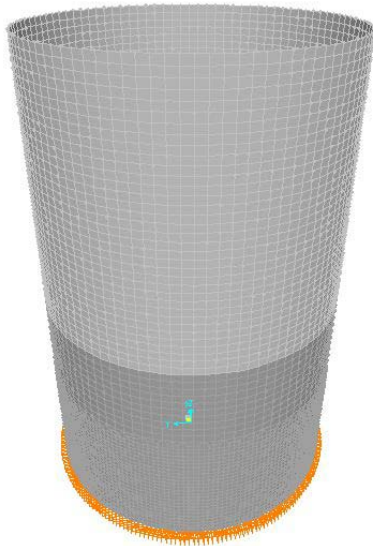


*Leonardo Pontiroli*  
*Giacomo Zoppi*

Applicazione della teoria dei gusci sottili

## Serbatoio cilindrico



Corso di Fisica Matematica  
Corso di laurea in ingegneria civile specialistica  
A.C. 2010/2011

Professore: Marco Modugno

# Indice

Introduzione .....	2
Capitolo 1 .....	3
1.1 Geometria dello spazio ambiente .....	3
1.1.1 Sistemi di coordinate .....	3
1.1.2 Metrica Riemanniana .....	3
1.1.3 Connessione Riemanniana .....	5
1.2 Geometria del cilindro .....	6
1.2.1 Metrica della sottovarietà .....	7
1.2.2 Curvatura estrinseca .....	7
1.2.3 Connessione Riemanniana .....	9
1.2.4 Curvatura Riemanniana .....	9
Capitolo 2 .....	11
2.1 Descrizione geometrica .....	11
2.2 Ipotesi generali .....	11
2.3 Cinematica del guscio .....	12
2.3.1 Spostamenti e deformazioni .....	12
2.3.2 Equilibrio .....	13
2.3.3 Equazioni costitutive .....	14
Capitolo 3 .....	15
3.1 Confronto analitico e numerico .....	15
3.2 Caratteristiche del serbatoio .....	15
3.3 Calcolo analitico .....	16
3.4 Calcolo numerico .....	18
3.5 Conclusioni .....	19
Bibliografia .....	21

## Introduzione

Il presente lavoro è volto allo studio dello stato tensionale e deformativo di un guscio cilindrico vincolato con appoggi scorrevoli alla base e soggetto ad una pressione di tipo esponenziale, generata da un materiale quale il clinker.

In prima istanza verrà studiata la geometria della superficie, considerata come una varietà immersa in uno spazio ambiente Euclideo.

Successivamente verrà analizzato il comportamento meccanico del cilindro, confrontando i risultati ottenuti con quelli estrapolati dal programma di calcolo agli elementi finiti SAP 2000 v.11.

# Capitolo 1

## GEOMETRIA

### 1.1 Geometria dello spazio ambiente

#### 1.1.1 Sistemi di coordinate

In questo capitolo faremo riferimento alla teoria esposta in “Notes on geometry of surfaces”, di Marco Modugno [2009].<sup>[1]</sup>

Consideriamo uno spazio euclideo  $E$  di dimensione 3, e definiamo sistema di coordinate cilindrico un sistema di coordinate del tipo:

$$(\rho, \phi, z) \equiv (x^1, x^2, x^3) : E \rightarrow \mathbb{R}^3$$

definito, con riferimento ad un sistema di coordinate cartesiano, dalle funzioni di transizione:

$$\begin{aligned}x &= \rho \cos \phi \\y &= \rho \sin \phi \\z &= z\end{aligned}$$

dove  $\rho$  e  $\phi$  sono rispettivamente la *distanza assiale* e la *Longitudine*.

Un'uguaglianza di transizione inversa risulta essere:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

#### 1.1.2 Metrica Riemanniana

Sapendo che:

$$dx^i = \sum_j \frac{\partial x^i}{\partial y^j} dy^j \quad (1.1)$$

$$\partial x_j = \sum_i \frac{\partial y^i}{\partial x^j} dy_i \quad (1.2)$$

le espressioni in coordinate cartesiane e cilindriche delle metriche covariante e contro variante sono:

$$\underline{g} = dx \otimes dx + dy \otimes dy + dz \otimes dz \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} &= (\cos\phi \, d\rho - \rho \sin\phi \, d\phi) \otimes (\cos\phi \, d\rho - \rho \sin\phi \, d\phi) + \\ &\quad + (\sin\phi \, d\rho + \rho \cos\phi \, d\phi) \otimes (\sin\phi \, d\rho + \rho \cos\phi \, d\phi) + \\ &\quad + dz \otimes dz \\ &= d\rho \otimes d\rho + \rho^2 d\phi \otimes d\phi + dz \otimes dz \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$g = \partial x \otimes \partial x + \partial y \otimes \partial y + \partial z \otimes \partial z \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned} &= \left( \frac{\partial \rho}{\sin\phi + \cos\phi} \right) \otimes \left( \frac{\partial \rho}{\sin\phi + \cos\phi} \right) + \\ &\quad + \left( \frac{\partial \phi}{\rho(\cos\phi - \sin\phi)} \right) \otimes \left( \frac{\partial \phi}{\rho(\cos\phi - \sin\phi)} \right) + \partial z \otimes \partial z \\ &= d\rho \otimes d\rho + \frac{1}{\rho^2} d\phi \otimes d\phi + dz \otimes dz \end{aligned} \quad (1.6)$$

In forma matriciale:

$$g_{hk} \equiv \begin{bmatrix} g_{xx} & g_{xy} & g_{xz} \\ g_{yx} & g_{yy} & g_{yz} \\ g_{zx} & g_{zy} & g_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

$$g_{ij} \equiv \begin{bmatrix} g_{\rho\rho} & g_{\rho\phi} & g_{\rho z} \\ g_{\phi\rho} & g_{\phi\phi} & g_{\phi z} \\ g_{z\rho} & g_{z\phi} & g_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

$$g^{hk} \equiv \begin{bmatrix} g^{xx} & g^{xy} & g^{xz} \\ g^{yx} & g^{yy} & g^{yz} \\ g^{zx} & g^{zy} & g^{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

$$g^{ij} \equiv \begin{bmatrix} g^{\rho\rho} & g^{\rho\phi} & g^{\rho z} \\ g^{\phi\rho} & g^{\phi\phi} & g^{\phi z} \\ g^{z\rho} & g^{z\phi} & g^{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

Le espressioni della funzione metrica  $G$  in componenti cartesiane e cilindriche sono:

$$G = \frac{1}{2} g_{hk} \dot{x}^h \dot{x}^k = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \quad (1.11)$$

$$= \frac{1}{2} g_{ij} \dot{y}^i \dot{y}^j = \frac{1}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) \quad (1.12)$$

In un sistema di coordinate cilindriche, le espressioni della forma volume sono:

$$\underline{\eta} = \sqrt{\det(g_{hk})} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = dx \wedge dy \wedge dz \quad (1.13)$$

$$= \sqrt{\det(g_{ij})} dy^1 \wedge dy^2 \wedge dy^3 = \rho d\rho \wedge d\phi \wedge dz \quad (1.14)$$

### 1.1.3 Connessione Riemanniana

Negli spazi Euclidei, la derivata covariante della connessione Riemanniana coincide con il differenziale standard dei campi vettoriali.

Tutti i simboli di Christoffel in coordinate cartesiane sono nulli. <sup>[1]</sup>

I coefficienti della connessione  $\nabla$ , in coordinate cilindriche, possono essere ricavati partendo dalle componenti dell'accelerazione in forma covariante (formula di Lagrange):

$$a_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial G}{\partial \dot{y}^i} - \frac{\partial G}{\partial y^i} \quad (1.15)$$

da cui:

$$a_\rho = \frac{d}{dt} \frac{\partial G}{\partial \dot{\rho}} - \frac{\partial G}{\partial \rho} = \ddot{\rho} - \rho \dot{\phi}^2 \quad (1.16)$$

$$a_\phi = \frac{d}{dt} \frac{\partial G}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial G}{\partial \phi} = \rho \ddot{\phi} \quad (1.17)$$

$$a_z = \frac{d}{dt} \frac{\partial G}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial G}{\partial z} = \ddot{z} \quad (1.18)$$

Le componenti dell'accelerazione in forma controvariante sono date dalla relazione:

$$a^i = g^{ij}a_j \quad (1.19)$$

da cui:

$$a^\rho = \ddot{\rho} - \rho \dot{\phi}^2 \quad (1.20)$$

$$a^\phi = \frac{1}{\rho} \ddot{\phi}^2 \quad (1.21)$$

$$a^z = \ddot{z} \quad (1.22)$$

In definitiva, i simboli di Christoffel in coordinate cilindriche non nulli sono:

$$\Gamma_{\phi\phi}^\rho = -\rho \quad (1.23)$$

$$\Gamma_{\phi\rho}^\phi = \Gamma_{\rho\phi}^\phi = \frac{1}{\rho} \quad (1.24)$$

## 1.2 Geometria del cilindro

Consideriamo il cilindro circolare  $C$ , sottovarietà dello spazio affine Euclideo  $E$ , avente per asse la retta  $(0, e_3) \subset E$  e raggio  $r > 0$ .

Scegliamo, poi, un sistema di coordinate adattato cilindrico:

$$X = (\rho, \phi, z): E \rightarrow \mathbb{R}^3$$

Il sistema di coordinate adattato  $X$  induce un sistema di coordinate superficiali  $X^\dagger$  per mezzo del vincolo  $\rho=r$ :

$$X^\dagger = (\phi^\dagger, z^\dagger): C \rightarrow \mathbb{R}^2$$

### 1.2.1 Metrica della sottovarietà

Le espressioni covariante e controvariante della metrica indotta sulla sottovarietà sono rispettivamente:

$$\underline{g}^\dagger = r^2 d\phi^\dagger \otimes d\phi^\dagger + dz^\dagger \otimes dz^\dagger \quad (1.25)$$

$$g^\dagger = \frac{1}{r^2} \partial\phi^\dagger \otimes \partial\phi^\dagger + \partial z^\dagger \otimes \partial z^\dagger \quad (1.26)$$

in forma matriciale:

$$(g_{ij})^\dagger \equiv \begin{bmatrix} g_{\phi\phi} & g_{\phi z} \\ g_{z\phi} & g_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.27)$$

$$(g^{ij})^\dagger \equiv \begin{bmatrix} g^{\phi\phi} & g^{z\phi} \\ g^{\phi z} & g^{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/r^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.28)$$

L'espressione in coordinate della funzione metrica è:

$$G^\dagger = \frac{1}{2} \left( r^2 \dot{\phi}^{\dagger 2} + \dot{z}^{\dagger 2} \right) \quad (1.29)$$

La forma volume indotta dalla metrica  $g^\dagger$  e dall'orientazione del sistema di coordinate lagrangiane scelto, ha espressione:

$$\eta^\dagger = r^2 d\phi^\dagger \wedge dz^\dagger \quad (1.30)$$

### 1.2.2 Curvatura estrinseca

Il campo vettoriale unitario normale su  $C$  è:

$$n = \partial\rho \quad (1.31)$$

Il  tensore di Weingarten  è, per definizione, il tensore  $(1,1)$ :

$$L := \nabla_{\parallel} n : TC \rightarrow TC : X \rightarrow \nabla_X n$$



Quindi, per il campo vettoriale appena definito, possiamo scrivere:

$$(L)_h^k = (\nabla \partial \rho)_h^k \quad (1.32)$$

La derivata covariante del vettore tangente ad una curva coordinata è esprimibile mediante i simboli di Christoffel.

Partendo dalla formula generale, otteniamo:

$$(\nabla \partial y_i) := \sum_{hk} \Gamma_{ik}^h dy^k \otimes \partial y_h \quad (1.33)$$

$$(\nabla \partial y_\rho) := \Gamma_{\rho\phi}^\phi dy^\phi \otimes \partial y_\phi \quad (1.34)$$

Quindi, il tensore di Weingarten risulta:

$$L = \frac{1}{r} d\phi^\dagger \otimes \partial\phi^\dagger \quad (1.35)$$

La seconda forma fondamentale di C è la forma bilineare associata ad L dalla metrica indotta  $g^\dagger$ :

$$\underline{L} = g^{\dagger b}(L) \quad (1.36)$$

Quindi, in coordinate:

$$\underline{L} = \frac{1}{r} g^\dagger = r(d\phi^\dagger \otimes d\phi^\dagger) \quad (1.37)$$

La curvatura media H e la curvatura totale risultano essere:

$$H = \text{tr } L = \frac{1}{r} \quad K = \det L = 0$$

Essendo, poi, il tensore di Gauss per definizione:

$$N = -\underline{L} \otimes n \quad (1.38)$$

si ottiene:

$$N = -r d\phi^\dagger \otimes d\phi^\dagger \otimes \partial\rho \quad (1.39)$$

### 1.2.3 Connessione Riemanniana

Tutti i coefficienti della connessione  $\nabla^\dagger$  sono nulli:

$$\Gamma_{ij}^\dagger = 0 \quad \text{con } i, j, h = \phi, z \quad (1.40)$$

### 1.2.4 Curvatura Riemanniana

Il tensore di curvatura Riemanniana di  $\nabla^\dagger$  ( $R^\dagger$ ) è nullo. Infatti l'espressione in coordinate del tensore di curvatura è:

$$\begin{aligned} R^\dagger &\equiv R_{ij}^h dx^i \otimes dx^j \otimes \partial x_h \otimes dx^k \\ &= (\partial_i \Gamma_{jk}^h - \Gamma_{ik}^l \Gamma_{jl}^h - \partial_j \Gamma_{ik}^h + \Gamma_{jk}^l \Gamma_{il}^h) dx^i \otimes dx^j \otimes \partial x_h \otimes dx^k \\ &= 2(\partial_i \Gamma_{jk}^h - \Gamma_{ik}^l \Gamma_{jl}^h) dx^i \wedge dx^j \otimes \partial x_h \otimes dx^k \end{aligned} \quad (1.41)$$

e valendo la (1.40), si ha:

$$R^\dagger = 0 \quad (1.42)$$

L'espressione in coordinate del tensore di Ricci è:

$$\begin{aligned} \underline{r}^\dagger &= \underline{r}_{ij} dx^i \otimes dx^j = R_{hi}^h dx^i \otimes dx^j \\ &= (\partial_h \Gamma_{ij}^h - \Gamma_{hj}^k \Gamma_{ik}^h - \partial_i \Gamma_{hj}^h + \Gamma_{ij}^k \Gamma_{hk}^h) dx^i \otimes dx^j \end{aligned} \quad (1.43)$$

e valendo la (1.40), otteniamo:

$$\underline{r}^\dagger = 0 \quad (1.44)$$

L'espressione in coordinate della curvatura scalare Riemanniana è:

$$\langle \underline{r} \rangle^\dagger = g^{ij} R_{ki j}^k \quad (1.45)$$

e valendo la (1.40), otteniamo:

$$\langle \underline{r} \rangle^\dagger = 0 \quad (1.46)$$

## Capitolo 2

# STUDIO MECCANICO DEL CILINDRO

In questo capitolo faremo riferimento alla teoria esposta in “A short introduction to linear shell theory”, di Enzo Marino [2009] <sup>[3]</sup>.

### 2.1 Descrizione geometrica

Consideriamo, ora, un serbatoio cilindrico costituito da un continuo  $C(\varepsilon)$  di spessore  $2\varepsilon$  modellato su una superficie  $C$  immersa nello spazio Euclideo  $E$ .

Il serbatoio è descritto per mezzo del sistema di coordinate:

$$\{x^\alpha, \xi\}: C(\varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3$$

Ciascuno punto  $p^*$  e  $C(\varepsilon)$  contenuto nello spessore del continuo è definito mediante la sua quota  $\xi$  e la sua proiezione ortogonale  $p \in C$ .

### 2.2 Ipotesi generali

#### Ipotesi costitutive

Supponiamo che il serbatoio cilindrico sia costituito da un materiale elastico, omogeneo, isotropo.

#### Approssimazioni geometriche

Supponiamo che lo spessore  $2\varepsilon$  del serbatoio cilindrico sia molto minore del raggio  $r$  e dell'altezza  $h$  (guscio sottile).

Ci limitiamo a studiare la statica per:

- piccole deformazioni e piccoli spostamenti;
- variazione trascurabile dello spessore  $2\varepsilon$  del serbatoio cilindrico;
- variazione trascurabile dell'ortogonalità delle fibre materiali rispetto alla superficie media (ipotesi di Kirchhoff-Love),
- variazione trascurabile dei punti materiali del serbatoio cilindrico dalla superficie media.

### Approssimazione lineare

Ci limitiamo a studiare la statica del problema nell'approssimazione lineare della teoria elastica.

## 2.3 Cinematica del guscio

### 2.3.1 Spostamenti e deformazioni

Per calcolare le componenti di sforzo membranale è necessaria la sola conoscenza delle componenti del tensore di deformazione estensionale  $\alpha$ , definito come:

$$\alpha_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\nabla_{\beta}^{\dagger} v_{\alpha} + \nabla_{\alpha}^{\dagger} v_{\beta} + 2L_{\alpha\beta} v^{\xi}) \quad (2.1)$$

Nel caso specifico del cilindro:

$$\begin{aligned} \alpha_{\phi\phi} &= \frac{1}{2} (\nabla_{\phi}^{\dagger} v_{\phi} + \nabla_{\phi}^{\dagger} v_{\phi} + 2L_{\phi\phi} v^{\xi}) \\ &= \nabla_{\phi}^{\dagger} v_{\phi} + L_{\phi\phi} v^{\xi} = (v_{\phi,\phi} + \Gamma_{\phi\omega}^{\phi} v^{\omega}) + r v^{\xi} = v_{\phi,\phi} + r v^{\xi} \end{aligned}$$

$$\alpha_{\phi z} = \frac{1}{2} (\nabla_z^{\dagger} v_{\phi} + \nabla_{\phi}^{\dagger} v_z + 2L_{\phi z} v^{\xi})$$

$$= \frac{1}{2} \left( v_{\phi,z} + \Gamma_{z\omega}^{\phi} v^{\omega} + v_{z,\phi} + \Gamma_{\phi\omega}^z v^{\omega} \right) = \frac{1}{2} (v_{\phi,z} + v_{z,\phi})$$

$$\begin{aligned} \alpha_{zz} &= \frac{1}{2} (\nabla_z^{\dagger} v_z + \nabla_z^{\dagger} v_z + 2L_{zz} v^{\xi}) \\ &= v_{z,z} + \Gamma_{z\omega}^z v^{\omega} = v_{z,z} \end{aligned}$$

Ricapitolando:

$$\alpha_{\phi\phi} = v_{\phi,\phi} + r v^{\xi} \quad (2.2)$$

$$\alpha_{\phi z} = \frac{1}{2} (v_{\phi,z} + v_{z,\phi}) \quad (2.3)$$

$$\alpha_{zz} = v_{z,z} \quad (2.4)$$

### 2.3.2 Equilibrio

Le equazioni di equilibrio in forma locale per un guscio soggetto ad un regime di sforzo membranale sono:

$$\nabla_{\alpha}^{\dagger} N^{\alpha\beta} + p^{\beta} = 0 \quad (2.5)$$

$$-L_{\alpha\gamma} N^{\alpha\gamma} + p^{\xi} = 0 \quad (2.6)$$

$$\eta_{\alpha\beta}^{\dagger} N^{\alpha\beta} = 0 \quad (2.7)$$

Essendo:

$$\nabla_{\alpha}^{\dagger} N^{\alpha\beta} = N_{,\alpha}^{\alpha\beta} + \Gamma_{\alpha\gamma}^{\alpha} N^{\gamma\beta} + \Gamma_{\alpha\gamma}^{\beta} N^{\alpha\gamma} \quad (2.8)$$

nel caso di guscio cilindrico, le equazioni diventano:

$$\begin{aligned} N_{,\phi}^{\phi\phi} + \Gamma_{\phi z}^{\phi} N^{z\phi} + \Gamma_{\phi z}^{\phi} N^{\phi z} + 2\Gamma_{\phi\phi}^{\phi} N^{\phi\phi} + N_{,z}^{z\phi} + \\ + \Gamma_{z\phi}^z N^{z\phi} + \Gamma_{z\phi}^{\phi} N^{z\phi} + \Gamma_{zz}^z N^{z\phi} + \Gamma_{zz}^{\phi} N^{zz} + p^{\phi} = 0 \end{aligned}$$

$$N_{,z}^{zz} + \Gamma_{z\phi}^z N^{\phi z} + \Gamma_{z\phi}^z N^{z\phi} + 2\Gamma_{zz}^z N^{zz} + N_{,\phi}^{\phi z} + \\ + \Gamma_{\phi z}^{\phi} N^{\phi z} + \Gamma_{\phi z}^z N^{\phi z} + \Gamma_{\phi\phi}^{\phi} N^{\phi z} + \Gamma_{\phi\phi}^z N^{\phi\phi} + p^z = 0$$

$$L_{\phi\phi} N^{\phi\phi} + L_{\phi z} N^{\phi z} + L_{z\phi} N^{z\phi} + L_{zz} N^{zz} - p^\xi = 0$$

$$\eta_{\phi\phi}^\dagger N^{\phi\phi} + \eta_{\phi z}^\dagger N^{\phi z} + \eta_{z\phi}^\dagger N^{z\phi} + \eta_{zz}^\dagger N^{zz} = 0$$

da cui si ottiene:

$$N_{,\phi}^{\phi\phi} + N_{,z}^{z\phi} + p^\phi = 0 \quad (2.9)$$

$$N_{,z}^{zz} + N_{,\phi}^{\phi z} + p^z = 0 \quad (2.10)$$

$$L_{\phi\phi} N^{\phi\phi} - p^\xi = 0 \quad (2.11)$$

$$N^{\phi z} = N^{z\phi} \quad (2.12)$$

### 2.3.3 Equazioni costitutive

Le equazioni costitutive sono:

$$N^{\phi\phi} = \frac{D}{r^2} \left( \frac{1}{r^2} (v_{\phi,\phi} + r v^\xi) + v_{z,z} \right) \quad (2.13)$$

$$N^{\phi z} = D \left( \frac{1-\nu}{2r^2} (v_{\phi,z} + v_{z,\phi}) \right) \quad (2.14)$$

$$N^{zz} = D \left( \frac{\nu}{r^2} (v_{\phi,\phi} + r v^\xi) + v_{z,z} \right) \quad (2.15)$$

dove:

$$D = \frac{E(2\varepsilon)}{1-\nu^2}$$

# Capitolo 3

## Applicazione

### 3.1 Confronto analitico e numerico

In questo capitolo si mettono a confronto i risultati ottenuti dal calcolo analitico con quelli ricavati dal software agli elementi finiti SAP2000 v.11.

Oggetto dello studio è un serbatoio cilindrico in cls, i cui dati geometrici verranno indicati successivamente, pieno di clinker, che produce una pressione di tipo esponenziale sul guscio medesimo.

Dato che il software contempla solo l'inserimento di carichi lineari, l'andamento esponenziale del carico verrà approssimato con una linea spezzata.

Verificheremo, quindi, se l'errore ottenuto con tale approssimazione sia accettabile.

### 3.2 Caratteristiche del serbatoio

#### Caratteristiche geometriche:

- $r = 1600$  cm;
- $h = 5000$  cm;
- $2\varepsilon = 37,5$  cm.

#### Caratteristiche dei materiali:

- $\gamma_c =$  Peso specifico del clinker =  $18 \text{ kN/m}^3$ ;
- $\gamma_s =$  Peso specifico del cls =  $25 \text{ kN/m}^3$ .



Carichi:

- $p^{\xi} = \frac{\gamma_c A}{\mu U} \left( 1 - e^{-(h-z)/z_0} \right) \text{ kN/m}^2; \quad [4]$
- $p_p = p^z = -\gamma_s (2\varepsilon) = -9,38 \text{ kN/m}^2;$

**3.3 Calcolo analitico**

Sul serbatoio, vincolato alla base con appoggi scorrevoli, agisce, oltre alla pressione del clinker, anche il suo peso proprio (*condizione di carico assialsimmetrica*).

Questa condizione di carico è rappresentata dalle due componenti  $p^{\xi}$  e  $p^z$  del vettore di carico  $p$ . Considerando la simmetria assiale è possibile eliminare tutte le derivate rispetto alla coordinata  $\phi$ . Così le equazioni di equilibrio diventano <sup>[3]</sup>:

$$N\phi\phi = \frac{p^{\xi}}{r} \quad (3.1)$$

$$N^z\phi_{,z} = 0 \quad (3.2)$$

$$N^{zz}_{,z} + p^z = 0 \quad (3.3)$$

Considerando le condizioni al contorno ( $z=0$ ) relative alla particolare condizione di carico, sapendo che la caratteristica di sollecitazione relativa ad un elemento di area infinitesimo vale:

$$N^{<\alpha\beta>} = N^{\alpha\beta} \left| \overline{\partial_{\alpha}} \right| \left| \overline{\partial_{\beta}} \right| \quad (3.4)$$

si ottiene:

$$N^{<\phi\phi>} = N^{\phi\phi} r^2 = p^{\xi} r \quad (3.5)$$

$$N^{<\phi z>},z = 0 \rightarrow N^{<\phi z>} = 0 \quad (3.6)$$

$$N^{<zz>} = N^{zz} = -p^z (z - h) \quad (3.7)$$

Nel caso in esame, il peso proprio rispetto alla base locale è dato da:

$$p^{<z>} = p^z = -\gamma_s (2\varepsilon) = -9,38 \text{ kN/m}^2$$

mentre il carico in direzione radiale dovuto al clinker:

$$p^{<\xi>} = p^{\xi} = \frac{\gamma_c A}{\mu U} \left( 1 - e^{-(h-z)/z_0} \right) = 290,91 \left( 1 - e^{-(h-z)/31,26} \right) \text{ kN/m}^2$$

dove:

A = Area sezione trasversale = 804,25 m<sup>2</sup>;

$\gamma_c$  = Peso dell'unità di volume = 18 kN/m<sup>3</sup>

$\mu$  = Coefficiente d'attrito di parete = 0,9  $\mu_m = 0,495$ ;

$K_s$  = Rapporto press. orizz/press. vert = 1,15  $K_{sm} = 0,517$

U = Perimetro interno = 100,53 m.

$$z_0 = \frac{A}{K_s \mu U} = 31,26$$

da cui:

$$\begin{aligned} N^{<\phi\phi>} &= p^{\xi} r = 290,91 \left( 1 - e^{-(h-z)/31,26} \right) r = \\ &= 4654,56 \left( 1 - e^{-(h-z)/31,26} \right) \end{aligned}$$

$$N^{<zz>} = -p^z (z - h) = -9,38 (z - h) = -9,375 (z - 50)$$

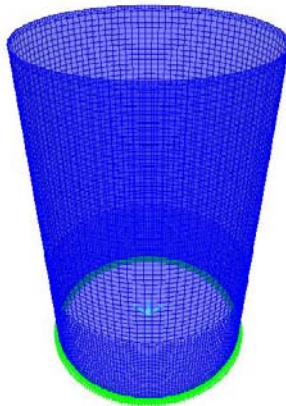
### 3.4 Calcolo numerico

Il programma di calcolo SAP 2000 costruisce automaticamente il modello del serbatoio, una volta forniti diametro e altezza. È necessaria però una certa attenzione nella definizione della mesh, ovvero della suddivisione in elementi finiti (discretizzazione).

La scelta della suddivisione è effettuata per tentativi: a partire da elementi finiti piuttosto grandi, si vanno a ridurre le dimensioni finché i risultati non rimangono praticamente uguali infittendo ulteriormente la mesh e sono prossimi a quelli della soluzione analitica (a cui si dovrebbe convergere quando il numero di elementi tende all'infinito). Nel nostro caso si raggiungono dei risultati piuttosto soddisfacenti soltanto per elementi di altezza 0,5 m. Per le restanti zone invece si sono utilizzati elementi di altezza pari a 0,85 m.

Per quanto riguarda invece la suddivisione lungo i paralleli, in senso radiale, si considera un angolo di  $1,8^\circ$  nella base del serbatoio dove le mesh sono più fitte e di  $3,6^\circ$  nelle altre zone.

La larghezza quindi è circa pari 0,5 m nella zona più fitta e di 1 m nelle restanti.

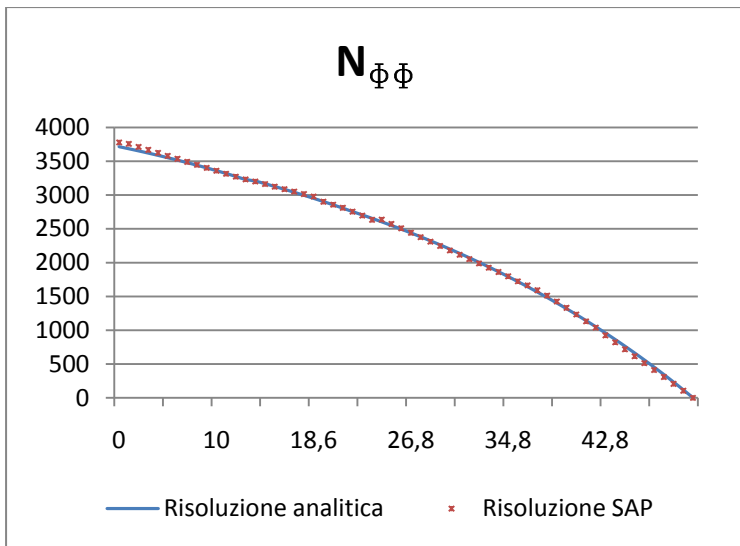


Modellazione del serbatoio

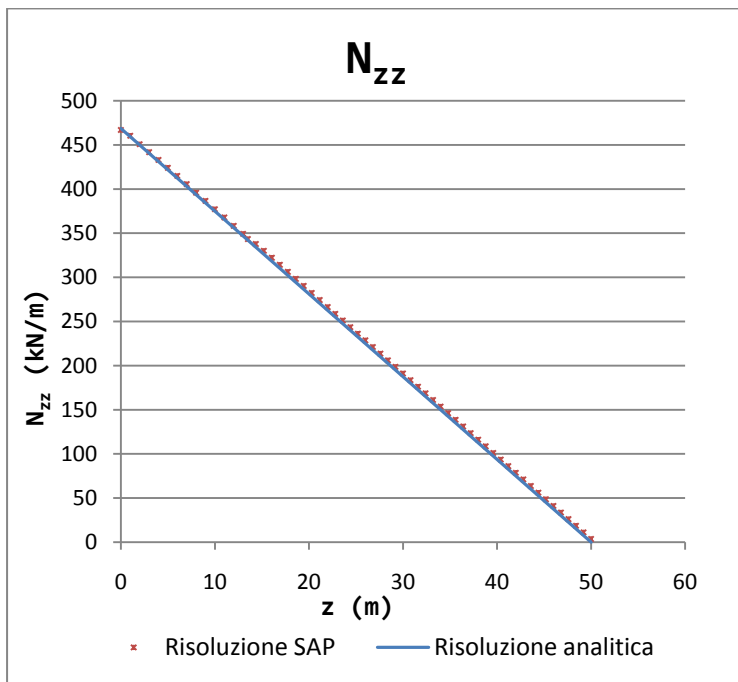
Come nel calcolo analitico, il serbatoio è stato vincolato con appoggi scorrevoli alla base ed sono stati applicati soltanto la pressione del clinker e il peso proprio.

### 3.5 Conclusioni

Si riportano i grafici che mettono a confronto i risultati del calcolo analitico e quelli ottenuti con il programma di calcolo.



z (m)	$N_{\phi\phi}$ SAP (kN/m)	$N_{\phi\phi}$ Anal. (kN/m)	$\Delta$ (%)
0	3714,34	3778,67	-1,73
10	3359,89	3358,22	0,05
22	2754,03	2754,07	0,00
30	2199,74	2180,69	0,87
42	1050,97	1038,90	1,15
50	0	0	0,00



$z$ (m)	$N_{zz}$ SAP (kN/m)	$N_{zz}$ Anal. (kN/m)	$\Delta$ (%)
0	466,9	468,75	0,39
10	377,21	375	-0,59
22	266,32	269,5	1,18
30	191,09	187,5	-1,91
42	76,59	75	-2,12
50	-0,68	0	-

Come si nota dai grafici e dalle tabelle, i risultati estrapolati dal modello sono comparabili, lasciando un margine di errore minimo. Si è ottenuta così una buona approssimazione dell'andamento della pressione del clinker.

## Bibliografia

- [1] Marco Modugno, "Notes on geometry of surfaces", notes for students used in the course of Mathematical Physics for Civil Engineers, 2009;
- [2] Marco Modugno, "Introduzione alla meccanica dei sistemi continui", appunti per gli studenti, 2009;
- [3] Enzo Marino, "A short introduction to linear shell theory", 2009;
- [4] Odone Belluzzi, Scienza delle Costruzioni III, Zanichelli Bologna, 1977.