

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI FIRENZE



FACOLTÀ DI INGEGNERIA

CORSO DI

FISICA MATEMATICA

ANNO ACCADEMICO 2010 – 2011

Analisi meccanica di una calotta sferica

Docente: Prof. Marco Modugno

Revisore: Ing. Enzo Marino

Studenti:

Francesco Maresca

Marco Matteucci

INDICE

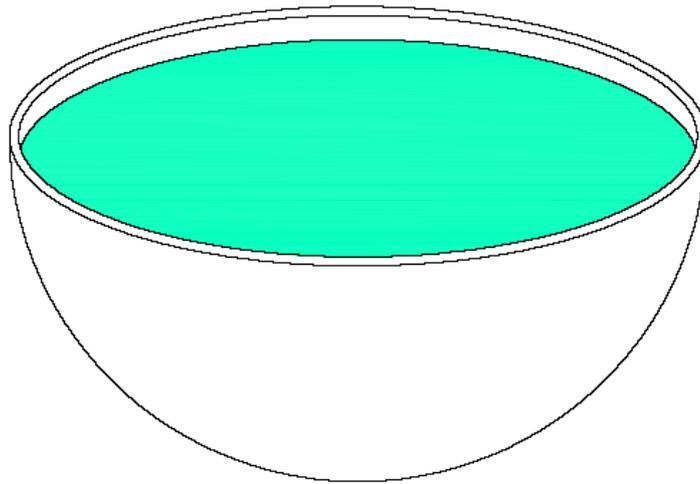
1. Introduzione	3
2. Geometria dello spazio ambiente	4
2.1 Sistemi di coordinate	4
2.2 Metrica Riemanniana	5
2.3 Connessione Riemanniana	6
3. Geometria della sfera come sottovarietà dello spazio ambiente	8
3.1 Metrica della sottovarietà	8
3.2 Versore normale	9
3.3 Tensore di Weingarten e seconda forma fondamentale	9
3.4 Connessione Riemanniana	10
3.5 Curvatura Riemanniana	11
3.6 Tensore di Ricci e curvatura scalare	12
4. Studio meccanico della calotta sferica	13
4.1 Descrizione geometrica	13
4.2 Ipotesi generali	14
4.3 Cinematica del guscio	14
4.4 Equilibrio e leggi costitutive	16
4.5 Analisi dei carichi	17
5. Bibliografia	20

1. Introduzione

Il presente lavoro riguarda lo studio di una calotta sferica, di materiale omogeneo, isotropo, elastico, nell'ambito della teoria lineare¹, piena d'acqua e sospesa verticalmente ad un supporto fisso.

Il lavoro consiste in una prima parte dedicata allo studio della geometria di una superficie sferica, considerata come una varietà immersa in uno spazio ambiente Euclideo.

I risultati geometrici ottenuti sono stati poi utilizzati nella seconda parte dello studio, inerente il comportamento meccanico di una calotta sferica piena d'acqua.



[fig. 1.1 – Calotta sferica piena d'acqua]

¹ La linearità del materiale è sia a livello del legame costitutivo, sia delle deformazioni, che si considerano infinitesime.

2. Geometria dello spazio ambiente

2.1 Sistemi di coordinate

Consideriamo uno spazio Euclideo E di dimensione 3.

Scegliamo un punto (origine) $o \in E$, un'orientazione e una base ortonormale con orientazione positiva (e_i) di \bar{E} .²

La coppia (o, e_i) induce il sistema globale di **coordinate cartesiane**:

$$(x, y, z) \equiv (x^1, x^2, x^3) \quad (2.1)$$

ed il sistema locale di **coordinate sferiche**

$$(r, \theta, \phi) \equiv (y^1, y^2, y^3) \equiv (y^r, y^\theta, y^\phi) \quad (2.2)$$

La coordinata r è il "raggio", θ è la colatitudine e ϕ è la longitudine.

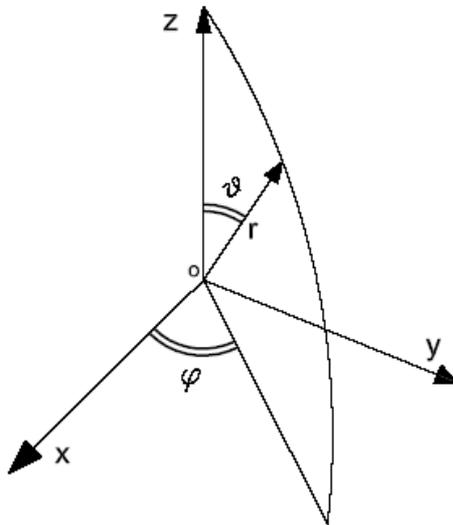
Per definizione, le funzioni di transizione delle coordinate sferiche rispetto alle coordinate cartesiane sono:

$$x = r \sin \theta \cos \phi \quad (2.3)$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi \quad (2.4)$$

$$z = r \cos \theta \quad (2.5)$$

Tali uguaglianze sono mostrate nella figura seguente:



[fig. 2.1 – Sistema di coordinate sferiche nello spazio euclideo tridimensionale]

² \bar{E} è lo spazio delle traslazioni dello spazio affine E .

Tra le formule inverse di transizione, è importante la seguente³:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (2.6)$$

In accordo alle formule di transizione di coordinate, abbiamo le uguaglianze:

$$dx^i = \sum_j \frac{\partial x^i}{\partial y^j} dy^j \quad (2.7)$$

$$\partial x_j = \sum_i \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \partial y_j \quad (2.8)$$

cioè:

$$\begin{cases} dx = \sin \theta \cos \phi \, dr + r \cos \theta \cos \phi \, d\theta - r \sin \theta \sin \phi \, d\phi \\ dy = \sin \theta \sin \phi \, dr + r \cos \theta \sin \phi \, d\theta + r \sin \theta \cos \phi \, d\phi \\ dz = \cos \theta \, dr - r \sin \theta \, d\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \partial r = \sin \theta \cos \phi \, \partial x + \sin \theta \sin \phi \, \partial y + \cos \theta \, \partial z \\ \partial \theta = \frac{1}{r} \cos \theta \cos \phi \, \partial x + \frac{1}{r} \cos \theta \sin \phi \, \partial y - \sin \theta \, \partial z \\ \partial \phi = -\frac{1}{r \sin \theta} \sin \phi \, \partial x + \frac{1}{r \sin \theta} \cos \phi \, \partial y \end{cases} \quad (2.9)$$

Le espressioni in coordinate cartesiane e sferiche di un campo vettoriale e di una forma differenziale sono:

$$\begin{cases} X = X^1 \partial x + X^2 \partial y + X^3 \partial z \\ X = X^r \partial r + X^\theta \partial \theta + X^\phi \partial \phi \end{cases} \quad (2.10)$$

$$\begin{cases} \alpha = \alpha_1 dx + \alpha_2 dy + \alpha_3 dz \\ \alpha = \alpha_r dr + \alpha_\theta d\theta + \alpha_\phi d\phi \end{cases} \quad (2.11)$$

2.2 Metrica Riemanniana

Calcoliamo le espressioni della metrica e della forma volume nelle coordinate cartesiane e sferiche.

Le espressioni in coordinate cartesiane e sferiche delle metriche covariante e controvariante sono:

$$\begin{aligned} g &= dx \otimes dx + dy \otimes dy + dz \otimes dz \\ &= dr \otimes dr + r^2 d\theta \otimes d\theta + r^2 \sin^2 \theta \, d\phi \otimes d\phi \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} \bar{g} &= \partial x \otimes \partial x + \partial y \otimes \partial y + \partial z \otimes \partial z \\ &= \partial r \otimes \partial r + \frac{1}{r^2} \partial \theta \otimes \partial \theta + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \partial \phi \otimes \partial \phi \end{aligned} \quad (2.13)$$

In forma matriciale:

³ La (2.6) si ottiene dalla somma dei quadrati delle (2.3), (2.4) e (2.5).

$$(g_{hk}) \equiv \begin{pmatrix} g_{xx} & g_{xy} & g_{xz} \\ g_{yx} & g_{yy} & g_{yz} \\ g_{zx} & g_{zy} & g_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

$$(g_{ij}) \equiv \begin{pmatrix} g_{rr} & g_{r\theta} & g_{r\phi} \\ g_{\theta r} & g_{\theta\theta} & g_{\theta\phi} \\ g_{\phi r} & g_{\phi\theta} & g_{\phi\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

La matrice inversa di g rappresenta la metrica controvariante:

$$(g^{hk}) \equiv \begin{pmatrix} g^{xx} & g^{xy} & g^{xz} \\ g^{yx} & g^{yy} & g^{yz} \\ g^{zx} & g^{zy} & g^{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

$$(g^{ij}) \equiv \begin{pmatrix} g^{rr} & g^{r\theta} & g^{r\phi} \\ g^{\theta r} & g^{\theta\theta} & g^{\theta\phi} \\ g^{\phi r} & g^{\phi\theta} & g^{\phi\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

Le espressioni della funzione metrica in componenti cartesiane e sferiche sono:

$$\begin{aligned} G &= \frac{1}{2} g_{hk} \dot{x}^h \dot{x}^k = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \\ &= \frac{1}{2} g_{ij} \dot{y}^i \dot{y}^j = \frac{1}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) \end{aligned} \quad (2.18)$$

Le espressioni della forma volume associata all'orientazione scelta sono:

$$\begin{aligned} \eta &= \sqrt{\det(g_{hk})} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = dx \wedge dy \wedge dz \\ &= \sqrt{\det(g_{ij})} dy^1 \wedge dy^2 \wedge dy^3 = r^2 \sin \theta dr \wedge d\theta \wedge d\phi \end{aligned} \quad (2.19)$$

2.3 Connessione Riemanniana

Negli spazi Euclidei, la connessione Riemanniana coincide con il differenziale standard dei campi vettoriali. I simboli di Christoffel in coordinate cartesiane sono nulli. I coefficienti della connessione ∇ , in coordinate sferiche, si possono ricavare attraverso l'uso delle formule di Lagrange, a partire dalla funzione metrica.

Le componenti dell'accelerazione in forma covariante si ottengono con la seguente espressione (formula di Lagrange):

$$a_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial G}{\partial \dot{y}^i} - \frac{\partial G}{\partial y^i} \quad (2.20)$$

In particolare, in coordinate sferiche:

$$\begin{cases} a_r = \frac{d}{dt} \frac{\partial G}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial G}{\partial r} = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \\ a_\theta = \frac{d}{dt} \frac{\partial G}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial G}{\partial \theta} = r^2 \ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta} - r^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2 \\ a_\phi = \frac{d}{dt} \frac{\partial G}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial G}{\partial \phi} = r^2 \sin^2 \theta \ddot{\phi} + 2r \sin^2 \theta \dot{r} \dot{\phi} + 2r^2 \cos \theta \sin \theta \dot{\theta} \dot{\phi} \end{cases} \quad (2.21)$$

Pertanto, le componenti dell'accelerazione in forma controvariante sono date da:

$$a^i = g^{ij} a_j \quad (2.22)$$

$$\begin{pmatrix} a^r \\ a^\theta \\ a^\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_r \\ a_\theta \\ a_\phi \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

Cioè:

$$\begin{cases} a^r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \\ a^\theta = \ddot{\theta} + \frac{2}{r} \dot{r} \dot{\theta} - \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2 \\ a^\phi = \ddot{\phi} + \frac{2}{r} \dot{r} \dot{\phi} + 2 \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \dot{\theta} \dot{\phi} \end{cases} \quad (2.27)$$

Dalle formule precedenti, otteniamo i seguenti simboli di Christoffel non nulli:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\theta\theta}^r &= -r \\ \Gamma_{\phi\phi}^r &= -r \sin^2 \theta \\ \Gamma_{r\theta}^\theta &= \Gamma_{\theta r}^\theta = \frac{1}{r} \\ \Gamma_{\phi\phi}^\theta &= -\sin \theta \cos \theta \\ \Gamma_{r\phi}^\phi &= \Gamma_{\phi r}^\phi = \frac{1}{r} \\ \Gamma_{\theta\phi}^\phi &= \Gamma_{\phi\theta}^\phi = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \end{aligned} \quad (2.28)$$

La curvatura Riemanniana dello spazio Euclideo è nulla, poiché tale quantità è un tensore: se è nullo in un sistema di riferimento (quello cartesiano), esso è nullo in tutti gli altri.

3. Geometria della sfera come sottovarietà dello spazio ambiente

Consideriamo la sfera

$$j: S \hookrightarrow E \quad (3.1)$$

di centro $o \in E$ e raggio $R > 0$. Essa è una sottovarietà dello spazio euclideo E , più precisamente una ipersuperficie, poiché la sua dimensione è 2 (cioè $\dim(E) - 1$).

Il sistema di coordinate sferiche è adattato alla sottovarietà e, d'ora in poi, utilizzeremo questo sistema per i calcoli. Più precisamente, r è la coordinata vincolare (e il vincolo è $r = R$) e θ e ϕ sono le coordinate lagrangiane.

La carta adattata (r, θ, ϕ) soddisfa l'utile proprietà:

$$(\partial r) \circ j: S \rightarrow TS^\perp \quad (3.2)$$

3.1 Metrica della sottovarietà

La metrica Riemanniana dello spazio ambiente induce una metrica sulla sottovarietà. In forma matriciale la sottometrica è rappresentata dalla sottomatrice corrispondente alle coordinate Lagrangiane (cioè, tutte le coordinate eccetto quelle vincolari).

La metrica indotta sulla sottovarietà è, in forma covariante e controvariante:

$$g^\dagger = R^2(d\theta^\dagger \otimes d\theta^\dagger + \sin^2\theta^\dagger d\phi^\dagger \otimes d\phi^\dagger) \quad (3.3)$$

$$\bar{g}^\dagger = \frac{1}{R^2} \left(\partial\theta^\dagger \otimes \partial\theta^\dagger + \frac{1}{\sin^2\theta^\dagger} \partial\phi^\dagger \otimes \partial\phi^\dagger \right) \quad (3.4)$$

Ovvero, in forma matriciale:

$$(g_{ij})^\dagger \equiv \begin{pmatrix} g_{\theta\theta} & g_{\theta\phi} \\ g_{\phi\theta} & g_{\phi\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \sin^2\theta^\dagger \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

$$(g^{ij})^\dagger \equiv \begin{pmatrix} g^{\theta\theta} & g^{\theta\phi} \\ g^{\phi\theta} & g^{\phi\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/R^2 & 0 \\ 0 & 1/R^2 \sin^2\theta^\dagger \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

La funzione metrica, riferita alla sottovarietà, è:

$$G^\dagger = \frac{1}{2} R^2 (\dot{\theta}^{\dagger 2} + \sin^2\theta^\dagger \dot{\phi}^{\dagger 2}) \quad (3.7)$$

La forma volume della sfera relativa alla metrica indotta ed all'orientazione indotta (cioè l'orientazione indotta dal sistema di coordinate lagrangiane scelto) è:

$$\eta^\dagger = R^2 \sin\theta^\dagger d\theta^\dagger \wedge d\phi^\dagger \quad (3.8)$$

3.2 Versore normale

Decomponiamo lo spazio tangente dello spazio ambiente nei punti della sfera nella somma diretta:

$$T_S E = TS \oplus TS^\perp \quad (3.9)$$

Dove TS è lo spazio tangente alla sfera e TS^\perp è la componente di $T_S E$ ortogonale a TS .

Consideriamo il versore normale uscente:

$$n: S \rightarrow TS^\perp \quad (3.10)$$

Tale campo vettoriale è definito, globalmente, dall'espressione seguente:

$$n = \partial r \quad (3.11)$$

Utilizzando il sistema di coordinate (2.2) ristretto ad S , cioè:

$$Y^\dagger = (\theta^\dagger, \phi^\dagger): S \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad (3.12)$$

la base indotta è

$$\{\bar{\partial}_\theta, \bar{\partial}_\phi, \bar{n}\} \quad (3.13)$$

3.3 Tensore di Weingarten e seconda forma fondamentale

A questo punto, possiamo definire il tensore di Weingarten e la seconda forma fondamentale.

Il tensore di Weingarten è, per definizione, il tensore (1,1):

$$L := \nabla_{\parallel} n: TS \rightarrow TS: X \mapsto \nabla_X n \quad (3.14)$$

Quindi, per la (3.11), abbiamo:

$$(L)_h^k = (\nabla \partial r)_h^k \quad (3.15)$$

La derivata covariante del vettore tangente ad una curva coordinata è esprimibile mediante i simboli di Christoffel. Dalla formula generale:

$$(\nabla \partial y_i) = \sum_{hk} \Gamma_{ik}^h dy^k \otimes \partial y_h \quad (3.16)$$

otteniamo:

$$(\nabla \partial y_r) = \sum_{hk} \Gamma_{rk}^h dy^k \otimes \partial y_h = \Gamma_{r\theta}^\theta dy^\theta \otimes \partial y_\theta + \Gamma_{r\phi}^\phi dy^\phi \otimes \partial y_\phi \quad (3.17)$$

cioè,

$$\begin{aligned}
L = (\nabla \partial r) &= \frac{1}{R} id_{TS} \\
&= \frac{1}{R} (d\theta^\dagger \otimes \partial\theta^\dagger + d\phi^\dagger \otimes \partial\phi^\dagger) \quad (3.18)
\end{aligned}$$

La seconda forma fondamentale di S è la forma bilineare

$$\underline{L} = g^{\dagger b}(L) \quad (3.19)$$

cioè, in coordinate:

$$\begin{aligned}
\underline{L} &= \frac{1}{R} g^\dagger \\
&= R(d\theta^\dagger \otimes d\theta^\dagger + \sin^2\theta^\dagger d\phi^\dagger \otimes d\phi^\dagger) \quad (3.20)
\end{aligned}$$

In forma matriciale:

$$(\underline{L})_{hk} = \frac{1}{R} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \sin^2\theta^\dagger \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2\theta^\dagger \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

Otteniamo quindi la curvatura media H e la curvatura totale K:

$$H = \text{tr}L = \frac{2}{R} \quad K = \det L = \frac{1}{R^2} \quad (3.22)$$

Definiamo ora il tensore di Gauss:

$$N \equiv \nabla^\perp: TS \times TS \rightarrow TS^\perp: (X, Y) \mapsto \nabla_X^\perp Y \quad (3.23)$$

Perciò, nel nostro caso, abbiamo:

$$N = \sum_{1 \leq h, k \leq l} dy^h \otimes dy^k \otimes (\Gamma_{hk}^r \partial y_r) \quad (3.24)$$

Cioè:

$$\begin{aligned}
N &= \Gamma_{\theta\theta}^r dy^\theta \otimes dy^\theta \otimes \partial y_r + \Gamma_{\phi\phi}^r dy^\phi \otimes dy^\phi \otimes \partial y_r \\
&= -R d\theta \otimes d\theta \otimes \partial r - R \sin^2\theta d\phi \otimes d\phi \otimes \partial r \\
&= -\frac{1}{R} g^\dagger \otimes n \\
&= -\underline{L} \otimes n \quad (3.25)
\end{aligned}$$

3.4 Connessione Riemanniana

Ricaviamo, utilizzando le formule di Lagrange, i coefficienti di ∇^\dagger .

La funzione metrica ristretta alla sottovarietà è (3.7):

$$G^\dagger = \frac{1}{2} R^2 (\dot{\theta}^\dagger{}^2 + \sin^2 \theta^\dagger \dot{\phi}^\dagger{}^2)$$

Allora possiamo scrivere

$$a_i^\dagger = \frac{d}{dt} \frac{\partial G^\dagger}{\partial \dot{y}^{\dagger i}} - \frac{\partial G^\dagger}{\partial y^{\dagger i}} \quad (3.26)$$

Cioè:

$$\begin{cases} a_\theta^\dagger = \frac{d}{dt} \frac{\partial G^\dagger}{\partial \dot{\theta}^\dagger} - \frac{\partial G^\dagger}{\partial \theta^\dagger} = R^2 (\ddot{\theta}^\dagger - \sin \theta^\dagger \cos \theta^\dagger \dot{\phi}^\dagger{}^2) \\ a_\phi^\dagger = \frac{d}{dt} \frac{\partial G^\dagger}{\partial \dot{\phi}^\dagger} - \frac{\partial G^\dagger}{\partial \phi^\dagger} = R^2 (\sin^2 \theta^\dagger \ddot{\phi}^\dagger + 2 \cos \theta^\dagger \sin \theta^\dagger \dot{\theta}^\dagger \dot{\phi}^\dagger) \end{cases} \quad (3.27)$$

Le componenti dell'accelerazione in forma controvariante sono:

$$a^{i\dagger} = g^{\dagger ij} a_j^\dagger \quad (3.28)$$

ossia:

$$\begin{pmatrix} a^{\theta\dagger} \\ a^{\phi\dagger} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/R^2 & 0 \\ 0 & 1/R^2 \sin^2 \theta^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_\theta^\dagger \\ a_\phi^\dagger \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

Quindi:

$$a^{\theta\dagger} = \ddot{\theta}^\dagger - \sin \theta^\dagger \cos \theta^\dagger \dot{\phi}^\dagger{}^2 \quad (3.30)$$

$$a^{\phi\dagger} = \ddot{\phi}^\dagger + 2 \frac{\cos \theta^\dagger}{\sin \theta^\dagger} \dot{\theta}^\dagger \dot{\phi}^\dagger \quad (3.31)$$

Dalle espressioni (3.30) e (3.31) si possono estrarre i coefficienti della connessione Riemanniana ristretta alla sottovarietà S, cioè i simboli di Christoffel:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\phi\phi}^{\dagger\theta} &= -\sin \theta^\dagger \cos \theta^\dagger \\ \Gamma_{\theta\phi}^{\dagger\phi} &= \Gamma_{\phi\theta}^{\dagger\phi} = \frac{\cos \theta^\dagger}{\sin \theta^\dagger} \end{aligned} \quad (3.32)$$

3.5 Curvatura Riemanniana

La definizione generale del tensore di curvatura Riemanniana \mathcal{R}^\dagger è:

$$\mathcal{R}^\dagger(X, Y, Z) \equiv \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z \quad (3.33)$$

In componenti otteniamo:

$$\mathcal{R}_{ij}^{\dagger h} = (\nabla_i^{\dagger} \nabla_j^{\dagger} \partial_k)^h - (\nabla_j^{\dagger} \nabla_i^{\dagger} \partial_k)^h \quad (3.34)$$

Utilizziamo la seguente comoda uguaglianza, frutto di un teorema sulle ipersuperfici:

$$\mathcal{R}^{\dagger}(X, Y; Z) = \underline{L}(Y, Z)L(X) - \underline{L}(X, Z)L(Y) \quad (3.35)$$

dove \underline{L} è la seconda forma fondamentale ed L è il tensore di Weingarten.

In coordinate:

$$\mathcal{R}^{\dagger} = 2(\sin^2 \theta^{\dagger} d\theta^{\dagger} \wedge d\phi^{\dagger} \otimes \partial\theta^{\dagger} \otimes d\phi^{\dagger} - d\theta^{\dagger} \wedge d\phi^{\dagger} \otimes \partial\phi^{\dagger} \otimes d\theta^{\dagger}) \quad (3.36)$$

L'espressione covariante del tensore di curvatura Riemanniana è, in coordinate:

$$\underline{\mathcal{R}}^{\dagger} = 4 R^2 \sin^2 \theta^{\dagger} d\theta^{\dagger} \wedge d\phi^{\dagger} \otimes d\theta^{\dagger} \wedge d\phi^{\dagger} \quad (3.37)$$

Confrontando le due uguaglianze:

$$\begin{aligned} \eta^{\dagger} &= R^2 \sin \theta^{\dagger} d\theta^{\dagger} \wedge d\phi^{\dagger} \\ \underline{\mathcal{R}}^{\dagger} &= 4 R^2 \sin^2 \theta^{\dagger} d\theta^{\dagger} \wedge d\phi^{\dagger} \otimes d\theta^{\dagger} \wedge d\phi^{\dagger} \end{aligned}$$

Otteniamo:

$$\underline{\mathcal{R}}^{\dagger} = \frac{4}{R^2} (\eta^{\dagger} \otimes \eta^{\dagger}) \quad (3.38)$$

3.6 Tensore di Ricci e curvatura scalare

L'espressione in coordinate del tensore di Ricci è:

$$\underline{r}^{\dagger} = \sin^2 \theta^{\dagger} d\phi^{\dagger} \otimes d\phi^{\dagger} + d\theta^{\dagger} \otimes d\theta^{\dagger} \quad (3.39)$$

La curvatura scalare Riemanniana è:

$$\langle \underline{r} \rangle^{\dagger} = \frac{2}{R^2} \quad (3.40)$$

Inoltre, poiché $\dim S = 2$, abbiamo:

$$\begin{aligned} \underline{\mathcal{R}}^{\dagger} &= 2 \langle \underline{r} \rangle^{\dagger} (\eta^{\dagger} \otimes \eta^{\dagger}) \\ &= \frac{4}{R^2} (\eta^{\dagger} \otimes \eta^{\dagger}) \end{aligned} \quad (3.41)$$

$$\underline{r}^{\dagger} = \frac{1}{2} \langle \underline{r} \rangle^{\dagger} g^{\dagger} = \frac{1}{R^2} g^{\dagger} \quad (3.42)$$

Nel caso delle ipersuperfici, possiamo confrontare la curvatura totale $K = 1/R^2$ con la curvatura scalare, ottenendo l'uguaglianza:

$$K = \frac{1}{2} \langle \underline{r} \rangle^\dagger \quad (3.43)$$

4. Studio meccanico della calotta sferica

In questo capitolo faremo riferimento alla teoria esposta in “*A short introduction to linear shell theory*”, di E. Marino (2009).

4.1 Descrizione geometrica

Consideriamo la calotta come un continuo $S(\varepsilon)$ di spessore 2ε , modellato su una superficie S immersa nello spazio Euclideo E .

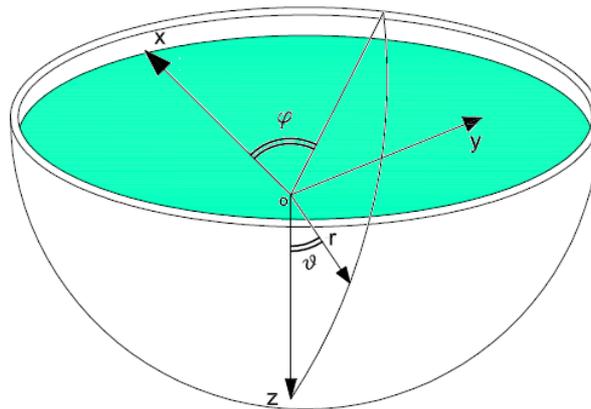
La calotta sferica è un guscio modellato su una porzione di sfera avente raggio R ed apertura $\pi/2$.

Tale calotta è descritta per mezzo del sistema di coordinate

$$\{y^\alpha, \xi\}: S(\varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (4.1)$$

Ciascun punto $p^* \in S(\varepsilon)$ contenuto nello spessore del continuo è definito mediante la sua quota ξ e la sua proiezione ortogonale $p \in S$.

Le quantità accompagnate dal simbolo * sono riferite al continuo $S(\varepsilon)$.



[fig. 4.1 – Sistemi di coordinate per lo studio della calotta piena d'acqua]

4.2 Ipotesi generali

Le ipotesi generali su cui è basata la teoria dei gusci trattata sono le seguenti:

- 1) Il guscio è sufficientemente sottile, cioè:

$$\frac{2\varepsilon}{R} \ll 1$$

dove R è il raggio della sfera.

- 2) (*Teoria lineare*) Gli spostamenti e le deformazioni sono infinitesimi, e perciò l'equilibrio può essere scritto in configurazione indeformata.
- 3) Le fibre lungo la coordinata ξ non subiscono contrazioni o estensioni durante la deformazione. Perciò ξ rimane costante in seguito alla deformazione.
- 4) (*Teoria di Kirchhoff-Love*) Gli elementi di linea normali alla superficie del guscio rimangono normali anche in seguito alla deformazione; ossia, si trascurano le deformazioni a taglio.

4.3 Cinematica del guscio

Supponiamo che la sfera venga trasformata in una nuova ipersuperficie S' :

$$S \xrightarrow{f} S' \quad (4.2)$$

con $f \in C^\infty$. Definiamo:

$$\begin{aligned} \bar{r}: S &\rightarrow \bar{P}: p \mapsto p - o \\ \bar{v}: S &\rightarrow \bar{P}: p \mapsto f(p) - p \end{aligned} \quad (4.3)$$

con \bar{v} campo piccolo.

In vista del fatto che nella statica della sfera considereremo uno stato membranale di sforzo, si trascurano le deformazioni correlate ai momenti flettenti. Per il calcolo dello stato di sforzo interno è richiesta solo la conoscenza del tensore di deformazione relativa all'allungamento α :

$$\begin{cases} \alpha_{\theta\theta} = v_{\theta,\theta} + R v^\xi \\ \alpha_{\phi\phi} = v_{\phi,\phi} + \sin\theta^\dagger \cos\theta^\dagger v_\theta + R \sin^2\theta^\dagger v^\xi \\ \alpha_{\phi\theta} = \frac{1}{2}(v_{\theta,\phi} + v_{\phi,\theta}) - \frac{\cos^3\theta^\dagger}{\sin\theta^\dagger} v_\phi \end{cases} \quad (4.4)$$

dove⁴

$$\alpha_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} [\bar{\partial}_{\alpha_d} \cdot \bar{\partial}_{\beta_d} - \bar{\partial}_\alpha \cdot \bar{\partial}_\beta] = \frac{1}{2} [g_{\alpha\beta_d} - g_{\alpha\beta}] \quad (4.5)$$

⁴ Gli indici α, β si riferiscono alle sole coordinate $\theta^\dagger, \phi^\dagger$.

Nella (4.5) i termini col pedice d sono riferiti alla configurazione deformata. Nel caso di deformazioni infinitesime, la (4.5) diventa:

$$\alpha_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(v_{\alpha|\beta} + v_{\beta|\alpha} + 2v^\xi L_{\alpha\beta}) \quad (4.6)$$

Il passaggio dalla (4.5) alla (4.6) è dovuto all'ipotesi di deformazioni infinitesime. Sia \bar{r} il campo vettoriale indicante la posizione iniziale dei punti del guscio (configurazione indeformata) e $\bar{v} \equiv (v^\theta, v^\phi, v^\xi)$ il campo di spostamenti; otteniamo il tensore:

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta d} &= \bar{\partial}_\alpha(\bar{r} + \bar{v}) \cdot \bar{\partial}_\beta(\bar{r} + \bar{v}) \\ &= (\bar{\partial}_\alpha + \nabla_\alpha \bar{v}) \cdot (\bar{\partial}_\beta + \nabla_\beta \bar{v}) \\ &= (\bar{\partial}_\alpha \cdot \bar{\partial}_\beta + \bar{\partial}_\alpha \cdot \nabla_\beta \bar{v} + \bar{\partial}_\beta \cdot \nabla_\alpha \bar{v} + \nabla_\alpha \bar{v} \cdot \nabla_\beta \bar{v}) \\ &\simeq (\bar{\partial}_\alpha \cdot \bar{\partial}_\beta + \bar{\partial}_\alpha \cdot \nabla_\beta \bar{v} + \bar{\partial}_\beta \cdot \nabla_\alpha \bar{v}) \end{aligned} \quad (4.7)$$

dove l'ultimo passaggio è dovuto all'ipotesi di deformazioni infinitesime (che porta a trascurare i termini del secondo ordine). Sostituendo la (4.7) nella (4.5), otteniamo:

$$\alpha_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}[\bar{\partial}_\alpha \cdot \nabla_\beta \bar{v} + \bar{\partial}_\beta \cdot \nabla_\alpha \bar{v}] \quad (4.8)$$

dove

$$\nabla_\alpha \bar{v} = (v_{|\alpha}^\gamma + v^\xi L_{\alpha}^\gamma) \bar{\partial}_\gamma + (v_{|\alpha}^\xi - v^\gamma L_{\alpha\gamma}) \bar{n} \quad (4.9)$$

$$v_{|\alpha}^\gamma = v_{,\alpha}^\gamma + v^\omega \Gamma_{\alpha\omega}^\gamma \quad (4.10)$$

Nella (4.9) è stato esplicitato lo splitting della derivata covariante nelle sue componenti parallela ed ortogonale. Perciò, sostituendo la (4.9) nella (4.8), abbiamo:

$$\begin{aligned} \alpha_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}[\bar{\partial}_\alpha \cdot \nabla_\beta \bar{v} + \bar{\partial}_\beta \cdot \nabla_\alpha \bar{v}] \\ &= \frac{1}{2}[\bar{\partial}_\alpha \cdot ((v_{|\beta}^\gamma + v^\xi L_{\beta}^\gamma) \bar{\partial}_\gamma + (v_{|\beta}^\xi - v^\gamma L_{\beta\gamma}) \bar{n}) + \bar{\partial}_\beta \cdot ((v_{|\alpha}^\gamma + v^\xi L_{\alpha}^\gamma) \bar{\partial}_\gamma + (v_{|\alpha}^\xi - v^\gamma L_{\alpha\gamma}) \bar{n})] \\ &= \frac{1}{2}[\delta_{\alpha\gamma} (v_{|\beta}^\gamma + v^\xi L_{\beta}^\gamma) + \delta_{\alpha\gamma} (v_{|\alpha}^\gamma + v^\xi L_{\alpha}^\gamma)] \\ &= \frac{1}{2}[v_{\alpha|\beta} + v_{\beta|\alpha} + v^\xi L_{\alpha\beta} + v^\xi L_{\beta\alpha}] \end{aligned}$$

da cui, sfruttando la simmetria della seconda forma fondamentale, si ottiene la (4.6). Dalla formula (4.6) si ottengono le (4.4), utilizzando i risultati del capitolo 3.

Infatti, relativamente alla calotta sferica, abbiamo:

$$\alpha_{\theta\theta} = \frac{1}{2}(v_{\theta|\theta} + v_{\theta|\theta} + 2v^\xi L_{\theta\theta})$$

$$\begin{aligned}
&= v_{\theta|\theta} + R v^\xi \\
&= (v_{\theta,\theta} + \Gamma_{\theta\omega}^\theta v^\omega) + R v^\xi \\
&= v_{\theta,\theta} + R v^\xi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{\phi\phi} &= \frac{1}{2}(v_{\phi|\phi} + v_{\phi|\phi} + 2v^\xi L_{\phi\phi}) \\
&= v_{\phi|\phi} + R \sin^2\theta^\dagger v^\xi \\
&= (v_{\phi,\phi} + \Gamma_{\phi\omega}^\phi v^\omega) + R \sin^2\theta^\dagger v^\xi \\
&= v_{\phi,\phi} + \cos\theta^\dagger \sin\theta^\dagger v_\theta + R \sin^2\theta^\dagger v^\xi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{\phi\theta} &= \frac{1}{2}(v_{\theta|\phi} + v_{\phi|\theta} + 2v^\xi L_{\phi\theta}) \\
&= \frac{1}{2}(v_{\phi|\theta} + v_{\theta|\phi}) \\
&= \frac{1}{2}(v_{\phi,\theta} + \Gamma_{\theta\omega}^\phi v^\omega + v_{\theta,\phi} + \Gamma_{\phi\omega}^\theta v^\omega) \\
&= \frac{1}{2}\left(v_{\phi,\theta} + v_{\theta,\phi} - \sin\theta^\dagger \cos\theta^\dagger v^\phi + \frac{\cos\theta^\dagger}{\sin\theta^\dagger} v^\phi\right) \\
&= \frac{1}{2}(v_{\phi,\theta} + v_{\theta,\phi}) - \frac{\cos^3\theta^\dagger}{\sin\theta^\dagger} v_\phi
\end{aligned}$$

4.4 Equilibrio e leggi costitutive

Le equazioni indefinite di equilibrio per un guscio in regime di membrana sono:

$$\nabla_\alpha^\dagger N^{\alpha\beta} + q^\beta = 0 \quad (4.11)$$

$$-L_{\alpha\gamma} N^{\alpha\gamma} + q^\xi = 0 \quad (4.12)$$

$$\eta^\dagger_{\alpha\beta} N^{\alpha\beta} = 0 \quad (4.13)$$

La (4.11) rappresenta l'equilibrio delle forze lungo il piano tangente alla calotta sferica; la (4.12) è l'equilibrio lungo \bar{n} e la (4.13) esprime l'equilibrio alla rotazione; $\eta^\dagger_{\alpha\beta}$ è la forma volume del guscio (§ 3.1).

Possiamo scrivere:

$$\nabla_\alpha^\dagger N^{\alpha\beta} = N_{,\alpha}^{\alpha\beta} + \Gamma_{\alpha\gamma}^\alpha N^{\gamma\beta} + \Gamma_{\alpha\gamma}^\beta N^{\alpha\gamma} \quad (4.14)$$

La (4.13) diventa:

$$\eta^\dagger_{\theta\phi} N^{\phi\theta} + \eta^\dagger_{\phi\theta} N^{\theta\phi} = 0 \quad (4.15)$$

Ossia:

$$N^{\phi\theta} - N^{\theta\phi} = 0 \rightarrow N^{\phi\theta} = N^{\theta\phi} \quad (4.16)$$

Le equazioni indefinite di equilibrio (4.11) e (4.12), nel caso della calotta sferica, sono:

$$\begin{cases} N_{,\theta}^{\theta\theta} + N_{,\phi}^{\phi\theta} + \Gamma_{\phi\theta}^{\phi} N^{\theta\phi} + \Gamma_{\phi\theta}^{\phi} N^{\phi\theta} + q^{\theta} = 0 \\ N_{,\phi}^{\phi\phi} + \Gamma_{\phi\theta}^{\phi} N^{\theta\phi} + \Gamma_{\phi\theta}^{\phi} N^{\phi\theta} + N_{,\theta}^{\theta\phi} + \Gamma_{\phi\phi}^{\theta} N^{\phi\phi} + q^{\phi} = 0 \\ L_{\theta\theta} N^{\theta\theta} + L_{\phi\phi} N^{\phi\phi} - q^{\xi} = 0 \end{cases} \quad (4.17)$$

Sostituendo i vari termini, otteniamo:

$$\begin{cases} N_{,\theta}^{\theta\theta} + N_{,\phi}^{\phi\theta} + \cot\theta^{\dagger} N^{\theta\theta} - \sin\theta^{\dagger} \cos\theta^{\dagger} N^{\phi\phi} + q^{\theta} = 0 \\ R N^{\theta\theta} + R \sin^2\theta^{\dagger} N^{\phi\phi} - q^{\xi} = 0 \\ N_{,\theta}^{\phi\theta} + N_{,\theta}^{\theta\phi} + 3\cot\theta^{\dagger} N^{\phi\theta} + q^{\phi} = 0 \end{cases} \quad (4.18)$$

Le equazioni costitutive sono:

$$\begin{cases} N^{\phi\phi} = \frac{D}{R^4} \left[(v_{\theta,\theta} + R v^{\xi}) + \frac{\nu}{\sin^2\theta^{\dagger}} (v_{\phi,\phi} + \sin\theta^{\dagger} \cos\theta^{\dagger} v_{\theta} + R \sin^2\theta^{\dagger} v^{\xi}) \right] \\ N^{\theta\theta} = \frac{D}{R^4 \sin^2\theta^{\dagger}} \left[\frac{1}{\sin^2\theta^{\dagger}} (v_{\phi,\phi} + \sin\theta^{\dagger} \cos\theta^{\dagger} v_{\theta} + R \sin^2\theta^{\dagger} v^{\xi}) + \nu (v_{\theta,\theta} + R v^{\xi}) \right] \\ N^{\phi\theta} = D \left[\frac{1-\nu}{R^4 \sin^2\theta^{\dagger}} \left(\frac{1}{2} (v_{\theta,\phi} + v_{\phi,\theta}) - \frac{\cos^3\theta^{\dagger}}{\sin\theta^{\dagger}} v_{\phi} \right) \right] \end{cases} \quad (4.19)$$

dove:

$$D = \frac{E(2\varepsilon)}{1-\nu^2} \quad (4.20)$$

4.5 Analisi dei carichi

Consideriamo la caratteristica di sollecitazione relativa a un elemento di area infinitesimo:

$$N^{<\alpha\beta>} = \frac{N^{\alpha\beta}}{|\underline{d}^{\alpha}| |\underline{d}^{\beta}|} = N^{\alpha\beta} |\bar{\partial}_{\alpha}| |\bar{\partial}_{\beta}| \quad (4.21)$$

Ossia:

$$N^{<\theta\theta>} = R^2 N^{\theta\theta}$$

$$N^{<\phi\phi>} = R^2 \sin^2\theta^{\dagger} N^{\phi\phi}$$

Le componenti fisiche delle forze sono, invece:

$$q^{<\alpha>} = \frac{q^\alpha}{|\underline{d}^\alpha|} = q^\alpha |\bar{\partial}_\alpha| \quad (4.22)$$

Consideriamo il peso proprio della struttura (carico verticale):

$$\bar{q} = q^z \bar{e}_z \quad (4.23)$$

dove:

$$q^z = 2\varepsilon \gamma_m \quad (4.24)$$

con 2ε spessore della calotta e γ_m peso specifico del materiale della calotta.

Le componenti del peso proprio rispetto alla base locale sono:

$$q^{<\theta>} = Rq^\theta = -Rq^z \sin\theta^\dagger \quad (4.25)$$

$$q^{<\xi>}_p = q^\xi_p = q^z \cos\theta^\dagger \quad (4.26)$$

I carico dell'acqua è idrostatico, diretto nella direzione radiale della calotta:

$$q^{<\xi>}_w = q^\xi_w = \gamma_w R \cos\theta^\dagger \quad (4.27)$$

dove γ_w è il peso specifico dell'acqua.

La componente radiale totale del carico è, dunque:

$$q^{<\xi>} = q^\xi_w + q^\xi_p = (\gamma_w R + 2\varepsilon \gamma_m) \cos\theta^\dagger = (\gamma_w R + q^z) \cos\theta^\dagger \quad (4.28)$$

Perciò

$$q^{<>} = (\gamma_w R + q^z) \cos\theta^\dagger \bar{n} - q^z \sin\theta^\dagger \bar{\partial}\theta \quad (4.29)$$

Risolviamo la seconda equazione di equilibrio (4.18):

$$\frac{N^{<\theta\theta>}}{R} + \frac{N^{<\phi\phi>}}{R} - q^{<\xi>} = 0$$

in funzione di $N^{<\phi\phi>}$:

$$N^{<\phi\phi>} = R q^{<\xi>} - N^{<\theta\theta>} \quad (4.30)$$

La prima equazione delle (4.18) diventa, tenendo conto della (4.21):

$$\left(\frac{N^{<\theta\theta>}}{R^2}\right)_{,\theta} + \cot\theta^\dagger \frac{N^{<\theta\theta>}}{R^2} - \cot\theta^\dagger \frac{N^{<\phi\phi>}}{R^2} + \frac{q^{<\theta>}}{R} = 0$$

Ossia, sostituendo la (4.30):

$$\begin{aligned} & (N^{<\theta\theta>})_{,\theta} + \cot\theta^\dagger N^{<\theta\theta>} - \cot\theta^\dagger N^{<\phi\phi>} + R q^{<\theta>} = \\ & = (N^{<\theta\theta>})_{,\theta} + \cot\theta^\dagger N^{<\theta\theta>} - \cot\theta^\dagger (R q^{<\xi>} - N^{<\theta\theta>}) + R q^{<\theta>} = \\ & = (N^{<\theta\theta>})_{,\theta} + 2\cot\theta^\dagger N^{<\theta\theta>} + R (q^{<\theta>} - \cot\theta^\dagger q^{<\xi>}) = 0 \end{aligned} \quad (4.31)$$

Sostituendo nella (4.31) le espressioni (4.25) e (4.28) dei carichi, otteniamo:

$$(N^{<\theta\theta>})_{,\theta} + 2\cot\theta^\dagger N^{<\theta\theta>} = R \left(2\varepsilon \gamma_m \sin\theta^\dagger + \cot\theta^\dagger \cos\theta^\dagger (\gamma_w R + 2\varepsilon \gamma_m) \right) \quad (4.32)$$

La (4.32) è un'equazione differenziale ordinaria del primo ordine, risolvendo la quale si ottiene $N^{<\theta\theta>}$ (sforzo di meridiano). Premoltiplicando a sinistra e a destra dell'uguale per $\sin^2\theta^\dagger$ si ottiene:

$$\begin{aligned} & \sin^2\theta^\dagger (N^{<\theta\theta>})_{,\theta} + 2\sin\theta^\dagger \cos\theta^\dagger N^{<\theta\theta>} \\ & = R \left(2\varepsilon \gamma_m \sin^3\theta^\dagger + \sin\theta^\dagger \cos^2\theta^\dagger (\gamma_w R + 2\varepsilon \gamma_m) \right) \end{aligned} \quad (4.33)$$

Ossia:

$$(\sin^2\theta^\dagger N^{<\theta\theta>})_{,\theta} = R \left(2\varepsilon \gamma_m \sin^3\theta^\dagger + \sin\theta^\dagger \cos^2\theta^\dagger (\gamma_w R + 2\varepsilon \gamma_m) \right) \quad (4.34)$$

Integriamo la 4.33 una porzione di calotta sferica compresa fra l'angolo $\theta^\dagger = 0$ e $\theta^\dagger = \theta$:

$$\begin{aligned} \sin^2\theta N^{<\theta\theta>} &= R \int_0^\theta \left(q^z \sin^2\theta^\dagger + \cos^2\theta^\dagger (\gamma_w R + q^z) \right) \sin\theta^\dagger d\theta^\dagger \\ &= R \int_0^\theta [q^z + \gamma_w R \cos^2\theta^\dagger] \sin\theta^\dagger d\theta^\dagger \\ &= -Rq^z [\cos\theta^\dagger]_0^\theta + \gamma_w R^2 \int_0^\theta (\cos^2\theta^\dagger \sin\theta^\dagger) d\theta^\dagger \\ &= Rq^z(1 - \cos\theta) + \gamma_w R^2 \left[\left(-\frac{1}{3} \cos^3\theta^\dagger \right)_0^\theta \right] \\ &= Rq^z(1 - \cos\theta) + \frac{\gamma_w R^2}{3} [1 - \cos^3\theta] \end{aligned}$$

Si può scrivere:

$$\begin{aligned} N^{<\theta\theta>} &= Rq^z \frac{(1 - \cos\theta)}{\sin^2\theta} + \frac{\gamma_w R^2 (1 - \cos^3\theta)}{3 \sin^2\theta} \\ &= \frac{Rq^z}{(1 + \cos\theta)} + \frac{\gamma_w R^2}{3} \left[\frac{1}{(1 + \cos\theta)} + \cos\theta \right] \end{aligned}$$

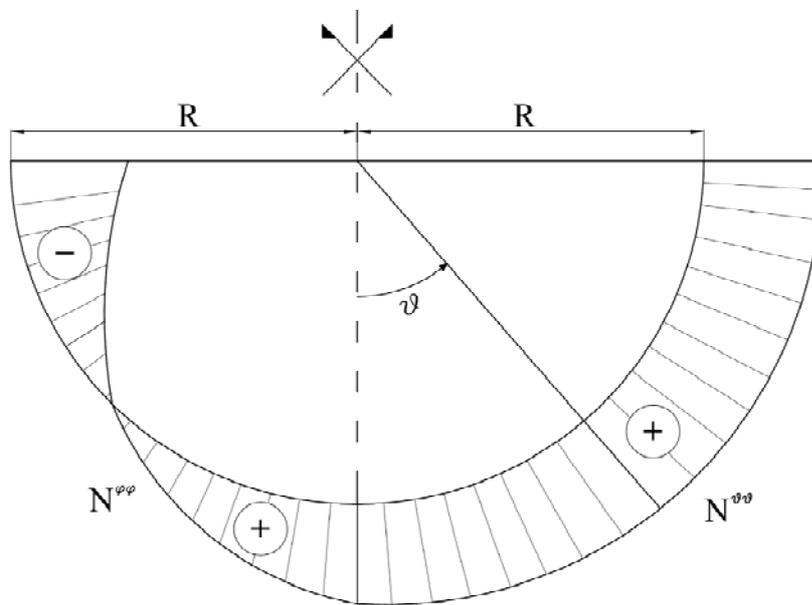
$$= \frac{2\varepsilon \gamma_m R}{(1 + \cos\theta)} + \frac{\gamma_w R^2}{3} \left[\frac{1}{(1 + \cos\theta)} + \cos\theta \right] \quad (4.35)$$

$N^{<\phi\phi>}$ (sforzo di parallelo) si ottiene sostituendo $N^{<\theta\theta>}$ nella (4.30).

$$\begin{aligned} N^{<\phi\phi>} &= R(\gamma_w R + q^z) \cos\theta - \frac{Rq^z}{(1 + \cos\theta)} - \frac{\gamma_w R^2}{3} \left[\frac{1}{(1 + \cos\theta)} + \cos\theta \right] \\ &= -Rq^z \left(\frac{\sin^2\theta - \cos\theta}{1 + \cos\theta} \right) - \frac{\gamma_w R^2}{3} \left[\frac{1}{(1 + \cos\theta)} - 2\cos\theta \right] \quad (4.36) \end{aligned}$$

Si noti che nel caso in cui $\gamma_w = 0$ (assenza di acqua), le (4.35) e (4.36) coincidono con la soluzione classica di calotta sottoposta al solo peso proprio.

La distribuzione dell'andamento degli sforzi è illustrata nel seguente grafico:



[fig. 4.2 –Grafico andamento degli sforzi]

In cui gli sforzi assumono i seguenti valori al variare di ϑ :

	$\vartheta=0$	$\vartheta = \pi/2$
$N^{\vartheta\vartheta}$	$\varepsilon\gamma_m R + \frac{\gamma_w R^2}{2}$	$2\varepsilon\gamma_m R + \frac{\gamma_w R^2}{3}$
$N^{\varphi\varphi}$	$\varepsilon\gamma_m R + \frac{\gamma_w R^2}{2}$	$-(2\varepsilon\gamma_m R + \frac{\gamma_w R^2}{3})$

5. Bibliografia

- [1] Marco Modugno, *“Notes on geometry of surfaces”*, notes for students used in the course of Mathematical Physics for Civil Engineers, 2009.
- [2] Marco Modugno, *“Introduzione alla meccanica dei sistemi continui”*, appunti per gli studenti, 2009.
- [3] Enzo Marino, *“A short introduction to linear shell theory”*, 2009.
- [4] Ladislav Fischer, *“Theory and practice of shell structures”*, Wilhelm Ernst&Sons, 1968.
- [5] A.E. Green, W. Zerna, *“Theoretical elasticity”*, Clarendon press, 1968.