia delle *superfici algebriche del secondo ordine*, ovvero superfici definite, in un sistema di coordinate cartesiane ortogonali, da un'equazione algebrica di secondo grado. \square

Il proseguo del lavoro riguarderà lo studio geometrico dell'iperboloide iperbolico di rotazione. Di seguito, attraverso l'espressione algebrica di alcune sue sezioni con dei piani, se ne evidenziano le caratteristiche geometriche elementari.

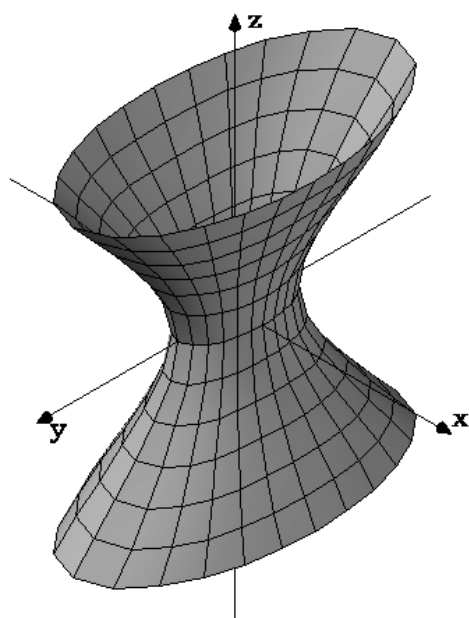
- L'intersezione dell'iperboloide iperbolico di rotazione con un generico piano di equazione $z = k$ è la circonferenza di equazione

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \left(1 + \frac{k^2}{c^2}\right) a^2 \\ z = k. \end{cases}$$

In particolare per $k = 0$ si ottiene la circonferenza

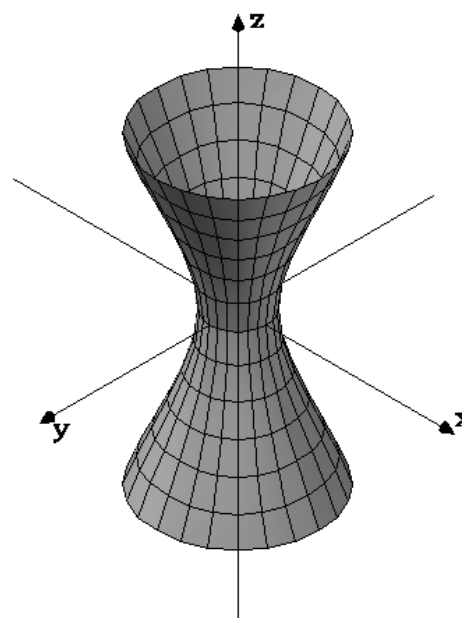
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ z = 0. \end{cases}$$

Essa si chiama *circonferenza di gola*.



Iperboloide iperbolico di equazione

$$\frac{x^2}{(3/2)^2} + \frac{y^2 + z^2}{3^2} = 1$$



Iperboloide iperbolico di rotazione di equazione

$$\frac{x^2 + y^2}{(3/2)^2} - \frac{z^2}{3^2} = 1$$

FIGURA 1.3

- L'intersezione dell'iperboloide iperbolico di rotazione con un generico piano di equazione $x = k_1$, con $k_1 \neq \pm a$, è l'iperbole di equazione

$$\begin{cases} \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{k_1^2}{a^2} \\ x = k_1. \end{cases}$$

In particolare per $k_1 = 0$ si ottiene l'iperbole

$$\begin{cases} \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ x = 0. \end{cases} \quad (1.4)$$

Tale sezione rappresenta un'iperbole nel piano Oyz espressa in forma canonica, con i vertici nei punti $P \in \mathbb{R}^3$ di coordinate $(0, a, 0)$ e $(0, -a, 0)$ ed eccentricità $e = h/a = \sqrt{1 + (c/a)^2}$ (FIGURA 1.4).

- È evidente che le sezioni dell'iperboloide iperbolico di rotazione con tutti i piani appartenenti al fascio proprio di piani avente per asse l'asse coordinato z , sono delle iperboli con eccentricità pari a $e = h/a = \sqrt{1 + (c/a)^2}$, aventi per asse coniugato l'asse z e per asse trasversale la traccia del piano considerato con il piano Oxy . Pertanto, l'iperboloide iperbolico di rotazione è una superficie di rotazione che si ottiene ruotando un'iperbole attorno al proprio asse coniugato.

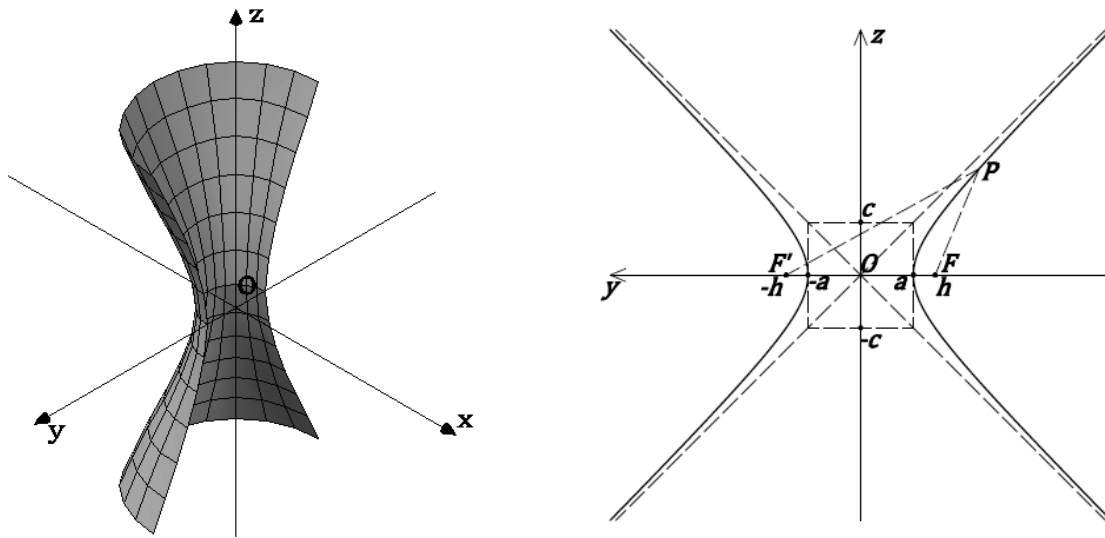


FIGURA 1.4 Sezione dell'iperboloide circolare iperbolico con il piano Oyz .

Si introduce la seguente

Definizione 1.5 Una superficie Q è una *superficie rigata*, se per ogni punto $P \in Q$ passa una retta che giace su Q . Tali rette sono dette *generatrici*. Inoltre, una superficie Q è una *superficie doppiamente rigata*, se per ogni punto $P \in Q$ passano due rette che giacciono su Q ; in questo caso Q possiede due famiglie di rette generatrici. \square

Proposizione 1.2 L'iperboloide iperbolico di rotazione è una superficie doppiamente rigata, con due famiglie di rette generatrici definite dalle equazioni cartesiane

$$\begin{cases} \alpha \left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c} \right) = \beta \left(1 + \frac{y}{a} \right) \\ \beta \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c} \right) = \alpha \left(1 - \frac{y}{a} \right) \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha \left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c} \right) = \beta \left(1 - \frac{y}{a} \right) \\ \beta \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c} \right) = \alpha \left(1 + \frac{y}{a} \right) \end{cases} \quad (1.4)$$

con α e β numeri reali qualsiasi non contemporaneamente nulli.

DIMOSTRAZIONE. L'equazione canonica dell'iperboloide iperbolico di rotazione (1.3) può essere posta nella forma

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c} \right) \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c} \right) = \left(1 + \frac{y}{a} \right) \left(1 - \frac{y}{a} \right).$$

La precedente equazione si ottiene anche moltiplicando membro a membro i sistemi (1.4). Quindi, qualunque siano i valori di α e β (ma non nulli simultaneamente), la retta corrispondente appartiene interamente all'iperboloide iperbolico di rotazione. Rimane da dimostrare che per ciascun punto della superficie passa una e soltanto una retta per ciascun sistema (1.4).

Sia P un punto arbitrario di coordinate (x_0, y_0, z_0) appartenente all'iperboloide iperbolico di rotazione. Se $1 + \frac{y_0}{a} \neq 0$, imponendo l'appartenenza di questo punto alla famiglia di rette definite dalla prima delle (1.4) si ottiene $\beta = k\alpha$, dove

$$k = \frac{\frac{x_0}{a} + \frac{z_0}{c}}{1 + \frac{y_0}{a}}$$

Sostituendo tale valore nel primo dei sistemi (1.4) si ottiene

$$\begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = k \left(1 + \frac{y}{a}\right) \\ k \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = 1 - \frac{y}{a} \end{cases}$$

che dimostra che per il punto (x_0, y_0, z_0) passa una sola retta appartenente all'insieme infinito di rette definito dalla prima delle (1.4). Nel caso in cui $1 + \frac{y_0}{a} = 0$, procedendo in maniera analoga si giunge alla stessa conclusione. Infine, la famiglia di rette definite dalla seconda delle (1.4), può essere dedotta per analogia (per i dettagli si veda [5]). QED

Nota 1.3 La dimostrazione della natura rigata dell'iperboloide, qui effettuata nel caso in cui $a = b$, può essere facilmente estesa al caso generale in cui $a \neq b$. □

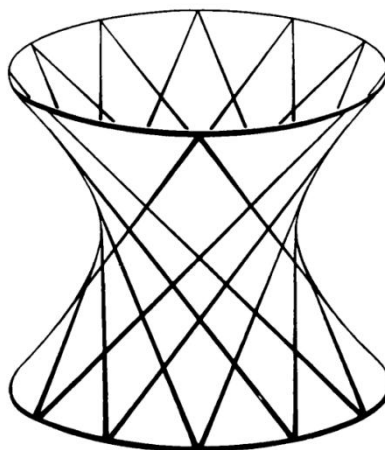


FIGURA 1.5 L'iperboloide iperbolico con due sistemi di generatrici rettilinee.

Nota 1.4 Più in generale, iperbole ed iperboloide appartengono alla famiglia delle quadriche. Una quadrica è un luogo di punti di \mathbb{R}^n le cui coordinate soddisfano un'equazione algebrica di secondo grado a coefficienti reali in n variabili. Un tale luogo geometrico è anche detto *ipersuperficie algebrica del secondo ordine*. In particolare, per $n = 2$ la quadrica è una curva algebrica piana del secondo ordine, mentre per $n = 3$ è una superficie algebrica del secondo ordine.

Le quadriche sono sottoinsiemi di \mathbb{R}^n , con una sua forma e un suo aspetto geometrico indipendente dal sistema di riferimento scelto. Infatti, è possibile effettuare una classificazione delle quadriche in modo da trovare una lista di cosiddette *forme canoniche* nelle quali ogni altra possa essere trasformata. Ovviamente, la lista delle forme canoniche sarà diversa a seconda che il problema venga considerato nel caso affine, o euclideo, o proiettivo. Le forme canoniche (1.1) e (1.2) sono relative al caso euclideo. Per una trattazione dettagliata di tali argomenti si veda [1].□

Osservazione 1.2 L'iperboloide iperbolico di rotazione è una superficie che viene proficuamente sfruttata per la realizzazione di torri di raffreddamento in cemento armato. Infatti, tale geometria consente generalmente un'ottimizzazione strutturale: lo spessore minimo della parete nella zona centrale e nelle porzioni superiori, in quasi tutte le torri di grandi dimensioni, è di 14 cm; in altre parole, in relazione al suo diametro, la struttura è più sottile di un guscio d'uovo. In aggiunta, la natura rigata della superficie offre notevoli vantaggi, sia dal punto di vista delle cassature per i getti, che per la disposizione delle armature. Quest'ultime, infatti, se disposte secondo le generatrici, non devono essere piegate. Oltre che per la realizzazione di strutture a guscio in cemento armato, le proprietà di superficie rigata dell'iperboloide iperbolico di rotazione possono essere sfruttate per la realizzazione di tralicci metallici costituiti da un'ossatura disposta secondo le generatrici rettilinee. Tali strutture, leggere e resistenti, trovano impiego nella costruzione di torri idrauliche ed antenne.□

CAPITOLO 2

SPAZIO AMBIENTE

Nel presente capitolo è riportata la prima fase dello studio della geometria dell'iperboloide iperbolico di rotazione nell'ambito della geometria differenziale delle superfici.

Una varietà differenziabile M con una forma quadratica definita positiva in ogni spazio tangente è detta varietà riemanniana e tale forma quadratica è detta metrica riemanniana. Attraverso la nozione generale di connessione lineare su di una varietà si possono definire i tensori di torsione, di curvatura e di Ricci. In particolare, per una varietà riemanniana, esiste un'unica connessione lineare a torsione nulla e derivata covariante della metrica nulla, detta connessione riemanniana.

Nel proseguo si identifica M con lo spazio ambiente euclideo tridimensionale E .

Lo spazio euclideo E ammette diversi tipi di sistemi di riferimento, che riflettono in modo naturale la sua struttura metrica e affine. Nel seguito, lo spazio ambiente è descritto da un sistema di riferimento adattato all'iperboloide. Pertanto, l'iperboloide è una sottovarietà Q dello spazio ambiente, caratterizzata localmente dall'annullarsi di una certa funzione vincolare. Con tale approccio, Q è descritto da un sistema di coordinate indotto sulla sottovarietà. Nel presente capitolo si riporta il calcolo della metrica riemanniana dello spazio ambiente e della connessione riemanniana da essa indotta. Inoltre, si mostra che, per $M \equiv E$, la connessione riemanniana coincide con il differenziale standard D indotto dalla struttura affine ed i tensori di curvatura e di Ricci sono nulli.

I risultati ottenuti vengono successivamente sfruttati per lo studio geometrico della sottovarietà a cui è dedicato il capitolo 3. Per la risoluzione di questo esercizio è stato fatto riferimento a [4], a cui si rimanda per una trattazione degli argomenti qui sommariamente accennati.

2.1 Sistemi di coordinate

Sia E lo spazio affine euclideo di dimensione 3 (spazio ambiente). Si considera una varietà M coincidente con E .

Sia $O \in E$ un punto di E (origine) e sia $\mathcal{B} \equiv (e_1, e_2, e_3)$ una base ortonormale di \bar{E} , dove \bar{E} è lo spazio vettoriale euclideo di dimensione 3 a cui è associato lo spazio affine E .

Si considerano i sistemi di coordinate cartesiano ortonormale e cilindrico individuati da (O, \mathcal{B}) , definiti, rispettivamente, dai seguenti omeomorfismi [3]:

$$(x, y, z): E \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(\rho, \vartheta, z): (E - \Pi) \rightarrow ((0, \infty), (0, 2\pi), (-\infty, \infty)) \subset \mathbb{R}^3$$

con $\Pi := \{p \in P \mid y(p) = 0, x(p) \geq 0\}$.

In particolare, il sistema di riferimento cilindrico è definito dalle seguenti formule di transizione:

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \vartheta \\ y &= \rho \sin \vartheta \\ z &= z. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Si ha anche l'uguaglianza di transizione inversa

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Nota 2.1 La restrizione del dominio di applicazione delle funzioni coordinate del sistema di coordinate cilindrico al sottoinsieme aperto $(E - \Pi) \subset E$ serve a garantire che l'applicazione sia un omeomorfismo. \square

Nel sistema di riferimento cartesiano ortogonale, un iperboloide iperbolico di rotazione con circonferenza di gola centrata nell'origine è definito dal seguente luogo di punti (vedi 1.2):

$$Q = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} - 1 = 0 \right\}.$$

Con a, b numeri reali positivi.

Ne risulta che, considerando il sistema di riferimento cartesiano ed il corrispondente sistema di riferimento cilindrico caratterizzato dalle (2.1), Q può essere definito come il luogo dei punti che annullano la seguente *funzione vincolare*:

$$f = \rho - \frac{a}{b} \sqrt{b^2 + z^2}.$$

Si può introdurre la seguente:

Definizione 2.1 Si definisce sistema di coordinate *cilindrico - iperbolico* (FIGURA 2.1), un sistema di coordinate del tipo

$$(f, \vartheta, z): (E - \Pi) \rightarrow ((-\infty, \infty), (0, 2\pi), (-\infty, \infty)) \subset \mathbb{R}^3,$$

definito, con riferimento ad un sistema di coordinate cartesiano e cilindrico, dalle seguenti funzioni di transizione

$$\begin{aligned} x &= \left(f + \frac{a}{b} \sqrt{b^2 + z^2} \right) \cos \vartheta & \rho &= f + \frac{a}{b} \sqrt{b^2 + z^2} \\ y &= \left(f + \frac{a}{b} \sqrt{b^2 + z^2} \right) \sin \vartheta & \vartheta &= \vartheta \\ z &= z & z &= z. \square \end{aligned} \tag{2.2}$$

Il sistema di coordinate cilindrico - iperbolico è adattato all'iperboloide iperbolico di rotazione e descrive la varietà $M \equiv E$ (spazio ambiente). La coppia (ϑ, z) sono le *funzioni lagrangiane*, f è la già citata *funzione vincolare*.

Pertanto, l'iperboloide iperbolico di rotazione $Q \subset M \equiv E$ è una sottovarietà di codimensione 1 e quindi è una ipersuperficie³.

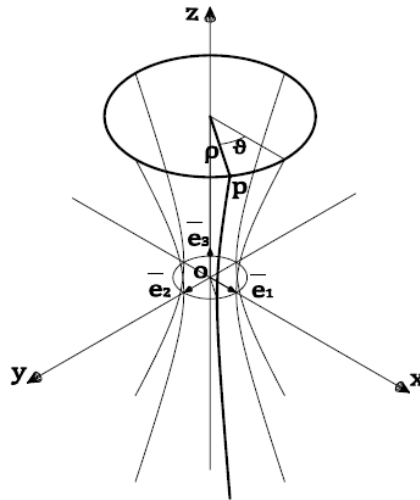


FIGURA 2.1 Sistema di coordinate cilindrico - iperbolico.

Nota 2.2 La terna (f, ϑ, z) , con la restrizione del dominio di applicazione delle funzioni coordinate al sottoinsieme aperto $(E - \Pi) \subset E$, è un sistema di coordinate, essendo le (2.2) invertibili e C^∞ nei due sensi.□

Osservazione 2.1 Per $b \rightarrow \infty$, il luogo di punti Q degenera in un cilindro circolare di raggio a con generatrici parallele ad e_3 .□

Proposizione 2.1 In un sistema di coordinate cilindrico - iperbolico, i vettori tangenti alle curve coordinate e le derivate delle funzioni coordinate sono date dalle formule:

$$\frac{\partial f}{\partial f} e_1 + \frac{\partial y}{\partial f} e_2 + \frac{\partial z}{\partial f} e_3 = \cos \vartheta e_1 + \sin \vartheta e_2$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \vartheta} e_1 + \frac{\partial y}{\partial \vartheta} e_2 + \frac{\partial z}{\partial \vartheta} e_3 = \left(f + \frac{a}{b} \sqrt{b^2 + z^2} \right) (-\sin \vartheta e_1 + \cos \vartheta e_2)$$

$$\frac{\partial z}{\partial z} e_1 + \frac{\partial y}{\partial z} e_2 + \frac{\partial z}{\partial z} e_3 = \frac{az}{b\sqrt{b^2 + z^2}} \cos \vartheta e_1 + \frac{az}{b\sqrt{b^2 + z^2}} \sin \vartheta e_2 + e_3$$

e

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = \cos \vartheta dx + \sin \vartheta dy - \frac{az}{b\sqrt{b^2 + z^2}} dz$$

³ La sottovarietà Q ha dimensione $l = m - k$, dove m è la dimensione della varietà M e k è il numero di coordinate vincolari o codimensione di Q . Se $M \equiv E$, come nel caso in esame, Q è una superficie bidimensionale, ovvero $m = 3, k = 1, l = 2$.

$$d\vartheta = \frac{\partial\vartheta}{\partial x} dx + \frac{\partial\vartheta}{\partial y} dy + \frac{\partial\vartheta}{\partial z} dz = \frac{b}{(fb + a\sqrt{b^2 + z^2})} (-\sin\vartheta dx + \cos\vartheta dy)$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy + \frac{\partial z}{\partial z} dz = dz.$$

Le formule inverse di transizione sono

$$e_1 = \frac{\partial f}{\partial x} \partial f + \frac{\partial\vartheta}{\partial x} \partial\vartheta + \frac{\partial z}{\partial x} \partial z = \cos\vartheta \partial f - \frac{b}{(fb + a\sqrt{b^2 + z^2})} \sin\vartheta \partial\vartheta$$

$$e_2 = \frac{\partial f}{\partial y} \partial f + \frac{\partial\vartheta}{\partial y} \partial\vartheta + \frac{\partial z}{\partial y} \partial z = \sin\vartheta \partial f + \frac{b}{(fb + a\sqrt{b^2 + z^2})} \cos\vartheta \partial\vartheta$$

$$e_3 = \frac{\partial f}{\partial z} \partial f + \frac{\partial\vartheta}{\partial z} \partial\vartheta + \frac{\partial z}{\partial z} \partial z = -\frac{az}{b\sqrt{b^2 + z^2}} \partial f + \partial z$$

e

$$dx = \frac{\partial x}{\partial f} df + \frac{\partial x}{\partial\vartheta} d\vartheta + \frac{\partial x}{\partial z} dz = \cos\vartheta df - \left(f + \frac{a}{b}\sqrt{b^2 + z^2}\right) \sin\vartheta d\vartheta + \frac{az}{b\sqrt{b^2 + z^2}} \cos\vartheta dz$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial f} df + \frac{\partial y}{\partial\vartheta} d\vartheta + \frac{\partial y}{\partial z} dz = \sin\vartheta df + \left(f + \frac{a}{b}\sqrt{b^2 + z^2}\right) \cos\vartheta d\vartheta + \frac{az}{b\sqrt{b^2 + z^2}} \sin\vartheta dz$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial f} df + \frac{\partial z}{\partial\vartheta} d\vartheta + \frac{\partial z}{\partial z} dz = dz.$$

In coordinate cilindrico - iperboliche, l'espressione in coordinate di un campo vettoriale è

$$X = X^f \partial f + X^\vartheta \partial\vartheta + X^z \partial z.$$

DIMOSTRAZIONE. Conviene calcolare le espressioni di $(\partial f, \partial\vartheta, \partial z)$ e (dx, dy, dz) usando le derivate delle funzioni (x, y, z) rispetto alle funzioni (f, ϑ, z) .

Conviene, invece, calcolare le espressioni di (e_1, e_2, e_3) e $(df, d\vartheta, dz)$ invertendo la matrice Jacobiana precedentemente calcolata. *QED*

2.2 Metrica riemanniana

Proposizione 2.2 L'espressione della metrica covariante nel sistema di coordinate cilindrico - iperbolico è

$$g = df \otimes df + \left(f + \frac{a}{b}\sqrt{b^2 + z^2}\right)^2 d\vartheta \otimes d\vartheta + \frac{az}{b\sqrt{b^2 + z^2}} (df \otimes dz + dz \otimes df) + \left[1 + \frac{a^2 z^2}{b^2(b^2 + z^2)}\right] dz \otimes dz. \quad (2.3)$$

Ovvero, in forma matriciale

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} g_{ff} & g_{f\vartheta} & g_{fz} \\ g_{\vartheta f} & g_{\vartheta\vartheta} & g_{\vartheta z} \\ g_{zf} & g_{z\vartheta} & g_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{az}{b\sqrt{b^2+z^2}} \\ 0 & \left(f + \frac{a}{b}\sqrt{b^2+z^2}\right)^2 & 0 \\ \frac{az}{b\sqrt{b^2+z^2}} & 0 & 1 + \frac{a^2z^2}{b^2(b^2+z^2)} \end{pmatrix}.$$

L'espressione della metrica controvariante nel sistema di coordinate cilindrico - iperbolico è

$$\begin{aligned} \bar{g} = & \left[1 + \frac{a^2z^2}{b^2(b^2+z^2)} \right] \partial f \otimes \partial f - \frac{az}{b\sqrt{b^2+z^2}} (\partial f \otimes \partial z + \partial z \otimes \partial f) \\ & + \frac{1}{\left(f + \frac{a}{b}\sqrt{b^2+z^2}\right)^2} \partial\vartheta \otimes \partial\vartheta + \partial z \otimes \partial z. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Ovvero, in forma matriciale

$$g^{ij} = \begin{pmatrix} g^{ff} & g^{f\vartheta} & g^{fz} \\ g^{\vartheta f} & g^{\vartheta\vartheta} & g^{\vartheta z} \\ g^{zf} & g^{z\vartheta} & g^{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{a^2z^2}{b^2(b^2+z^2)} & 0 & -\frac{az}{b\sqrt{b^2+z^2}} \\ 0 & \frac{1}{\left(f + \frac{a}{b}\sqrt{b^2+z^2}\right)^2} & 0 \\ -\frac{az}{b\sqrt{b^2+z^2}} & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

L'espressione della funzione metrica nel sistema di coordinate cilindrico - iperbolico è

$$G = \frac{1}{2} \left[\dot{f}^2 + 2 \frac{az}{b\sqrt{b^2+z^2}} \dot{f}\dot{z} + \left(f + \frac{a}{b}\sqrt{b^2+z^2}\right)^2 \dot{\vartheta}^2 + \left(1 + \frac{a^2z^2}{b^2(b^2+z^2)}\right) \dot{z}^2 \right]. \quad (2.5)$$

DIMOSTRAZIONE. Conviene calcolare la metrica covariante e la funzione metrica in coordinate cilindrico - iperboliche, a partire dalle loro espressioni in coordinate cilindriche.

In un sistema di coordinate cilindriche, l'espressioni della metrica covariante e della funzione metrica sono, rispettivamente,

$$g = d\rho \otimes d\rho + \rho^2 d\vartheta \otimes d\vartheta + dz \otimes dz$$

e

$$G = \frac{1}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\vartheta}^2 + \dot{z}^2).$$

Considerando la formula di transizione

$$\rho = f + \frac{a}{b}\sqrt{b^2+z^2}$$

si ottengono le espressioni (2.3) e (2.5).

Infine, la metrica controvariante si può calcolare con la relazione

$$(g^{ij}) = (g_{hk})^{-1}. \text{QED}$$

2.3 Connessione riemanniana

In questo paragrafo si mostra che, in uno spazio euclideo, la connessione riemanniana coincide con il differenziale standard dei campi vettoriali e si calcolano i coefficienti della connessione ∇ , in coordinate cilindrico - iperboliche, utilizzando le formule di Lagrange. Infine, si mostra che il tensore di curvatura riemanniana di uno spazio euclideo è nullo.

Proposizione 2.3 In uno spazio euclideo, la derivata covariante riemanniana ∇ coincide con il differenziale standard D indotto dalla struttura affine.

DIMOSTRAZIONE. Infatti, D soddisfa tutte le proprietà della connessione riemanniana (vedi [4]). *QED*

Proposizione 2.4 In un sistema di coordinate cilindrico - iperbolico i coefficienti di ∇ non nulli sono

$$\begin{aligned} \Gamma_{\vartheta}^f{}_{\vartheta} &= -\left(f + \frac{a}{b}\sqrt{b^2 + z^2}\right) & \Gamma_z^f{}_z &= \frac{ab}{(b^2 + z^2)^{3/2}} \\ \Gamma_f{}^{\vartheta}{}_{\vartheta} &= \Gamma_{\vartheta}{}^{\vartheta}{}_f = \frac{1}{f + \frac{a}{b}\sqrt{b^2 + z^2}} & \Gamma_{\vartheta}{}^{\vartheta}{}_z &= \Gamma_z{}^{\vartheta}{}_{\vartheta} = \frac{az}{b\sqrt{b^2 + z^2}\left(f + \frac{a}{b}\sqrt{b^2 + z^2}\right)} \end{aligned} \quad (2.6)$$

DIMOSTRAZIONE. La curvatura covariante di una curva $c : \mathbb{R} \rightarrow E$ è data, in coordinate cilindriche - iperboliche, da⁴

$$\begin{aligned} g^b(\nabla dc) &= \left(D\left(\frac{\partial G}{\partial f} \circ dc\right) - \left(\frac{\partial G}{\partial f} \circ dc\right)\right)(df \circ c) + \left(D\left(\frac{\partial G}{\partial \vartheta} \circ dc\right) - \left(\frac{\partial G}{\partial \vartheta} \circ dc\right)\right)(d\vartheta \circ c) + \\ &\quad + \left(D\left(\frac{\partial G}{\partial z} \circ dc\right) - \left(\frac{\partial G}{\partial z} \circ dc\right)\right)(dz \circ c) = \\ &= \left[D^2 c^f + \frac{ac^z}{b\sqrt{b^2 + (c^z)^2}} D^2 c^z + \frac{ab}{(b^2 + (c^z)^2)^{3/2}} (Dc^z)^2 - \left(c^f + \frac{a}{b}\sqrt{b^2 + (c^z)^2}\right) (Dc^\vartheta)^2\right](df \circ c) \\ &+ \left[\left(c^f + \frac{a}{b}\sqrt{b^2 + (c^z)^2}\right)^2 D^2 c^\vartheta + 2\left(c^f + \frac{a}{b}\sqrt{b^2 + (c^z)^2}\right) Dc^f Dc^\vartheta + 2\left(\frac{ac^f c^z}{b\sqrt{b^2 + (c^z)^2}} + \frac{a^2 c^z}{b^2}\right) Dc^z Dc^\vartheta\right](d\vartheta \circ c) \\ &+ \left[\frac{a^2 c^z}{(b^2 + (c^z)^2)^2} (Dc^z)^2 + \frac{ac^z}{b\sqrt{b^2 + (c^z)^2}} D^2 c^f + \left(1 + \frac{a^2 (c^z)^2}{b^2 (b^2 + (c^z)^2)}\right) D^2 c^z \right. \\ &\quad \left. - \left(c^f + \frac{a}{b}\sqrt{b^2 + (c^z)^2}\right) \left(\frac{ac^z}{b\sqrt{b^2 + (c^z)^2}}\right) (Dc^\vartheta)^2\right](dz \circ c) \end{aligned}$$

da cui, applicando $g^\#$, si ottiene la curvatura controvariante di c :

$$\begin{aligned} \nabla dc &= \left[D^2 c^f + \frac{ab}{(b^2 + (c^z)^2)^{3/2}} (Dc^z)^2 - \left(c^f + \frac{a}{b}\sqrt{b^2 + (c^z)^2}\right) (Dc^\vartheta)^2\right](df \circ c) \\ &+ \left[D^2 c^\vartheta + \frac{2}{c^f + \frac{a}{b}\sqrt{b^2 + (c^z)^2}} Dc^f Dc^\vartheta + \frac{2ac^z}{b\sqrt{b^2 + (c^z)^2}\left(c^f + \frac{a}{b}\sqrt{b^2 + (c^z)^2}\right)} Dc^\vartheta Dc^z\right](d\vartheta \circ c) + D^2 c^z (dz \circ c). \end{aligned}$$

⁴ Nel proseguo, a seconda dell'occorrenza, si farà uso degli isomorfismi indotti dalla metrica (vedi [3] e [4]):

$$g^b : TM \rightarrow T^*M, \quad g^\# : T^*M \rightarrow TM.$$

Infine, utilizzando la relazione

$$\begin{aligned} \nabla dc &= (D^2c^f + (\Gamma_h^f \circ c)Dc^hDc^k)(\partial f \circ c) + (D^2c^\vartheta + (\Gamma_h^\vartheta \circ c)Dc^hDc^k)(\partial\vartheta \circ c) \\ &+ (D^2c^z + (\Gamma_h^z \circ c)Dc^hDc^k)(\partial z \circ c) \end{aligned}$$

possono essere estratti i simboli di Christoffel. *QED*

Proposizione 2.5 In uno spazio euclideo, il tensore di curvatura riemanniana è nullo:

$$R = 0.$$

DIMOSTRAZIONE. In un sistema di riferimento cartesiano i coefficienti della connessione sono nulli. Quindi, la natura tensoriale di R impone che sia nullo in qualsiasi sistema di riferimento. *QED*

Osservazione 2.2 I coefficienti della connessione ∇ nel sistema di riferimento curvilineo cilindrico - iperbolico, sono diversi da zero in quanto non sono le componenti di un tensore. \square

CAPITOLO 3

IPERBOLOIDE IPERBOLICO DI ROTAZIONE

Il presente capitolo è dedicato allo studio della geometria dell'iperboloide iperbolico di rotazione.

Definito il sistema di coordinate adattato (f, ϑ, z) , l'iperboloide è definito come una sottovarietà Q dello spazio ambiente, caratterizzata localmente dall'annullarsi della funzione vincolare f . Pertanto, Q è descritto da un sistema di coordinate indotto sulla sottovarietà, caratterizzato dalla restrizione delle funzioni lagrangiane (ϑ, z) dello spazio ambiente, alla sottovarietà.

I riflessi sulla struttura metrica dello spazio ambiente indotti dal sistema di coordinate adattato (f, ϑ, z) sono stati esaminati nel capitolo precedente.

Nel presente capitolo si procede calcolando, in primo luogo, la metrica riemanniana indotta su Q , anche detta prima forma fondamentale di Q . Tale oggetto è legato alle proprietà intrinseche della sottovarietà, proprietà che non dipendono dal modo in cui Q è immersa nello spazio ambiente. Pertanto, tutte le quantità che da essa discendono sono proprietà intrinseche dell'ipersuperficie.

Successivamente si calcola il campo vettoriale normale unitario su Q e gli oggetti ad esso associati: il tensore di Weingarten di Q e la seconda forma fondamentale di Q . La seconda forma fondamentale, invece, è una grandezza legata alle caratteristiche estrinseche della sottovarietà, in quanto correlata al campo vettoriale normale unitario e quindi allo spazio ambiente. Da tali risultati si ricavano due quantità molto importanti nella teoria delle superfici: la curvatura di Gauss e la curvatura media.

Un ulteriore passo è il calcolo della connessione riemanniana indotta su Q generata dalla prima forma fondamentale e degli invarianti che produce, ovvero il tensore di curvatura riemanniana, il tensore di Ricci e la curvatura scalare. Infine, si mostra il legame tra la curvatura di Gauss e le proprietà intrinseche dell'ipersuperficie.

Per una trattazione degli argomenti, qui sommariamente accennati allo scopo di evidenziare l'iter seguito nella risoluzione dell'esercizio, si rimanda a [4].

3.1 Sistema di coordinate indotto

L'iperboloide iperbolico di rotazione Q è definito come il sottoinsieme

$$j : Q \hookrightarrow E$$

localmente caratterizzato dal vincolo $f = 0$, ovvero $\rho = (a/b)\sqrt{b^2 + z^2}$. Pertanto, dal sistema di coordinate adattato (f, ϑ, z) , che descrive lo spazio ambiente, si ottiene il sistema di coordinate lagrangiano indotto

$$(\vartheta^\dagger, z^\dagger) = (\vartheta|_Q, z|_Q) : Q \rightarrow ((0, 2\pi), (-\infty, \infty)) \subset \mathbb{R}^2,$$

che descrive la sottovarietà Q .

In generale, il simbolo “ \dagger ” sarà riservato ad indicare oggetti che “vivono” su Q e le componenti saranno scritte usando apici e pedici, che vanno da ϑ^\dagger a z^\dagger , in lettere greche. Gli indici latini, invece, denoteranno le componenti di quantità che sono applicate su Q ma “vivono” fuori da Q .

Per non appesantire troppo la notazione, quando la loro distinzione sarà evidente dal contesto, si indicheranno con gli stessi simboli sia le funzioni (ϑ, z) definite nello spazio ambiente, che le loro restrizioni alla sottovarietà.

3.2 Prima forma fondamentale

La metrica riemanniana dello spazio ambiente induce una metrica su Q detta prima forma fondamentale.

Proposizione 3.1 L'espressione della metrica covariante indotta su Q è

$$g^\dagger = \frac{a^2}{b^2} (b^2 + z^2) d\vartheta \otimes d\vartheta + \left[1 + \frac{a^2 z^2}{b^2 (b^2 + z^2)} \right] dz \otimes dz. \quad (3.1)$$

Ovvero, in forma matriciale

$$(g^\dagger_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} g^{\vartheta\vartheta} & g^{\vartheta z} \\ g_{z\vartheta} & g_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a^2}{b^2} (b^2 + z^2) & 0 \\ 0 & 1 + \frac{a^2 z^2}{b^2 (b^2 + z^2)} \end{pmatrix}.$$

L'espressione della metrica controvariante indotta su Q è

$$\bar{g}^\dagger = \frac{b^2}{a^2 (b^2 + z^2)} \partial\vartheta \otimes \partial\vartheta + \frac{b^2 (b^2 + z^2)}{a^2 z^2 + b^2 (b^2 + z^2)} \partial z \otimes \partial z. \quad (3.2)$$

Ovvero, in forma matriciale

$$(g^{\dagger\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} g^{\vartheta\vartheta} & g^{\vartheta z} \\ g^{z\vartheta} & g^{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{b^2}{a^2 (b^2 + z^2)} & 0 \\ 0 & \frac{b^2 (b^2 + z^2)}{a^2 z^2 + b^2 (b^2 + z^2)} \end{pmatrix}.$$

L'espressione della funzione metrica indotta su Q è

$$G^\dagger = \frac{1}{2} \left[\frac{a^2}{b^2} (b^2 + z^2) \dot{\vartheta}^2 + \left(1 + \frac{a^2 z^2}{b^2 (b^2 + z^2)} \right) \dot{z}^2 \right]. \quad (3.3)$$

DIMOSTRAZIONE. Segue dalla proposizione 2.2. Infatti, la matrice $(g^\dagger_{\alpha\beta})$ di g^\dagger , si ottiene eliminando la prima riga e la prima colonna dalla matrice $(g_{ij} \circ j)$, quest'ultima fornita dall'espressione matriciale della metrica (2.3) per $f = 0$; analogamente la funzione metrica indotta è la (2.5) per $f = 0$.

Infine, la metrica controvariante indotta si ricava dalla relazione

$$(g^{\dagger\alpha\beta}) = (g^{\dagger}_{\gamma\delta})^{-1}. QED$$

La metrica indotta su Q genera la forma volume. Si ha quindi la seguente

Proposizione 3.2 La forma volume indotta dalla metrica g^{\dagger} e dall'orientazione indotta dal sistema di coordinate scelto è

$$\eta^{\dagger} = \frac{\alpha\sqrt{a^2z^{\dagger 2} + b^2(b^2 + z^{\dagger 2})}}{b^2} d\vartheta^{\dagger} \wedge dz^{\dagger}. \quad (3.4)$$

DIMOSTRAZIONE. L'espressione in coordinate della forma volume è

$$\eta^{\dagger} = \sqrt{\det(g^{\dagger}_{\alpha\beta})} d\vartheta^{\dagger} \wedge dz^{\dagger}. QED$$

3.3 Curvatura estrinseca

Si calcola il campo vettoriale normale unitario su Q , noto il quale si possono calcolare le espressioni del tensore di Weingarten di Q e della seconda forma fondamentale di Q . Da tali quantità si ricavano le curvature principali, la curvatura di Gauss e la curvatura media. In questo contesto, si dimostra che l'iperboloide è una superficie rigata, risultato già ottenuto per altra via nel Capitolo 1 (proposizione 1.2). Si mostra, inoltre, che l'iperboloide è una superficie non sviluppabile.

Proposizione 3.3. Il campo vettoriale normale unitario esiste globalmente ed ha espressione:

$$n = \sqrt{\frac{a^2z^2 + b^2(b^2 + z^2)}{b^2(b^2 + z^2)}} \partial f - \frac{az}{\sqrt{a^2z^2 + b^2(b^2 + z^2)}} \partial z. \quad (3.5)$$

DIMOSTRAZIONE. Se $\dim Q = 2$ si può calcolare n attraverso il prodotto vettoriale, ovvero con la relazione

$$n = \frac{\partial \vartheta \times \partial z}{\|\partial \vartheta \times \partial z\|}$$

Tuttavia, avendo già calcolato la metrica dello spazio ambiente e la metrica indotta su Q , è conveniente utilizzare la relazione di validità generale

$$\underline{n} = i(\eta^{\dagger})\underline{\eta}$$

che sfrutta la contrazione nel senso delle forme esterne, definita via prodotto interno. Da tale relazione, essendo

$$\eta^{\dagger} = \left(1/\sqrt{\det(g^{\dagger}_{\alpha\beta})}\right) \partial \vartheta^{\dagger} \wedge \partial z^{\dagger} \quad e \quad \underline{\eta} = \sqrt{\det(g_{ij} \circ j)} d\vartheta \wedge dz \wedge df,$$

si ottiene

$$\underline{n} = \left(\sqrt{\det(g_{ij} \circ j)} / \sqrt{\det(g_{\alpha\beta}^{\dagger})}\right) df.$$

Dalla quale, applicando $g^{\#}$, si deduce la relazione cercata:

$$n = g^\#(\underline{n}) = \frac{\sqrt{\det(g_{ij} \circ j)}}{\sqrt{\det(g_{\alpha\beta}^\dagger)}} (g^{fi} \circ j) \partial i.$$

L'espressione di $(g_{ij} \circ j)$ e le quantità $(g^{fi} \circ j)$ si ricavano, rispettivamente, dalla (2.3) e (2.4) per $f = 0$, note le quali, utilizzando la relazione precedente si ottiene la (3.5). QED

Osservazione 3.1 Dalla (3.5), per $b \rightarrow \infty$, si ricava l'espressione di n relativa ad un cilindro con asse coincidente con e_3 (vedi osservazione 2.1). Si ha infatti

$$\lim_{b \rightarrow \infty} n^f = 1 \quad e \quad \lim_{b \rightarrow \infty} n^z = 0$$

da cui discende

$$n = \partial f = \cos \vartheta e_1 + \sin \vartheta e_2 = \partial \rho. \square$$

Proposizione 3.4 Le espressioni del tensore di Weingarten e della seconda forma fondamentale di Q sono

$$L = \frac{b^2}{a\sqrt{a^2z^2 + b^2(b^2 + z^2)}} d\vartheta \otimes \partial\vartheta - \frac{ab^4}{[a^2z^2 + b^2(b^2 + z^2)]^{3/2}} dz \otimes \partial z \quad (3.6)$$

e

$$\underline{L} = \frac{a(b^2 + z^2)}{\sqrt{a^2z^2 + b^2(b^2 + z^2)}} d\vartheta \otimes d\vartheta - \frac{ab^2}{(b^2 + z^2)\sqrt{a^2z^2 + b^2(b^2 + z^2)}} dz \otimes dz. \quad (3.7)$$

DIMOSTRAZIONE. Dalla definizione del tensore di Weingarten si ricava

$$L = \nabla_{\parallel} n = (\partial_\alpha n^\beta + (\Gamma_\alpha^\beta \circ j) n^i) d\alpha \otimes \partial\beta \quad \text{per } \alpha = \vartheta, z; \beta = \vartheta, z; i = f, \vartheta, z$$

dove i coefficienti $(\Gamma_\alpha^\beta \circ j)$ sono forniti dalle (2.6) per $f = 0$. Calcolato L con la relazione precedente, la seconda forma fondamentale si può calcolare attraverso l'isomorfismo associato alla metrica indotta $g^{\dagger b}$, ovvero

$$\underline{L} = g^{\dagger b}(L). \text{ QED}$$

Corollario 3.1 Le curvature principali di Q sono

$$\lambda_1 = -\frac{ab^4}{[a^2z^2 + b^2(b^2 + z^2)]^{3/2}}$$

e

$$\lambda_2 = \frac{b^2}{a\sqrt{a^2z^2 + b^2(b^2 + z^2)}}.$$

DIMOSTRAZIONE. Le curvature principali di Q sono gli autovalori di L , le cui espressioni si ricavano risolvendo il polinomio caratteristico

$$\det(L - \lambda I) = 0. \text{ QED}$$

Corollario 3.2 La curvatura totale (curvatura di Gauss) e la curvatura media dell'iperboloide iperbolico di rotazione sono

$$K = -\frac{b^6}{[a^2 z^2 + b^2(b^2 + z^2)]^2} \quad (3.8)$$

e

$$H = \frac{b^4(b^2 + z^2) + b^2 a^2(z^2 - b^2)}{a[a^2 z^2 + b^2(b^2 + z^2)]^{3/2}}. \quad (3.9)$$

DIMOSTRAZIONE. Si ricavano immediatamente dalle definizioni di K e H :

$$K := \det L \quad e \quad H := \text{tr } L. \quad QED$$

Nota 3.1 Valgono anche le uguaglianze

$$K = \det L = \lambda_1 \lambda_2 \quad e \quad H = \text{tr } L = \lambda_1 + \lambda_2. \quad \square$$

Osservazione 3.2 Tutti i punti di Q sono iperbolici. Infatti, per ogni punto $p \in Q$ si ha $K < 0$, ovvero per ogni punto $p \in Q$ le curvatures principali sono di segno diverso. Geometricamente, tale circostanza implica che la superficie interseca sempre il piano tangente comunque piccolo si scelga l'intorno del punto in questione.

La curvatura di Gauss e la curvatura media non dipendono da ϑ , coerentemente con il fatto che Q è una superficie di rotazione. Pertanto, è possibile mappare le curvatures in funzione di z ed al variare dei parametri reali a e b che caratterizzano la forma dell'iperboloide. Per la curvatura Gaussiana, due esempi sono riportati in FIGURA 3.1 e 3.2.

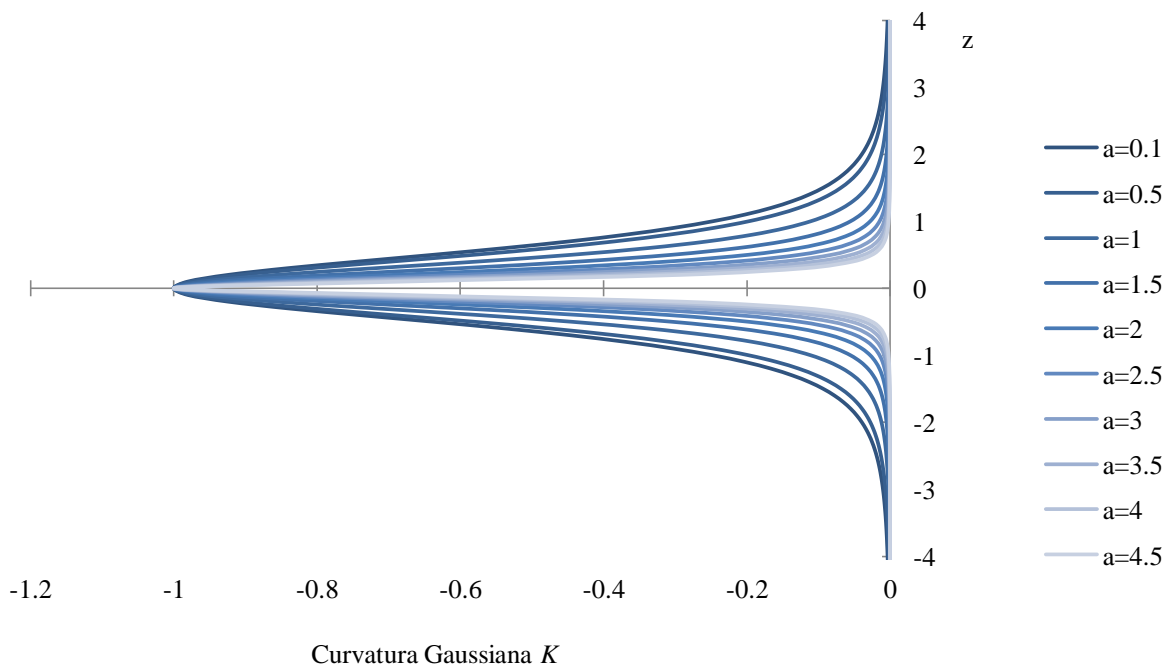


FIGURA 3.1 Curvatura gaussiana per l'iperboloide $(x^2 + y^2)/a^2 - z^2 - 1 = 0$ al variare del parametro reale a .

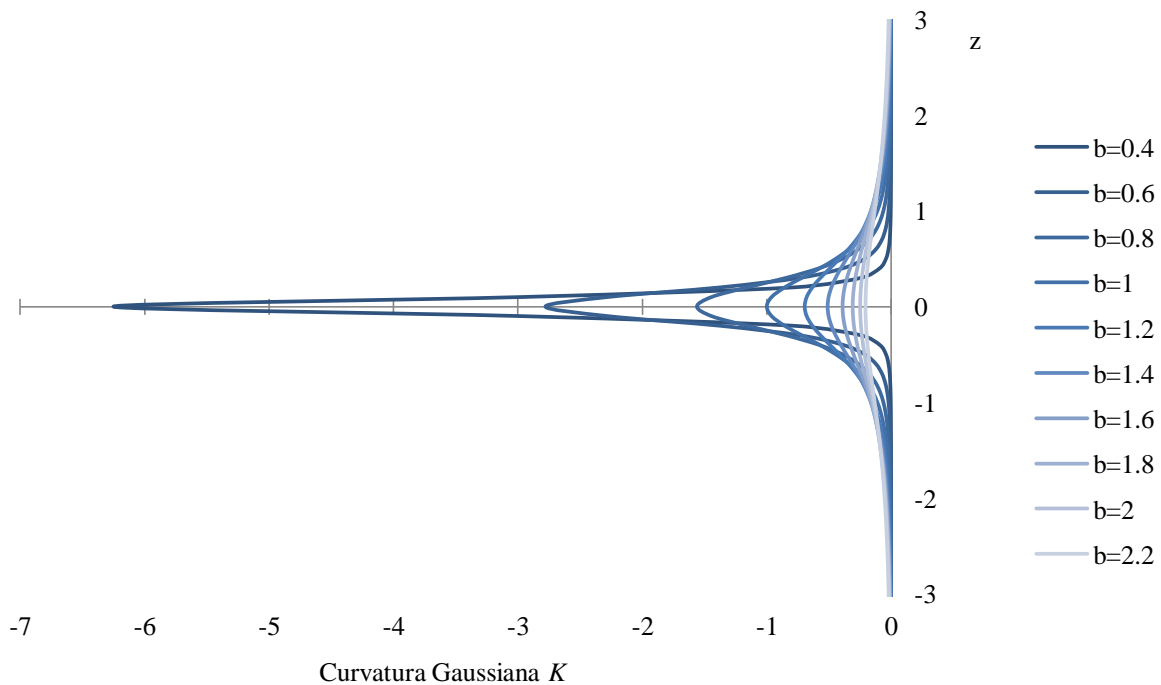


FIGURA 3.2 Curvatura gaussiana per l'iperboloide $x^2 + y^2 - (z^2/b^2) - 1 = 0$ al variare del parametro reale b .

In generale, la curvatura gaussiana è massima nella circonferenza di gola e tende rapidamente a 0 allontanandosi da questa. Inoltre, il valore che assume nella circonferenza di gola è indipendente dal parametro reale a . □

Osservazione 3.3 Dalle (3.8) e (3.9), per $b \rightarrow \infty$, si ricavano la curvatura di Gauss e la curvatura media di un cilindro con asse coincidente con e_3 e raggio a (vedi osservazione 2.1). Si ha infatti

$$\lim_{b \rightarrow \infty} K = 0$$

e

$$\lim_{b \rightarrow \infty} H = \frac{1}{a}.$$

Per la curvatura Gaussiana, tale aspetto è qualitativamente mostrato in FIGURA 3.2. □

Corollario 3.3 L'iperboloide iperbolico di rotazione è una superficie rigata e non sviluppabile.

DIMOSTRAZIONE. Infatti, è possibile dimostrare (vedi [4]) che un'ipersuperficie Q è una superficie rigata se per ogni punto $p \in Q$ si ha $K \leq 0$, mentre è sviluppabile se per ogni punto $p \in Q$ si ha $K = 0$. QED

3.4 Connessione riemanniana indotta

La metrica riemanniana g^\dagger , indotta su Q , genera in modo naturale una connessione riemanniana ∇^\dagger sulla sottovarietà Q . In analogia con la procedura di calcolo utilizzata per il computo dei coefficienti di ∇ (vedi 2.3), si calcolano i coefficienti di ∇^\dagger attraverso la scrittura delle formule di Lagrange associate

alla funzione metrica indotta G^\dagger . Noti tali coefficienti, si calcolano il tensore di curvatura riemanniana, il tensore di Ricci e la curvatura scalare associati a ∇^\dagger .

Proposizione 3.5 I coefficienti di ∇^\dagger non nulli sono

$$\begin{aligned} \Gamma_{\vartheta z}^{\dagger \vartheta} = \Gamma_{z \vartheta}^{\dagger \vartheta} &= \frac{z}{b^2 + z^2} & \Gamma_{\vartheta z}^{\dagger z} &= -\frac{a^2 z (b^2 + z^2)}{a^2 z^2 + b^2 (b^2 + z^2)} \\ \Gamma_{z z}^{\dagger z} &= \frac{a^2 b^2 z}{[a^2 z^2 + b^2 (b^2 + z^2)](b^2 + z^2)} \end{aligned} \quad (3.10)$$

DIMOSTRAZIONE. La curvatura covariante di una curva $c : \mathbb{R} \rightarrow Q$ ha espressione

$$\begin{aligned} g^{\flat \dagger}(\nabla^\dagger dc) &= \left(D \left(\frac{\partial G^\dagger}{\partial \vartheta} \circ dc \right) - \left(\frac{\partial G^\dagger}{\partial \vartheta} \circ dc \right) \right) (d\vartheta \circ c) + \left(D \left(\frac{\partial G^\dagger}{\partial z} \circ dc \right) - \left(\frac{\partial G^\dagger}{\partial z} \circ dc \right) \right) (dz \circ c) = \\ &= \left[\frac{a^2 (b^2 + (c^z)^2)}{b^2} D^2 c^\vartheta + 2 \frac{a^2 c^z}{b^2} D c^z D c^\vartheta \right] (d\vartheta \circ c) + \\ &+ \left[\frac{a^2 c^z}{(b^2 + (c^z)^2)^2} (D c^z)^2 + \left(1 + \frac{a^2 (c^z)^2}{b^2 (b^2 + (c^z)^2)} \right) D^2 c^z - \frac{a^2 c^z}{b^2} (D c^\vartheta)^2 \right] (dz \circ c) \end{aligned}$$

da cui, applicando $g^{\sharp \dagger}$, si ottiene la curvatura controvariante di c :

$$\begin{aligned} \nabla^\dagger dc &= \left[D^2 c^\vartheta + 2 \frac{c^z}{b^2 + (c^z)^2} D c^\vartheta D c^z \right] (\partial \vartheta \circ c) + \\ &+ \left[D^2 c^z + \frac{a^2 b^2 c^z}{[a^2 (c^z)^2 + b^2 (b^2 + (c^z)^2)](b^2 + (c^z)^2)} (D c^z)^2 - \frac{a^2 c^z (b^2 + (c^z)^2)}{a^2 (c^z)^2 + b^2 (b^2 + (c^z)^2)} (D c^\vartheta)^2 \right] (\partial z \circ c). \end{aligned}$$

Infine, utilizzando la relazione

$$\nabla^\dagger dc = (D^2 c^\vartheta + (\Gamma_{h k}^{\dagger \vartheta} \circ c) D c^h D c^k) (\partial \vartheta \circ c) + (D^2 c^z + (\Gamma_{h k}^{\dagger z} \circ c) D c^h D c^k) (\partial z \circ c)$$

possono essere estratti i simboli di Christoffel. *QED*

Osservazione 3.4 Dalle (3.10), per $b \rightarrow \infty$, si ricavano i coefficienti della connessione di un cilindro (vedi osservazione 2.1). Infatti, per $b \rightarrow \infty$, i simboli di Christoffel sono tutti nulli. \square

Proposizione 3.6 L'espressione in coordinate del tensore di curvatura riemanniana di ∇^\dagger è

$$\begin{aligned} R^\dagger &= -\frac{b^4}{[a^2 z^2 + b^2 (b^2 + z^2)](b^2 + z^2)} d\vartheta \otimes dz \otimes \partial \vartheta \otimes dz + \\ &- \frac{a^2 b^4 (b^2 + z^2)}{[a^2 z^2 + b^2 (b^2 + z^2)]^2} dz \otimes d\vartheta \otimes \partial z \otimes d\vartheta + \\ &+ \frac{b^4}{[a^2 z^2 + b^2 (b^2 + z^2)](b^2 + z^2)} dz \otimes d\vartheta \otimes \partial \vartheta \otimes dz + \\ &+ \frac{a^2 b^4 (b^2 + z^2)}{[a^2 z^2 + b^2 (b^2 + z^2)]^2} d\vartheta \otimes dz \otimes \partial z \otimes d\vartheta. \end{aligned} \quad (3.11)$$

DIMOSTRAZIONE. Tenendo conto dei coefficienti di ∇^\dagger , dall'espressione generale in coordinate del tensore di curvatura riemanniana, si ha

$$\begin{aligned}
 R^\dagger &= (\partial_\vartheta \Gamma_{z z}^\dagger{}^\vartheta - \Gamma_{\vartheta z}^\dagger{}^\alpha \Gamma_{z \alpha}^\dagger{}^\vartheta - \partial_z \Gamma_{\vartheta z}^\dagger{}^\vartheta + \Gamma_{z z}^\dagger{}^\alpha \Gamma_{\vartheta \alpha}^\dagger{}^\vartheta) d\vartheta \otimes dz \otimes \partial\vartheta \otimes dz + \\
 &+ (\partial_z \Gamma_{z z}^\dagger{}^\vartheta - \Gamma_{\vartheta \vartheta}^\dagger{}^\alpha \Gamma_{z \alpha}^\dagger{}^\vartheta - \partial_z \Gamma_{\vartheta \vartheta}^\dagger{}^\vartheta + \Gamma_{z \vartheta}^\dagger{}^\alpha \Gamma_{\vartheta \alpha}^\dagger{}^\vartheta) d\vartheta \otimes dz \otimes \partial z \otimes d\vartheta + \\
 &+ (\partial_z \Gamma_{\vartheta \vartheta}^\dagger{}^\vartheta - \Gamma_{z \vartheta}^\dagger{}^\alpha \Gamma_{\vartheta \alpha}^\dagger{}^\vartheta - \partial_\vartheta \Gamma_{z \vartheta}^\dagger{}^\vartheta + \Gamma_{\vartheta \vartheta}^\dagger{}^\alpha \Gamma_{z \alpha}^\dagger{}^\vartheta) dz \otimes d\vartheta \otimes \partial z \otimes d\vartheta + \\
 &+ (\partial_z \Gamma_{\vartheta \vartheta}^\dagger{}^\vartheta - \Gamma_{z z}^\dagger{}^\alpha \Gamma_{\vartheta \alpha}^\dagger{}^\vartheta - \partial_\vartheta \Gamma_{z z}^\dagger{}^\vartheta + \Gamma_{\vartheta z}^\dagger{}^\alpha \Gamma_{z \alpha}^\dagger{}^\vartheta) dz \otimes d\vartheta \otimes \partial\vartheta \otimes dz \\
 &= (\partial_\vartheta \Gamma_{z z}^\dagger{}^\vartheta - \Gamma_{\vartheta z}^\dagger{}^\alpha \Gamma_{z \alpha}^\dagger{}^\vartheta - \partial_z \Gamma_{\vartheta z}^\dagger{}^\vartheta + \Gamma_{z z}^\dagger{}^\alpha \Gamma_{\vartheta \alpha}^\dagger{}^\vartheta) d\vartheta \otimes dz \otimes \partial\vartheta \otimes dz + \\
 &- (\partial_\vartheta \Gamma_{z z}^\dagger{}^\vartheta - \Gamma_{\vartheta z}^\dagger{}^\alpha \Gamma_{z \alpha}^\dagger{}^\vartheta - \partial_z \Gamma_{\vartheta z}^\dagger{}^\vartheta + \Gamma_{z z}^\dagger{}^\alpha \Gamma_{\vartheta \alpha}^\dagger{}^\vartheta) dz \otimes d\vartheta \otimes \partial\vartheta \otimes dz + \\
 &- (\partial_z \Gamma_{\vartheta \vartheta}^\dagger{}^\vartheta - \Gamma_{z \vartheta}^\dagger{}^\alpha \Gamma_{\vartheta \alpha}^\dagger{}^\vartheta - \partial_\vartheta \Gamma_{z \vartheta}^\dagger{}^\vartheta + \Gamma_{\vartheta \vartheta}^\dagger{}^\alpha \Gamma_{z \alpha}^\dagger{}^\vartheta) d\vartheta \otimes dz \otimes \partial z \otimes d\vartheta + \\
 &+ (\partial_z \Gamma_{\vartheta \vartheta}^\dagger{}^\vartheta - \Gamma_{z \vartheta}^\dagger{}^\alpha \Gamma_{\vartheta \alpha}^\dagger{}^\vartheta - \partial_\vartheta \Gamma_{z \vartheta}^\dagger{}^\vartheta + \Gamma_{\vartheta \vartheta}^\dagger{}^\alpha \Gamma_{z \alpha}^\dagger{}^\vartheta) dz \otimes d\vartheta \otimes \partial z \otimes d\vartheta \\
 &= (-\Gamma_{\vartheta z}^\dagger{}^\alpha \Gamma_{z \alpha}^\dagger{}^\vartheta - \partial_z \Gamma_{\vartheta z}^\dagger{}^\vartheta + \Gamma_{z z}^\dagger{}^\alpha \Gamma_{\vartheta \alpha}^\dagger{}^\vartheta) d\vartheta \otimes dz \otimes \partial\vartheta \otimes dz + \\
 &- (-\Gamma_{\vartheta z}^\dagger{}^\alpha \Gamma_{z \alpha}^\dagger{}^\vartheta - \partial_z \Gamma_{\vartheta z}^\dagger{}^\vartheta + \Gamma_{z z}^\dagger{}^\alpha \Gamma_{\vartheta \alpha}^\dagger{}^\vartheta) dz \otimes d\vartheta \otimes \partial\vartheta \otimes dz + \\
 &- (\partial_z \Gamma_{\vartheta \vartheta}^\dagger{}^\vartheta - \Gamma_{z \vartheta}^\dagger{}^\alpha \Gamma_{\vartheta \alpha}^\dagger{}^\vartheta + \Gamma_{\vartheta \vartheta}^\dagger{}^\alpha \Gamma_{z \alpha}^\dagger{}^\vartheta) d\vartheta \otimes dz \otimes \partial z \otimes d\vartheta + \\
 &+ (\partial_z \Gamma_{\vartheta \vartheta}^\dagger{}^\vartheta - \Gamma_{z \vartheta}^\dagger{}^\alpha \Gamma_{\vartheta \alpha}^\dagger{}^\vartheta + \Gamma_{\vartheta \vartheta}^\dagger{}^\alpha \Gamma_{z \alpha}^\dagger{}^\vartheta) dz \otimes d\vartheta \otimes \partial z \otimes d\vartheta \\
 &= (-\Gamma_{\vartheta z}^\dagger{}^\alpha \Gamma_{z \alpha}^\dagger{}^\vartheta - \partial_z \Gamma_{\vartheta z}^\dagger{}^\vartheta + \Gamma_{z z}^\dagger{}^\alpha \Gamma_{\vartheta \alpha}^\dagger{}^\vartheta) d\vartheta \otimes dz \otimes \partial\vartheta \otimes dz + \\
 &- (-\Gamma_{\vartheta z}^\dagger{}^\alpha \Gamma_{z \alpha}^\dagger{}^\vartheta - \partial_z \Gamma_{\vartheta z}^\dagger{}^\vartheta + \Gamma_{z z}^\dagger{}^\alpha \Gamma_{\vartheta \alpha}^\dagger{}^\vartheta) dz \otimes d\vartheta \otimes \partial\vartheta \otimes dz + \\
 &- (\partial_z \Gamma_{\vartheta \vartheta}^\dagger{}^\vartheta - \Gamma_{z \vartheta}^\dagger{}^\alpha \Gamma_{\vartheta \alpha}^\dagger{}^\vartheta + \Gamma_{\vartheta \vartheta}^\dagger{}^\alpha \Gamma_{z \alpha}^\dagger{}^\vartheta) d\vartheta \otimes dz \otimes \partial z \otimes d\vartheta + \\
 &+ (\partial_z \Gamma_{\vartheta \vartheta}^\dagger{}^\vartheta - \Gamma_{z \vartheta}^\dagger{}^\alpha \Gamma_{\vartheta \alpha}^\dagger{}^\vartheta + \Gamma_{\vartheta \vartheta}^\dagger{}^\alpha \Gamma_{z \alpha}^\dagger{}^\vartheta) dz \otimes d\vartheta \otimes \partial z \otimes d\vartheta,
 \end{aligned}$$

da cui si ricava l'espressione (3.11). QED

Corollario 3.3 L'espressione in coordinate del tensore di Ricci di ∇^\dagger è

$$\underline{r}^\dagger = -\frac{a^2 b^4 (b^2 + z^2)}{[a^2 z^2 + b^2 (b^2 + z^2)]^2} d\vartheta \otimes d\vartheta - \frac{b^4}{(b^2 + z^2)[a^2 z^2 + b^2 (b^2 + z^2)]} dz \otimes dz. \quad (3.12)$$

DIMOSTRAZIONE. Segue dalla proposizione 3.6. Infatti, dall'espressione generale in coordinate del tensore di Ricci si ottiene

$$\underline{r}^\dagger = \underline{r}_{\alpha\beta}^\dagger d\alpha \otimes d\beta = R_{\gamma\alpha}^\dagger{}^\gamma{}_\beta d\alpha \otimes d\beta = R_{z\vartheta}^\dagger{}^z{}_\vartheta d\vartheta \otimes d\vartheta + R_{\vartheta z}^\dagger{}^\vartheta{}_z dz \otimes dz$$

da cui si ricava la (3.12). QED

Corollario 3.4 La curvatura scalare riemanniana di ∇^\dagger è

$$\langle \underline{r} \rangle^\dagger = -\frac{2b^6}{[a^2 z^2 + b^2 (b^2 + z^2)]^2}. \quad (3.13)$$

DIMOSTRAZIONE. Segue dalla proposizione 3.6. Infatti, tenendo conto di (3.2), dall'espressione generale in coordinate della curvatura scalare riemanniana si ottiene

$$\langle \underline{r} \rangle^\dagger = g^{\dagger\alpha\beta} R_{\gamma\alpha}^\dagger{}^\gamma{}_\beta = g^{\dagger\vartheta\vartheta} R_{z\vartheta}^\dagger{}^z{}_\vartheta + g^{\dagger zz} R_{\vartheta z}^\dagger{}^\vartheta{}_z$$

da cui si ricava la (3.13). QED

Corollario 3.5 L'espressione in coordinate del tensore di curvatura riemanniana covariante di ∇^\dagger è

$$\underline{R}^\dagger = -\frac{4a^2b^2}{a^2z^2 + b^2(b^2 + z^2)} d\vartheta \wedge dz \otimes d\vartheta \wedge dz. \quad (3.14)$$

DIMOSTRAZIONE. Infatti, se $\dim Q = 2$ è possibile dimostrare (vedi [4]) che vale la relazione per cui

$$\underline{R}^\dagger = 2\langle \underline{r} \rangle^\dagger \eta^\dagger \otimes \eta^\dagger.$$

Dalla quale, tenendo conto di (3.4), si ricava la (3.14). *QED*

3.5 Relazione tra la curvatura di Gauss e la curvatura riemanniana

Questo paragrafo ha l'obiettivo di mostrare la relazione tra la curvatura di Gauss e la curvatura riemanniana di Q . Pertanto, si introduce il seguente

Corollario 3.6 Vale la relazione:

$$\langle \underline{R}^\dagger, \eta^\dagger \otimes \eta^\dagger \rangle = \frac{1}{2} \langle \underline{r} \rangle^\dagger = -\frac{b^6}{[a^2z^2 + b^2(b^2 + z^2)]^2} = K \quad (3.15)$$

DIMOSTRAZIONE. Segue immediatamente dal teorema egregium di Gauss. *QED*

Osservazione 3.5 La curvatura riemanniana di Q è un invariante dedotto dalla connessione ∇^\dagger indotta dalla prima forma fondamentale. È quindi una proprietà intrinseca dell'ipersuperficie, misurabile rimanendo all'interno di essa, ovvero senza chiamare in causa lo spazio ambiente. La curvatura di Gauss è un invariante del tensore di Weingarten che, come visto, per la sua definizione chiama essenzialmente in causa l'immersione della sottovarietà nello spazio ambiente. Ciò nonostante, il teorema egregium di Gauss (vedi [4]) dimostra che la curvatura di Gauss è in realtà una proprietà intrinseca dell'ipersuperficie, in quanto dipende solamente dalla prima forma fondamentale. Il corollario 3.6, traduce tale osservazione generale al caso analizzato.

Invece, la curvatura media è una proprietà estrinseca dell'ipersuperficie, legata al modo in cui è immersa nello spazio ambiente.

Pertanto, il cilindro ha una geometria intrinseca "piatta", ovvero il cilindro e il piano sono localmente isometrici. Ciò è messo in evidenza dal fatto che, per il cilindro, la curvatura di Gauss è nulla mentre la curvatura media è diversa da zero (vedi osservazione 3.3): la geometria del cilindro è curva solo in relazione allo spazio ambiente in cui è immerso.

Tutto questo non avviene nell'iperboloide, in quanto tale superficie ed il piano non sono localmente isometrici. Infatti, la curvatura di Gauss di un iperboloide è diversa da zero. \square

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- [1] E. SERNESI. *Geometria I*, Bollati Boringhieri, Torino, 1989.
- [2] M. MODUGNO. *Meccanica di una particella vincolata*. <http://www.dma.unifi.it/~modugno/1-didattica/> (24 febbraio 2012).
- [3] M. MODUGNO. *Introduzione alla meccanica dei sistemi continui. Appunti per gli studenti*, <http://www.dma.unifi.it/~modugno/1-didattica/> (24 febbraio 2012).
- [4] M. MODUGNO. *Notes on geometry of surface. Notes for students*, <http://www.dma.unifi.it/~modugno/1-didattica/> (24 febbraio 2012).
- [5] NIKOLAJ V. EFIMOV. *Elementi di geometria analitica*, Editori Riuniti, Roma, 1975.