

Gusci Elastici Sottili

Teoria Lineare, Applicazioni, Confronti Analitici e
Computazionali

Enzo Marino¹ Enzo Saponara²

5 Aprile 2004

Ultima modifica 9 ottobre 2007

Università degli Studi di Firenze



Facoltà di Ingegneria

Corso di laurea in Ingegneria Civile

Corso di Meccanica Computazionale delle Strutture I

Professore
Claudio Borri

Revisore
Ing. Maurizio Orlando

¹enzo.marino@dicea.unifi.it

²enzo.saponara@gmail.com

Prefazione

L'obiettivo di questo lavoro è analizzare il comportamento statico dei gusci elastici sottili.

Per raggiungere questo risultato abbiamo scelto di seguire l'approccio metodologico più generale possibile. L'uso dei potenti mezzi dell'algebra tensoriale e della geometria differenziale delle superfici ci ha permesso, infatti, di poter condurre una trattazione rigorosa e formale, senza limitazioni a priori sulla geometria e sulle condizioni di carico.

Questo lavoro certamente non aggiunge nulla di innovativo alla teoria dei gusci, ma a nostro parere rappresenta l'essenza di uno studio costruttivo e interdisciplinare.

Consultare una densa bibliografia sulla teoria dei gusci, provando a riscriverne una sintesi rigorosa e coerente, talvolta con nomenclatura e simbologia inconsuete nella letteratura ingegneristica, non è stato facile.

Così, esiste una particolare e imprescindibile gratificazione che questo lavoro ci regala.

La consapevolezza di aver commesso senz'altro errori di forma e di contenuto e di non aver sufficientemente approfondito alcuni argomenti è motivo di stimolo a migliorare e proseguire questo lavoro in ogni possibile direzione.

Ringraziamenti

E' doveroso ringraziare il Prof. Claudio Borri, che ci ha dato la libertà e l'entusiasmo per intraprendere questo progetto; il Prof. Marco Modugno, che oltre ad aver ampliato le nostre conoscenze fisico-matematiche, ci ha stimolati alla coerenza e al rigore scientifico; l'Ing. Maurizio Orlando che pazientemente ci ha seguiti durante tutta la parte computazionale; il Dr. Marco Spadini per la disponibilità e l'aiuto all'utilizzo di LaTeX.

Enzo Marino, Enzo Saponara
Firenze, 5 Aprile 2004

Indice

Introduzione	4
1 Geometria	5
1.1 Superfici	5
1.2 Derivata covariante e Gauss Splitting	7
2 Spostamenti e deformazioni	11
2.1 Il tensore delle deformazioni	11
2.2 Sistemi di coordinate e basi	13
2.3 Campo di spostamenti	13
3 Equilibrio	17
3.1 Shifters	17
3.2 Integrazione sullo spessore delle forze di superficie	18
3.3 Le forze di volume e la densità di carico	21
3.4 Equilibrio	21
4 Legame costitutivo	25
5 Stati di sforzo membranale	26
5.1 Applicazioni	26
5.1.1 Duomo sferico	26
5.1.2 Duomo sferico: confronto analitico e numerico	28
Condizione di carico assialsimmetrica: carico verticale costante distribuito uniformemente sul guscio. (Peso proprio)	28
ESEMPIO APPLICATIVO	31
Condizione di carico assialsimmetrica: carico verticale costante distribuito sulla proiezione orizzontale della superficie del guscio	36
ESEMPIO APPLICATIVO	37
5.1.3 Cilindro	42
5.1.4 Cilindro: confronto analitico e numerico	43
Condizione di carico assialsimmetrica: pressione uniforme es- ercitata da un gas più peso proprio	43
ESEMPIO APPLICATIVO	45
Condizione di carico assialsimmetrica: pressione idrostatica più peso proprio	50
ESEMPIO APPLICATIVO	51
5.1.5 Iperboloide di rivoluzione soggetto a peso proprio	57
ESEMPIO APPLICATIVO	61

6	Influenza degli effetti di bordo sul regime di sforzi membranale	67
6.1	Effetti di bordo indotti da incastri alla base in duomo sferico soggetto al peso proprio	67
6.2	Effetti di bordo indotti da incastri alla base in un cilindro soggetto ad una pressione idrostatica e al peso proprio	70

Introduzione

Per giungere alle equazioni generali che risolvono il problema dell'elastostatica dei gusci abbiamo seguito un approccio classico per la meccanica dei continui: deformazioni, equilibrio, legame. Tuttavia, a differenza di quanto accade per lo studio di strutture costituite da elementi monodimensionali o bidimensionali piani, per i gusci è necessaria una particolare attenzione alle conseguenze che sistemi di coordinate non cartesiani comportano durante la trattazione analitica. E' inevitabile infatti -scelto questo approccio- l'utilizzo di una formulazione tensoriale del problema con continui riferimenti alla geometria differenziale.

Per questo motivo abbiamo dedicato il primo capitolo ai richiami sulla teoria delle superfici, in particolare alla derivazione covariante.

Tutta la trattazione assume un modello matematico fondato sulle seguenti ipotesi

- Guscio sottile: $(2\epsilon)/L \ll 1$ dove L è una dimensione caratteristica del guscio e (2ϵ) è lo spessore;
- Teoria lineare: gli spostamenti sono piccoli, il loro prodotto è trascurabile, l'equilibrio è scrivibile nella configurazione indeformata;
- Spessore del guscio costante;
- Materiale elastico omogeneo e isotropo.

Un'altra fondamentale ipotesi che classifica la teoria come di *Kirchoff-Love* è

- Le fibre materiali inizialmente ortogonali alla superficie media del guscio rimangono ortogonali ad essa durante la deformazione. Inoltre la distanza di $P^* \in G(\epsilon)$ dalla superficie Q rimane costante.

Come esempi applicativi abbiamo scelto un duomo sferico, un cilindro ed un iperboloide di rotazione caricati in modo da ottenere sempre un comportamento di tipo membranale. Per ogni esempio abbiamo calcolato analiticamente gli stati di sforzo e il campo di spostamenti. Infine si è condotto un confronto fra le soluzioni analitiche e i risultati numerici prodotti da FEMAS90 e SAP2000.

L'uso di due codici di calcolo è stato necessario per determinare l'accuratezza dei risultati derivanti da una mesh con elementi a doppia curvatura (NACS48 del FEMAS90) e elementi piani (SHELL del SAP2000).

L'ultimo capitolo contiene dei cenni sugli effetti di bordo, in particolare l'influenza di diverse condizioni di vincolo al contorno.

1 Geometria

In questo capitolo si richiamano solo alcuni concetti fondamentali di geometria differenziale. Per una trattazione completa si rimanda alle dispense del Prof. M. Modugno *Notes on geometry of surfaces*. Vedi [5].

Definizione 1. *Definiamo una regione a forma di guscio modellata su una sottovarietà Q ed avente spessore 2ϵ , un continuo $G(\epsilon)$ immerso nello spazio ambiente affine euclideo E per il quale esiste, almeno localmente, un sistema di coordinate $\Theta : G(\epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3$.*

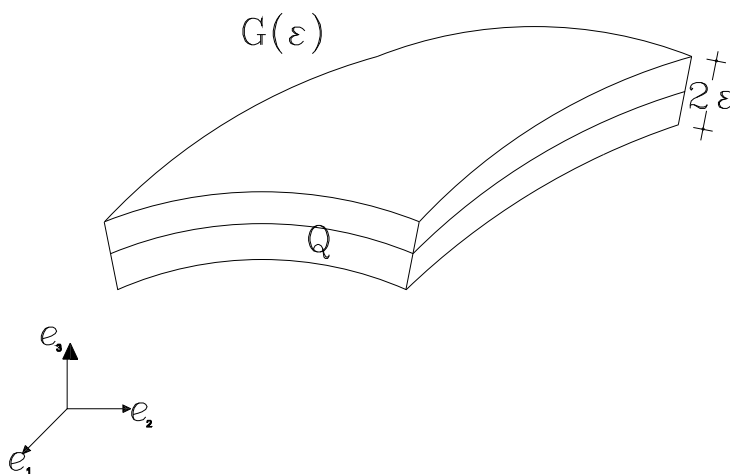


Figura 1: Guscio.

1.1 Superfici

Definizione 2. *Definiamo la sottovarietà $Q \subset M$ una ipersuperficie se ha codimensione 1.*

Osservazione 1. *Se $M \equiv E$, Q è una superficie. ($\dim Q = 2$).*

La varietà M è descritta da un sistema di coordinate adattato

$$X : M \rightarrow \mathbb{R}^m : P \mapsto x^i(P)$$

La superficie Q è descritta da un sistema di coordinate indotto³

$$X^\dagger : Q \rightarrow \mathbb{R}^q : P \mapsto x^\alpha(P)$$

³Il sistema di coordinate indotto ha dimensione $q = m - k$, dove m è la dimensione della varietà M e k è il numero di coordinate vincolari o codimensione di Q . Essendo $M \equiv E$, nel nostro caso, Q è una superficie bidimensionale, ovvero $m = 3$, $k = 1$, $q = 2$.

In seguito useremo la convenzione di indicare le componenti di X^\dagger , cioè le quantità che vivono su Q , con gli indici greci (variabili da 1 a 2), mentre le componenti delle entità che vivono in E o in $T_Q E$ con gli indici latini (variabili da 1 a 3).⁴

Definizione 3. Definiamo il campo vettoriale unitario normale come il campo

$$n : Q \rightarrow TQ^\perp \text{ tale che } g(n, n) = 1.$$

Il campo n esiste globalmente a meno del segno. Ricordiamo che g è la metrica su E definita come una forma bilineare simmetrica e definita positiva

$$g : TE \times TE \rightarrow \mathbb{R}$$

che in componenti si scrive

$$g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j$$

Analogamente sulla sottovarietà Q esiste una metrica Riemanniana indotta

$$g^\dagger : TQ \times TQ \rightarrow \mathbb{R}$$

che in componenti si scrive

$$g^\dagger = g_{\alpha\beta} dx^\alpha \otimes dx^\beta$$

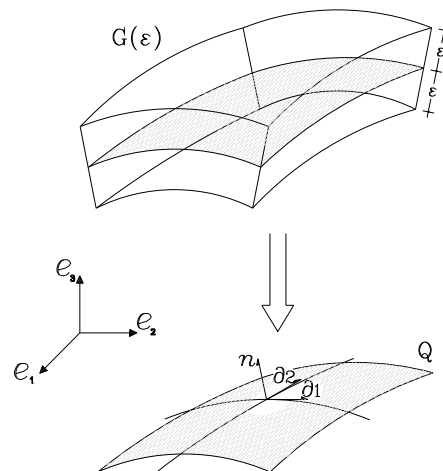


Figura 2: Riduzione del guscio alla sottovarietà Q .

⁴Il simbolo \dagger sarà convenzionalmente usato per indicare grandezze vincolate alla sottovarietà.

1.2 Derivata covariante e Gauss Splitting

Proposizione 1. Per ogni campo vettoriale $X : E \rightarrow TE$ e per ogni campo tensoriale $t : E \rightarrow \otimes^k TE$, la derivata covariante $\nabla_X t$, in un sistema di coordinate generale, si scrive

$$\nabla_X t = X^j (\partial_j t^{i_1 \dots i_k} + \Gamma_{jh}^{i_1} t^{hi_2 \dots i_k} + \dots + \Gamma_{jh}^{i_k} t^{i_1 \dots i_{k-1} h}) \partial x_{i_1} \otimes \dots \otimes \partial x_{i_k}$$

e per ogni campo $X : E \rightarrow TE$ e $t : E \rightarrow \otimes^k T^*E$,

$$\nabla_X t = X^j (\partial_j t_{i_1 \dots i_k} - \Gamma_{j i_1}^h t_{hi_2 \dots i_k} - \dots - \Gamma_{j i_k}^h t_{i_1 \dots i_{k-1} h}) dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_k},$$

dove

$$\Gamma_{ij}^h = (\nabla_{\partial_{x_i}} \partial x_j)^h = -(\nabla_{\partial_{x_i}} dx^h)_j.$$

Proposizione 2. L'espressione in coordinate dei coefficienti Γ_{ij}^h della connessione lineare ∇ è

$$\Gamma_{ij}^h = \frac{1}{2} g^{hk} (\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}).$$

Siano $X : Q \rightarrow TQ$ e $Y : Q \rightarrow TQ$ due campi vettoriali su Q . Vale la seguente scomposizione

$$\nabla_X Y = \nabla_X^{\parallel} Y + \nabla_X^{\perp} Y \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \nabla_X^{\parallel} Y &= \pi^{\parallel}(\nabla_X Y) : Q \rightarrow TQ \\ \nabla_X^{\perp} Y &= \pi^{\perp}(\nabla_X Y) : Q \rightarrow TQ^{\perp} \end{aligned}$$

Teorema 1. L'applicazione

$$\nabla^{\parallel} := TQ \times TQ \rightarrow TQ : (X, Y) \mapsto \nabla_X^{\parallel} Y$$

è una Connessione di Riemann su Q . Pertanto $\nabla^{\parallel} = \nabla^{\dagger}$

Ricordiamo che una connessione si dice riemanniana se ha torsione nulla e se $\nabla g = 0$.

Una conseguenza della torsione nulla è la simmetria dei coefficienti Γ della connessione medesima (simboli di *Christoffel*).

Definizione 4. *Definiamo Seconda forma fondamentale l'applicazione*

$$N = \nabla^\perp : TQ \times TQ \rightarrow TQ^\perp : (X, Y) \mapsto \nabla_X^\perp Y$$

Dalla (1) segue allora la decomposizione di *Gauss*

$$\nabla_X Y = \nabla_X^\dagger Y + N(X, Y) \quad (2)$$

Definizione 5. *Definiamo l'applicazione di Weingarten su Q l'endomorfismo*

$$L := \nabla n : TQ \rightarrow TQ : X \mapsto \nabla_X n$$

Sia inoltre \underline{L} il tensore covariante associato ad L dalla metrica indotta g^\dagger

$$\underline{L} := \nabla \underline{n} : TQ \times TQ \rightarrow \mathbb{R} : (X, Y) \mapsto g(L(X), Y) = \nabla_X \underline{n}(Y)$$

Dove $\underline{n} = g^\flat(n)$, essendo g la metrica del sistema di coordinate adattato di E .

Proposizione 3. *Dati due campi vettoriali X, Y su Q , si ha*

$$\underline{L}(X, Y) = -g(\nabla_X Y, n) = -g(\nabla_Y X, n)$$

Dim.: La prima uguaglianza si dimostra partendo dalla definizione di \underline{L} e usando una proprietà della connessione lineare ∇ :

$$X.(g(Y, n)) = g(\nabla_X Y, n) + g(Y, \nabla_X n) \Rightarrow g(\nabla_X Y, n) = -g(Y, \nabla_X n)$$

La simmetria di \underline{L} è immediata dalla simmetria della metrica g .◁

Quest'ultima importante proposizione mostra come \underline{L} rappresenti la componente normale alla sottovarietà Q della derivata covariante di un generico campo vettoriale Y su Q rispetto ad un altro campo X .

Pertanto la scomposizione di *Gauss* può essere alternativamente letta come

$$\nabla_X Y = \nabla_X^\dagger Y - \underline{L}(X, Y)n \quad (3)$$

Dato l'uso frequente che in seguito faremo delle (2) e (3) scritte in componenti, ne riportiamo lo sviluppo.

Supponiamo $\{\partial x_\alpha\}$ sia una base associata al sistema di coordinate superficiali indotte.

$$\begin{aligned} \nabla_{\partial x_\beta} \partial x_\alpha &= \nabla_{\partial x_\beta}^\dagger \partial x_\alpha + N(\partial x_\beta, \partial x_\alpha) \\ &= \nabla_{\partial x_\beta}^\dagger \partial x_\alpha - \underline{L}(\partial x_\beta, \partial x_\alpha)n \end{aligned}$$

Per ciascun termine abbiamo

$$\begin{aligned}\nabla_{\partial x_\beta}^\dagger \partial x_\alpha &= dx^\gamma(\partial x_\beta)(\partial_\gamma(dx^\omega(\partial x_\alpha)) + \Gamma_{\gamma\lambda}^\omega dx^\lambda(\partial x_\alpha))\partial x_\omega \\ &= \delta_\beta^\gamma(\Gamma_{\gamma\lambda}^\omega \delta_\alpha^\lambda)\partial x_\omega = \Gamma_{\beta\alpha}^\omega \partial x_\omega\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}N(\partial x_\beta, \partial x_\alpha) &= -\underline{L}(\partial x_\beta, \partial x_\alpha)n = -(\nabla_{\partial x_\alpha} n \cdot \partial x_\beta)n \\ &= -(L(\partial x_\alpha) \cdot \partial x_\beta)n = -(L_\alpha^\gamma \partial x_\gamma \cdot \partial x_\beta)n \\ &= -(L_\alpha^\gamma g_{\gamma\beta})n = -L_{\alpha\beta}n\end{aligned}$$

Ripetendo la stessa scrittura in componenti per un elemento della base covariante, si ottiene

$$\begin{aligned}\nabla_{\partial x_\beta} \partial x_\alpha &= \Gamma_{\beta\alpha}^\omega \partial x_\omega - L_{\beta\alpha}n \\ \nabla_{\partial x_\beta} dx^\alpha &= -\Gamma_{\beta\lambda}^\alpha dx^\lambda - L_{\beta\underline{\alpha}}\underline{n}\end{aligned}$$

In seguito avremo spesso a che fare con campi di vettori che non appartengono allo spazio tangente della superficie.

Consideriamo allora un campo vettoriale $v \in T_Q E$, ossia v sta in E , ma è applicato in un punto di Q .

Il campo v può essere naturalmente scomposto in una componente parallela (tangente) e una ortogonale a Q

$$v = v^\parallel + v^\perp$$

Che in componenti si scrive

$$v = v^\alpha \partial x_\alpha + v^\xi n$$

Per quanto finora considerato, la derivata di v rispetto ad un generico campo vettoriale X su Q si scrive

$$\nabla_X v = \nabla_X v^\parallel + \nabla_X v^\perp = \nabla_X^\dagger v^\parallel - \underline{L}(X, v^\parallel)n + \nabla_X v^\perp \quad (4)$$

La (4) in componenti si scrive

$$\nabla_X v = X^\beta ((\partial_\beta v^\alpha + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha v^\gamma + v^\xi L_\beta^\alpha) \partial x_\alpha + (\partial x_\beta \cdot v^\xi - \underline{L}_{\alpha\beta} v^\alpha) n)$$

Analoghe espressioni si ottengono per la forma $\underline{v} \in T_Q^* E$ duale di v

$$\nabla_X \underline{v} = \nabla_X \underline{v}^\parallel + \nabla_X \underline{v}^\perp = \nabla_X^\dagger \underline{v}^\parallel - \underline{L}(X, \underline{v}^\parallel)\underline{n} + \nabla_X \underline{v}^\perp \quad (5)$$

Che in componenti si scrive

$$\nabla_X \underline{v} = X^\beta (\partial_\beta v_\alpha - \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma v_\gamma + v_\xi L_{\beta\gamma}^\xi) dx^\gamma + X^\beta (\partial_{x_\beta} v_\xi - L_\beta^\alpha v_\alpha) \underline{n}$$



2 Spostamenti e deformazioni

2.1 Il tensore delle deformazioni

Per una maggiore chiarezza presentiamo qualche teorema e definizione fondamentali che assumeremo per giungere alla tradizionale espressione del tensore delle deformazioni.

Definizioni e teoremi ripresi da [4].

Definizione 6. *Definiamo il dominio spaziale all'istante $t \in T$ il sottoinsieme*

$$D_t \in P$$

costituito dalle posizioni occupate dalle particelle del continuo a tale istante. Definiamo, inoltre, il dominio spazio temporale come il sottoinsieme

$$D := \{(t, p) \in T \times P \mid t \in T, p \in D_t\} \subset T \times P.$$

Dove T è lo spazio affine del tempo, e P è lo spazio affine euclideo delle posizioni⁵.

Definizione 7. *Definiamo lo jacobiano come il campo tensoriale*

$$\mathcal{J} := \check{D}C : T \times D \rightarrow \overline{P}^* \otimes \overline{P}.$$

Dove $\check{D}C$ è la derivata spaziale del moto C di una particella p definito come l'applicazione $C : T \times D \rightarrow P$.

\overline{P} e \overline{P}^* sono rispettivamente lo spazio vettoriale e il suo duale associati allo spazio affine P .

Definizione 8. *Definiamo il tensore delle deformazioni finite di un moto continuo come l'applicazione*

$$\underline{\mathcal{E}} := g \circ (\mathcal{J} \times \mathcal{J}) : T \times D \rightarrow \overline{P}^* \otimes \overline{P}^*.$$

Il tensore $\underline{\mathcal{E}}$ rappresenta il prodotto scalare tra due vettori trasformati durante il moto approssimato al prim'ordine attraverso lo jacobiano

$$\underline{\mathcal{E}}(s; t, p)(u, v) := u' \cdot v' := \mathcal{J}(s; t, p)(u) \cdot \mathcal{J}(s; t, p)(v)$$

Pertanto, fissato una particella del dominio spaziale, fissati l'istante iniziale e finale del moto, il tensore delle deformazioni è l'applicazione bilineare

$$\underline{\mathcal{E}}(s; t, p) : \overline{P} \times \overline{P} \rightarrow \mathbb{R}$$

A tale forma è associato l'endomorfismo di deformazione

$$\mathcal{E} := T \times D \rightarrow L(\overline{P}, \overline{P}) \simeq \overline{P}^* \otimes \overline{P}$$

⁵ P può coincidere con lo spazio affine ambiente E , usato altrove in questo testo

Si dimostra che il tensore delle deformazioni infinitesime può essere scritto nelle forma

$$\gamma = \frac{1}{2}\delta\Delta\mathcal{E}$$

Cioè γ è pari alla metà della derivata particellare del tensore $\Delta\mathcal{E}$, il quale misura la differenza tra il prodotto scalare dei vettori trasformati tramite il moto e il prodotto scalare tra i vettori originali.

Per derivata particellare s'intende la derivata rispetto all'istante finale.

$$\Delta\underline{\mathcal{E}} := \underline{\mathcal{E}} - g : T \times D \rightarrow \overline{P}^* \otimes \overline{P}^*$$

$$\Delta\underline{\mathcal{E}}(s; t, p) = \underline{\mathcal{E}}(s; t, p) - \underline{\mathcal{E}}(t; t, p) = \underline{\mathcal{E}}(s; t, p) - g$$

Dove $s \in T$, $(t, p) \in D$.

A questo punto introduciamo l'ipotesi di *spostamento infinitesimo quasi statico*.

Quello che ci interessa nella trattazione della meccanica dei gusci (e dei continui in generale) è solo il confronto dello stato deformato con quello indeformato, senza interessarsi a ciò che succede nelle fasi intermedie. Segue pertanto una procedura che oltre a tenere conto dello spostamento infinitesimo trascura gli istanti di tempo che caratterizzano le configurazioni del continuo.

Siano $s \in T$ e $t \in T$ rispettivamente l'istante finale e iniziale tali che $\Delta t = s - t \in \overline{T}$ e $u = S(s, t) : D_t \rightarrow \overline{P}$ lo spostamento.

Trascurando gli infinitesimi di ordine superiore Δt possiamo scrivere

$$u \simeq v_t \Delta t$$

Dove v è la velocità del moto.

Di conseguenza si ottiene

$$\Delta\underline{\mathcal{E}}(s, t) := \underline{\mathcal{E}}(s, s) - \underline{\mathcal{E}}(t; t) \simeq 2\gamma\Delta t = 2SimD\underline{u}$$

Trascurando i riferimenti agli istanti iniziali e finali, poniamo le sostituzioni simboliche

$$\Delta\underline{\mathcal{E}}(s, t) \rightarrow \Delta\underline{\mathcal{E}} \quad \underline{\gamma}_t \Delta t \rightarrow \underline{\gamma}$$

Siamo così arrivati a poter scrivere l'espressione del tensore delle deformazioni infinitesime che useremo per descrivere lo stato di deformazione del continuo a forma di guscio $G(\epsilon)$

$$\gamma = \frac{1}{2}(\overline{g}^* - g^*) \tag{6}$$

Dove $\bar{g}^* = \underline{\mathcal{E}}(s, s)$ rappresenta la metrica nella configurazione deformata (all'istante finale s).⁶

La stella indica che la metrica è quella associata alle basi nel guscio $G(\epsilon)$.

2.2 Sistemi di coordinate e basi

Per descrivere i campi vettoriali su Q useremo la base superficiale $\{\partial x_\alpha\}$ del sistema di coordinate indotte X^\dagger . I vettori dello spazio $T_Q E$, invece, verranno sistematicamente scomposti nella componente parallela e quella ortogonale. Si definisce quindi un sistema di coordinate tale da descrivere il solido tridimensionale a forma di guscio $G(\epsilon)$

$$(x^{*\alpha}, \xi) : G(\epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3$$

a cui è associata la base $\{\partial x_\alpha^*, n\}$, con n il campo vettoriale unitario normale a Q .

2.3 Campo di spostamenti

Un generico $P^* \in G(\epsilon)$ è individuato, rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano globale, da un vettore r^* tale che

$$r^* = r + \xi_1 n \quad \text{con} \quad \xi_1 \in (-\epsilon, \epsilon) \quad (7)$$

Dove r è il vettore espresso nel sistema cartesiano che individua la proiezione ortogonale P su Q di P^* .

Supponiamo che un moto "quasi statico" induca una deformazione del guscio tale che, rispetto al sistema di riferimento globale cartesiano, si ha

$$\bar{r}^* = \bar{r} + \xi_2 \bar{n} \quad \text{con} \quad \xi_2 \in (-\epsilon, \epsilon) \quad (8)$$

Ipotesi 1. *Si assume che durante la deformazione la distanza di $P^* \in G(\epsilon)$ dalla superficie Q rimanga costante. Pertanto*

$$\xi_1 = \xi_2 = \xi$$

Ipotesi 2. *(Kirchoff-Love) Le fibre materiali inizialmente ortogonali alla superficie media del guscio rimangono ortogonali ad essa durante la deformazione.*

$$\bar{g}(\partial x_\alpha, n) = \overline{\partial x_\alpha} \cdot \bar{n} = 0$$

⁶D'ora in avanti le quantità soprasssegnate si riferiscono alla configurazione deformata.

La (7) e la (8) individuano, per differenza, il vettore di spostamento relativo

$$\bar{r}^* - r^* = (\bar{r} - r) + \xi(\bar{n} - n)$$

Questa relazione ci permette di definire completamente il campo di spostamenti conoscendo i due campi vettoriali

$$\begin{aligned} v &= \bar{r} - r \quad \text{con } v \in T_Q E \\ w &= \bar{n} - n \quad \text{con } w \in TQ \end{aligned}$$

Procediamo nel calcolo delle componenti del tensore γ .

Le basi indotte dai sistemi di coordinate (x^α) e (x^α, ξ) si ottengono usando le matrici jacobiane del cambiamento di coordinate⁷

$$\begin{aligned} \partial x_\alpha &= r_{,\alpha} \\ \partial x_\alpha^* &= \partial x_\alpha + \xi \nabla_{\partial x_\alpha} n \end{aligned}$$

Analogamente per la configurazione deformata scriviamo

$$\begin{aligned} \bar{\partial} x_\alpha &= \bar{r}_{,\alpha} \\ \bar{\partial} x_\alpha^* &= \bar{\partial} x_\alpha + \xi \nabla_{\bar{\partial} x_\alpha} \bar{n} \end{aligned}$$

Sostituendo queste espressioni nella (6) scritta in componenti, trascurando gli infinitesimi del second'ordine e sfruttando l'ipotesi (1), si ottiene

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2}(\bar{g}_{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta}) + \frac{1}{2}\xi(\bar{\partial} x_\alpha \cdot \nabla_{\bar{\partial} x_\alpha} \bar{n} + \bar{\partial} x_\beta \cdot \nabla_{\bar{\partial} x_\beta} \bar{n} - (\partial x_\alpha \cdot \nabla_{\partial x_\alpha} n + \partial x_\beta \cdot \nabla_{\partial x_\beta} n))$$

Definizione 9. *Definiamo*

$$\alpha_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\bar{g}_{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta})$$

primo tensore delle deformazioni (stretching strain tensor);

$$\omega_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\bar{\partial} x_\alpha \cdot \nabla_{\bar{\partial} x_\alpha} \bar{n} + \bar{\partial} x_\beta \cdot \nabla_{\bar{\partial} x_\beta} \bar{n} - (\partial x_\alpha \cdot \nabla_{\partial x_\alpha} n + \partial x_\beta \cdot \nabla_{\partial x_\beta} n))$$

secondo tensore delle deformazioni (bending strain tensor).

⁷ $r_{,\alpha} = \frac{r^i}{\partial x^\alpha} \partial x_i$

Si osservi come il primo tensore delle deformazioni descriva solamente la deformazione estensionale subita dalla superficie media. Esso coinvolge solo la prima forma fondamentale e non dipende dalla curvatura della superficie. Il secondo tensore delle deformazioni, invece, descrive la deformazione di superfici omotetiche ($\xi = cost$) includendo i contributi dovuti alla curvatura. Allora possiamo scrivere

$$\gamma_{ij} = \gamma_{\alpha\beta} = \alpha_{\alpha\beta} + \xi\omega_{\alpha\beta}$$

Osserviamo che l'ipotesi di *Kirchhoff-Love* ci permette di ridurre il tensore delle deformazioni γ ad un tensore superficiale espresso nella base $\{\partial x_\alpha \otimes \partial x_\beta\}$. Ora possiamo sostituire nelle espressioni generali dei tensori α e ω i campi di spostamenti v e w così come li abbiamo definiti. Tenendo conto che

$$\bar{\partial}x_\alpha = \bar{r}_{,\alpha} = (r + v)_{,\alpha} = \partial x_\alpha + v_{,\alpha}$$

Si ottiene

$$\begin{aligned} \alpha_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}(\bar{g}_{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta}) \\ &= \frac{1}{2}((\partial x_\alpha + v_{,\alpha}) \cdot (\partial x_\beta + v_{,\beta}) - \partial x_\alpha \cdot \partial x_\beta) \\ &= \frac{1}{2}(\partial x_\alpha \cdot v_{,\beta} + \partial x_\beta \cdot v_{,\alpha}) \end{aligned}$$

Da cui ricordando l'espressione in componenti della derivata α -esima⁸ del campo $v \in T_Q E$, si ottiene

$$\alpha_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\partial x_\alpha \cdot \nabla_{\partial x_\beta}^\dagger v^\parallel + \partial x_\beta \cdot \nabla_{\partial x_\alpha}^\dagger v^\parallel + 2L_{\alpha\beta} v^\xi)$$

Da cui

$$\alpha_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\nabla_\beta^\dagger v_\alpha + \nabla_\alpha^\dagger v_\beta + 2L_{\alpha\beta} v^\xi) \quad (9)$$

Per ω otteniamo

⁸Facciamo presente l'abuso di notazione per $v_{,\alpha}$ dove la virgola non indica la derivata parziale.

$$\begin{aligned}
\omega_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}(\bar{\partial}x_\alpha \cdot \nabla_{\bar{\partial}x_\alpha} \bar{n} + \bar{\partial}x_\beta \cdot \nabla_{\bar{\partial}x_\beta} \bar{n} - (\partial x_\alpha \cdot \nabla_{\partial x_\alpha} n + \partial x_\beta \cdot \nabla_{\partial x_\beta} n)) \\
&= \frac{1}{2}(\partial x_\alpha \cdot \nabla_{\partial x_\beta} (n+w) + v_{,\alpha} \cdot \nabla_{\partial x_\beta} (n+w) \\
&\quad + \partial x_\beta \cdot \nabla_{\partial x_\alpha} (n+w) + v_{,\beta} \cdot \nabla_{\partial x_\alpha} (n+w) \\
&\quad - (\partial x_\alpha \cdot \nabla_{\partial x_\beta} n + \partial x_\beta \cdot \nabla_{\partial x_\alpha} n))
\end{aligned}$$

Considerando che la derivazione avvenga sempre rispetto alla base indeformata, trascurando il prodotto tra gli spostamenti, ricordando l'espressione in componenti della derivata covariante di v , si ottiene

$$\omega_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\partial x_\alpha \cdot \nabla_{\partial x_\beta}^\dagger w + \partial x_\beta \cdot \nabla_{\partial x_\alpha}^\dagger w + (\nabla_{\partial x_\alpha}^\dagger v^\parallel)^\gamma L_{\beta\gamma} + (\nabla_{\partial x_\beta}^\dagger v^\parallel)^\gamma L_{\alpha\gamma} + 2v^\xi L_{\alpha\omega} L_{\beta}^\omega)$$

L'ipotesi (2) -di *Kirchhoff-Love*- comporta un'ulteriore semplificazione. Con le stesse approssimazioni degli sviluppi precedenti si osserva, infatti, che i campi v e w sono legati dalla relazione

$$\bar{\partial}x_\alpha \cdot \bar{n} = 0 \Rightarrow (\partial x_\alpha + v_{,\alpha}) \cdot (n+w) = 0 \Rightarrow$$

$$w_\alpha = L_{\alpha\beta} v^\beta - v^\xi_{,\alpha}$$

Considerando quest'ultima relazione, l'espressione in componenti di ω si legge

$$\omega_{\alpha\beta} = v^\gamma \nabla_\alpha^\dagger L_{\beta\gamma} + L_{\alpha\gamma} \nabla_\beta^\dagger v^\gamma + L_{\beta\gamma} \nabla_\alpha^\dagger v^\gamma + v^\xi L_{\alpha\gamma} L_{\beta}^\gamma - v^\xi_{,\alpha\beta} \quad (10)$$



3 Equilibrio

3.1 Shifters

La relazione che sussiste tra le basi (controvariante e covariante) in un punto $P^* \in G(\epsilon)$ e le basi nel punto P , proiezione di P^* su Q lungo la fibra normale ξ , è descritta da due tensori detti shifters

$$A(P, P^*) := \partial x_i^*(P^*) \otimes dx^i(P) \quad (11)$$

$$B(P, P^*) := dx^{i^*}(P^*) \otimes \partial x_i(P) \quad (12)$$

Tali che

$$A\partial x_j = \partial x_j^*$$

$$Bdx^j = dx^{j^*}$$

L'indice latino è variabile da 1 a 3, per cui $\{\partial x_\alpha, n\} = \{\partial x_i\}$. Analogamente per la base in P^* .

Si osservi che A è la matrice jacobiana del cambiamento di coordinate, pertanto una generica forma volume $\eta^*(P^*)$ si esprime rispetto al sistema di coordinate della superficie Q come

$$\eta^* = \det A \eta$$

Dove η è la corrispondente forma volume su Q .
In particolare abbiamo

$$dA^* = \det A dA$$

$$dV^* = \det A dV$$

Con dA^* e dV^* rispettivamente superficie e volume elementari in $G(\epsilon)$.

3.2 Integrazione sullo spessore delle forze di superficie

Assunta una curva $c : \mathbb{R} \rightarrow Q$ direttrice per un sistema di generatrici dirette come la curva coordinata ξ (normale) a Q , otteniamo la superficie normale Q_c di separazione tra due porzioni di guscio $G(\epsilon)$.

Ci interessiamo allo stato tensionale che le due porzioni si trasmettono.

Sia $\nu \in TQ$ la normale uscente dalla curva c in un punto P , $l \in TQ$ il versore tangente a C ; allora (ν, l, n) individuano una base locale in P . Una terna simile di versori si individua in P^* .

L'elemento orientato di area $dA^* \subset Q_c$ può essere espresso in funzione degli shiftersa A e B , in particolare abbiamo

$$\nu^* dA^* = B \underline{\nu} \det A dA$$

Dove $\underline{\nu} \in T^*Q$.

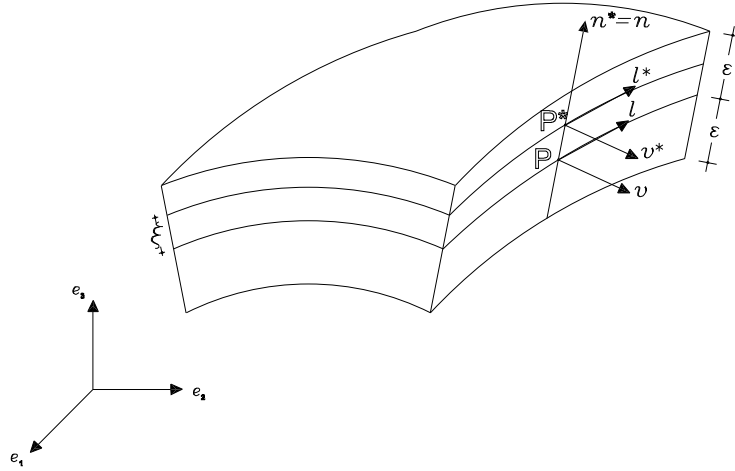


Figura 3: Basi locali in $G(\epsilon)$ e su Q .

Per il principio di *Cauchy* è noto che perchè il solido sia in equilibrio, la porzione di guscio separata dalla superficie Q_c esercita sull'altra porzione una tensione che in ogni punto P^* è descritta da un vettore t tale che

$$t(P^*, \nu^*) = \sigma(P^*) \nu^*$$

Dove σ è il tensore degli sforzi del continuo $G(\epsilon)$. Vedi figura 4.

Il nostro scopo è quello di "contrarre" lo stato di tensione distribuito sulla superficie Q_c in due campi vettoriali \mathbf{n} e \mathbf{m} dello spazio tangente.

$$\int_c \mathbf{n}(P, \nu) dl = \int_{Q_c} t(P^*, \nu^*) dA^* \quad (13)$$

$$\int_c \mathbf{m}(P, \nu) dl = \int_{Q_c} ((P^* - P) \times t(P^*, \nu^*)) dA^* \quad (14)$$

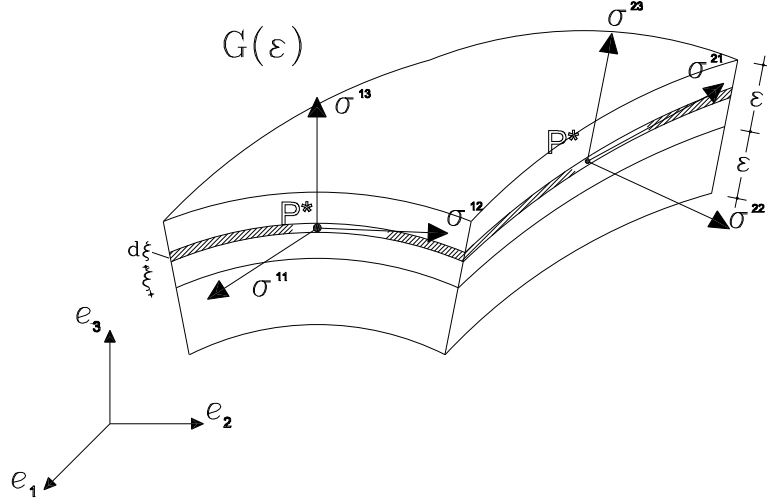


Figura 4: Componenti di sforzo nel continuo $G(\epsilon)$.

Il sistema \mathbf{n} e \mathbf{m} è pertanto equipollente al sistema t di tensioni distribuito lungo la fibra ξ per P .

Considerando il teorema di *Cauchy* e ricordando le proprietà degli shifters, le (13) e (14) diventano

$$\int_c \mathbf{n}(P, \nu) dl = \int_{Q_c} a \sigma^* B \nu d\xi dl \quad (15)$$

$$\int_c \mathbf{m}(P, \nu) dl = \int_{Q_c} n \times \xi a \sigma^* B \nu d\xi dl \quad (16)$$

Dove $\sigma(P^*) = \sigma^*$ e $a = \det A$.

Gli integrali di superficie al secondo membro della (15) e (16) possono sempre essere scomposti in due integrali semplici, infatti

$$\int_c \mathbf{n}(P, \nu) dl = \int_c \left(\int_{-\epsilon}^{\epsilon} (\sigma^* a B \nu) d\xi \right) dl \quad (17)$$

$$\int_c \mathbf{m}(P, \nu) dl = \int_c \left(n \times \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \xi a \sigma^* B \nu d\xi \right) dl \quad (18)$$

Da cui le espressioni dei campi \mathbf{n} e \mathbf{m} sono

$$\mathbf{n}(P, \nu) = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} (a \sigma^* B \nu) d\xi \quad (19)$$

$$\mathbf{m}(P, \nu) = n \times \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \xi a \sigma^* B \nu d\xi \quad (20)$$

Sostituendo la (12) nelle (16) (17) si ottiene

$$\begin{aligned}\mathbf{n}(P, \nu) &= \int_{-\epsilon}^{\epsilon} (a\sigma^*(dx^{i^*} \otimes \partial x_i)\nu)d\xi \\ \mathbf{m}(P, \nu) &= n \times \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \xi(a\sigma^*(dx^{i^*} \otimes \partial x_i)\nu)d\xi\end{aligned}$$

Da cui

$$\begin{aligned}\mathbf{n}(P, \nu) &= \left(\int_{-\epsilon}^{\epsilon} (a\sigma^* dx^{i^*})d\xi \otimes \partial x_i \right) \nu \\ \mathbf{m}(P, \nu) &= n \times \left(\int_{-\epsilon}^{\epsilon} (\xi a\sigma^* dx^{i^*})d\xi \otimes \partial x_i \right) \nu\end{aligned}$$

Definizione 10. *Definiamo \mathbf{n} e N rispettivamente vettore e tensore superficiale di sforzo.*

$$\mathbf{n}(P, \nu) = N\nu \quad (21)$$

Dove

$$N = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} (a\sigma^* dx^{i^*})d\xi \otimes \partial x_i \quad (22)$$

Dalla (21) e (22) si può provare che N è un tensore superficiale, infatti

$$Nn = \left(\int_{-\epsilon}^{\epsilon} (a\sigma^* dx^{i^*})d\xi \otimes \partial x_i \right) \underline{n} = \underline{n}(\partial x_i) \int_{-\epsilon}^{\epsilon} (a\sigma^* dx^{i^*})d\xi = 0$$

Si è fatta implicitamente l'ipotesi di $\sigma^{\xi\xi} = 0$, effetto dell'indeformabilità lungo ξ

Pertanto il tensore N risulta un'applicazione $N : Q \rightarrow L(T^*Q, T_Q E) \simeq TQ \otimes T_Q E$, e assume la forma

$$N = N^\alpha \otimes \partial x_\alpha \quad (23)$$

Dove le componenti del vettore N^α si scrivono

$$N^\alpha = N^{i\alpha} \partial x_i = N^{\beta\alpha} \partial x_\beta + N^{\xi\alpha} n$$

Definizione 11. *Definiamo \mathbf{m} e M rispettivamente vettore e tensore superficiale di coppia.*

$$\mathbf{m}(P, \nu) = n \times M\nu \quad (24)$$

Dove

$$M = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} (\xi a\sigma^* dx^{i^*})d\xi \otimes \partial x_i \quad (25)$$

Introducendo il tensore antisimmetrico Ω associato all'operatore $n \times$, si ottiene il tensore $C = \Omega M$. Da cui

$$\mathbf{m}(P, \nu) = C\nu \quad (26)$$

Pertanto il tensore C risulta un'applicazione $C : Q \rightarrow L(T^*Q, TQ) \simeq TQ \otimes TQ$, e assume la forma

$$C = C^\alpha \otimes \partial x_\alpha \quad (27)$$

Dove le componenti del vettore C^α si scrivono

$$C^\alpha = C^{\beta\alpha} \partial x_\beta$$

3.3 Le forze di volume e la densità di carico

Supponiamo ora che la curva $c : \mathbb{R} \rightarrow Q$ sia chiusa in modo tale da individuare una porzione di superficie $Q' \subset Q$ delimitata dalla frontiera $\partial Q \equiv c$. Assunta c come direttrice, il sistema di generatrici dirette come n individua un cilindroide $G_c(\epsilon) \subset G(\epsilon)$ di spessore 2ϵ e delimitato dalla superficie $Q_c \cup Q^\epsilon \cup Q_{-\epsilon}$.

Assunzione 1. *Postuliamo che*

- *sul continuo $G_c(\epsilon)$ agisca una densità di forza*

$$f : G_c(\epsilon) \rightarrow \bar{E}$$

- *sulle superfici esterne $Q^\epsilon \cup Q_{-\epsilon}$ del continuo $G_c(\epsilon)$ agisca una densità di carico.*

$$t : Q_{-\epsilon}^\epsilon \rightarrow \bar{E}$$

Il sistema di forze postulato può essere integrato sullo spessore dando luogo ad un nuovo sistema di forze con dominio ristretto a Q' . Ovvero⁹

$$q : Q' \rightarrow T'_Q E$$

$$s : Q' \rightarrow TQ'$$

3.4 Equilibrio

Per la porzione di superficie media Q' possiamo scrivere le equazioni di equilibrio in forma integrale (equazioni di *Eulero*)

$$\int_{\partial Q'} \mathbf{n}(P, \nu) dl + \int_{Q'} q dQ' = 0 \quad (28)$$

$$\int_{\partial Q'} (\mathbf{m}(P, \nu) + r \times \mathbf{n}(P, \nu)) dl + \int_{Q'} (r \times q + s) dQ' = 0 \quad (29)$$

⁹Nel campo q confluiscono sia le forze f che t . Infatti $q = \int_{-\epsilon}^\epsilon a f d\xi + at$. Il campo s è la risultante dei momenti: $s = \int_{-\epsilon}^\epsilon a \xi n \times f d\xi + a \xi n \times t$

Tenendo conto delle (19) e (24), scriviamo

$$\int_{\partial Q'} N\nu dl + \int_{Q'} q dQ' = 0 \quad (30)$$

$$\int_{\partial Q'} (C\nu + r \times N\nu) dl + \int_{Q'} (r \times q + s) dQ' = 0 \quad (31)$$

Sfruttando il teorema delle divergenza e per l'arbitrarietà di Q' , otteniamo la prima espressione delle equazioni di equilibrio in forma locale

$$div N + q = 0 \quad (32)$$

$$div(C + XN) + Xq + s = 0 \quad (33)$$

Dove in X è il tensore antisimmetrico associato all'operatore $r \times$. Sfruttando la (32), la (33) diventa

$$div C + (div X)N + s = 0 \quad (34)$$

In componenti le (32)(34) si scrivono

$$\nabla_\alpha N^{\beta\alpha} + N^{\xi\alpha} L_\alpha^\beta + q^\beta = 0 \quad (35)$$

$$\nabla_\alpha N^{\xi\alpha} + L_{\alpha\beta} N^{\beta\alpha} + q^\xi = 0 \quad (36)$$

$$\nabla_\alpha M^{\beta\alpha} - N^{\xi\beta} + s^\beta = 0 \quad (37)$$

$$\epsilon_{\alpha\beta} (L_\gamma^\alpha M^{\beta\gamma} - N^{\alpha\beta}) = 0 \quad (38)$$

Dimostrazione.

Iniziamo dalla (32); il primo termine in componenti è

$$(div N)^i = (div N)^\beta + (div N)^\xi = \nabla_\alpha N^{i\alpha} = N^{i\alpha}_{,\alpha} + \Gamma_{\alpha j}^i N^{j\alpha} + \Gamma_{\alpha\gamma}^\alpha N^{i\gamma}$$

Dove

$$\begin{aligned} (div N)^\beta &= N^{\beta\alpha}_{,\alpha} + \Gamma_{\alpha j}^\alpha N^{j\alpha} + \Gamma_{\alpha\gamma}^\alpha N^{\beta\alpha} \\ &= N^{\beta\alpha}_{,\alpha} + \Gamma_{\alpha\gamma}^\beta N^{\gamma\alpha} + \Gamma_{\alpha\xi}^\beta N^{\xi\alpha} + \Gamma_{\alpha\gamma}^\alpha N^{\beta\gamma} \\ &= \nabla_\alpha N^{\beta\alpha} + \Gamma_{\alpha\xi}^\beta N^{\xi\alpha} \end{aligned}$$

Ricordando che $(\nabla_\alpha n)^\beta = L_\alpha^\beta = \Gamma_{\alpha\xi}^\beta$ si ottiene

$$(div N)^\beta = \nabla_\alpha N^{\alpha\beta} + L_\alpha^\beta N^{\xi\alpha}$$

Analogamente

$$\begin{aligned} (div N)^\xi &= N^{\xi\alpha}_{,\alpha} + \Gamma_{\alpha j}^\xi N^{j\alpha} + \Gamma_{\alpha\beta}^\alpha N^{\xi\beta} \\ &= N^{\xi\alpha}_{,\alpha} + \Gamma_{\alpha\xi}^\xi N^{\xi\alpha} + \Gamma_{\alpha\beta}^\xi N^{\beta\alpha} + \Gamma_{\alpha\beta}^\alpha N^{\xi\beta} \end{aligned}$$

Ricordando l'espressione di $\nabla_\alpha N^{\xi\alpha}$ e che $\Gamma_{\alpha\beta}^\xi = L_{\alpha\beta}$, si ottiene

$$(\operatorname{div} N)^\xi = \nabla_\alpha N^{\xi\alpha} + L_{\alpha\beta} N^{\alpha\beta}$$

Sostituendo queste espressioni nella (32) e scrivendo anche il vettore q nelle sue tre componenti, si ottengono le tre equazioni di equilibrio in forma scalare.

Quanto alla (34), come prima cosa scriviamo in componenti la divergenza del tensore X ,

$$(\operatorname{div} X) = X_{j,i}^i dx^j$$

IL primo termine dell (34) diventa

$$(\operatorname{div} X)N = X_{j,i}^i dx^j N^\alpha \partial_\alpha = X_j^i \delta_\alpha^j N^\alpha = \partial_\alpha \times N^\alpha$$

Sviluppamo la divergenza di C

$$\begin{aligned} \operatorname{div} C &= \operatorname{div}(\Omega M) = \operatorname{div} \Omega M + \Omega \operatorname{div} M \\ &= \nabla_i \Omega_j^i dx^j M^{h\alpha} \partial_h \otimes \partial_\alpha + \Omega_j^i dx^j \otimes \partial_i \nabla_\alpha M^{h\alpha} \partial_h = \\ &= \nabla_i \Omega_j^i \delta_\alpha^j M^{h\alpha} \partial_h + \Omega_j^i \delta_h^j \partial_i \nabla_\alpha M^{h\alpha} \\ &= \nabla_i \Omega_\alpha^i M^{h\alpha} \partial_h + \Omega_h^i \nabla_\alpha M^{h\alpha} \partial_i \\ &= \nabla_\alpha n \times M^{h\alpha} \partial_h + n \times (\operatorname{div} M)^\beta \partial_\beta + n \times (\operatorname{div} M)^\xi n \end{aligned}$$

Ricordando che

$$(\operatorname{div} M)^\beta = \nabla_\alpha M^{\beta\alpha} + \Gamma_{\alpha\xi}^\beta M^{\xi\beta}$$

e ricordando l'alternanza del prodotto vettoriale, si ottiene

$$\operatorname{div}(\Omega M) = \nabla_\alpha n \times M^{h\alpha} \partial_h + n \times \nabla_\alpha M^{\beta\alpha} \partial_\beta + \Gamma_{\alpha\xi}^\beta M^{\xi\beta} \partial_\beta$$

La (34) diventa allora

$$\begin{aligned} \operatorname{div} C + (\operatorname{div} X)N + s &= \nabla_\alpha n \times M^{\beta\alpha} \partial_\beta + \nabla_\alpha n \times M^{\xi\alpha} n \\ &+ n \times \nabla_\alpha M^{\beta\alpha} \partial_\beta + n \times \Gamma_{\alpha\xi}^\beta M^{\xi\beta} \partial_\beta \\ &+ \partial_\alpha \times N^{\beta\alpha} \partial_\beta + \partial_\alpha \times N^{\xi\alpha} n + s^\beta \partial_\beta = 0 \end{aligned}$$

Le componenti tangenti sono

$$\nabla_\alpha M^{\beta\alpha} + \Gamma_{\alpha\xi}^\beta M^{\xi\alpha} - M^{\xi\alpha} L_\alpha^\beta - N^{\xi\beta} + s^\beta = 0$$

Da quest'ultima, tenuto conto che $L_\alpha^\beta = \Gamma_{\alpha\xi}^\beta$, si ottiene esattamente la terza equazione di equilibrio in forma scalare (38).

Le componenti normali sono

$$\begin{aligned} &\partial_\alpha \times N^{\beta\alpha} \partial_\beta + L_\alpha^\gamma \partial_\gamma \times M^{\beta\alpha} \partial_\beta \\ &= \epsilon_{\alpha\beta} N^{\beta\alpha} + \epsilon_{\gamma\beta} L_\alpha^\gamma M^{\beta\alpha} \\ &= \epsilon_{\alpha\beta} (N^{\beta\alpha} + L_\alpha^\gamma M^{\beta\gamma}) = 0 \end{aligned}$$

che coincide con l'ultima delle equazioni di equilibrio in forma scalare.¹⁰ Concludiamo questa sezione introducendo una nuova variabile le cui caratteristiche rendono più agevole talune applicazioni.

¹⁰A tal proposito si ricordi la proprietà del tensore di Ricci ϵ , $\epsilon_{\alpha\beta} N^{\alpha\beta} = -\epsilon_{\alpha\beta} N^{\beta\alpha}$

Definizione 12. Si definisce *tensore delle pseudo-forze* il tensore simmetrico

$$\tilde{N} = \tilde{N}^{\alpha\beta} \partial x_\alpha \otimes \partial x_\beta$$

dove

$$\tilde{N}^{\alpha\beta} = N^{\alpha\beta} - L_\gamma^\alpha M^{\beta\gamma}$$

Osservazione 2. Per come è definito \tilde{N} è immediato osservare che $\tilde{N} \equiv N$ solo nel caso di ipotesi di regime di sforzo membranale o per i gusci piatti per i quali il tensore di Weingarten è sempre identicamente nullo.



4 Legame costitutivo

L'ipotesi di *Kirchhoff-Love*, sull'inesensibilità delle fibre materiali lungo n , permette di considerare le componenti di sforzo di taglio $N^{\xi\alpha}$ indipendenti dalla deformazione. Pertanto il problema del legame costitutivo risulta risolvibile mediante un modello piano di tensione.

Le componenti $N^{\xi\alpha}$ si determinano, quindi, sfruttando le sole equazioni di equilibrio.

Nell'ambito di questa trattazione non se ne riporta lo sviluppo analitico, ci limitiamo, così, a riportare le formule finali di legame che useremo nei casi applicativi.

Per qualsiasi approfondimento si rimanda a FORTSCHRITT-BERICHTE VDI Reihe 18 Nr. 258 Theory of Shell Structures, Y. Basar -- E.h.W. Krätzig, Bochum.

$$\begin{aligned}\tilde{N}^{\alpha\beta} &= DH^{\alpha\beta\lambda\mu}\alpha_{\lambda\mu} \\ M^{\alpha\beta} &= BH^{\alpha\beta\lambda\mu}\omega_{\lambda\mu}\end{aligned}$$

Dove

$$H^{\alpha\beta\lambda\mu} = \frac{1-\nu}{2}(g^{\alpha\lambda}g^{\beta\mu} + g^{\alpha\mu}g^{\beta\lambda} + \frac{2\nu}{1-\nu}g^{\alpha\beta}g^{\lambda\mu})$$

Per $H^{\alpha\beta\lambda\mu}$ valgono le seguenti proprietà di simmetria

$$H^{\alpha\beta\lambda\mu} = H^{\beta\alpha\lambda\mu} = H^{\alpha\beta\mu\lambda} = H^{\lambda\mu\alpha\beta}$$

I coefficienti D, B sono rispettivamente le rigidità estensionale e flessionale.

$$\begin{aligned}D &= \frac{E(2\varepsilon)}{1-\nu^2} \\ B &= \frac{E(2\varepsilon)^3}{12(1-\nu^2)}\end{aligned}$$



5 Stati di sforzo membranale

In questo paragrafo faremo delle ipotesi sullo stato di sforzo del guscio che ci permettano di risolvere il problema dell'equilibrio senza l'ausilio delle equazioni di legame.

Un guscio risulta ben progettato quanto più il suo stato di sforzo è di natura membranale. Tuttavia la realtà fisica che caratterizza un guscio, in particolare le condizioni di vincolo esterne e il sistema di carichi, spesso è incompatibile con le ipotesi che ora assumeremo per l'equilibrio membranale.

Applichiamo la teoria ad alcuni casi di gusci assialsimmetrici con ipotesi di comportamento membranale. Di conseguenza troveremo la soluzione analitica degli sforzi di membrana e degli spostamenti confrontandola con i valori numerici prodotti da FEMAS 90 e SAP2000. Il raffronto sarà rappresentato graficamente e in tabella per alcuni punti notevoli della struttura.

Definizione 13. *Definiamo regime di equilibrio membranale per un guscio uno stato di sforzo caratterizzato dalle seguenti ipotesi*

$$N^{\xi\alpha} = 0$$

$$M^{i\alpha} = 0$$

Le equazioni di equilibrio membranale diventano

$$\nabla_{\alpha} N^{\alpha\beta} + q^{\beta} = 0 \quad (39)$$

$$N^{\alpha\beta} L_{\alpha\beta} + q^{\xi} = 0 \quad (40)$$

$$\epsilon_{\alpha\beta} N^{\alpha\beta} = 0 \quad (41)$$

Si osserva che la (39) esprime l'equilibrio alla traslazione nel piano tangente; la (40) l'equilibrio nella direzione di n ; la (41) esprime l'equilibrio alla rotazione attorno all'asse n , quindi la simmetria di N .

5.1 Applicazioni

Analizziamo ora alcune applicazioni della teoria finora esposta.

Supponendo un modello membranale, riportiamo alcuni risultati salienti di un guscio cilindrico, un duomo sferico e un iperboloide ad una falda.

5.1.1 Duomo sferico

- **Geometria**

Il duomo sferico è un guscio modellato su una calotta sferica di apertura $\pi/2$ e raggio r .

Come primo passo vogliamo individuare il più naturale sistema di coordinate per descrivere la superficie.

Sia, allora, X un sistema di coordinate adattato tale che

$$X = (\varphi, \vartheta, z) : E \rightarrow \mathbb{R}^3$$

Con E lo spazio affine euclideo in cui è immersa la superficie Q . Rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano, con origine nel centro della semisfera Q , vale la seguente trasformazione di coordinate

$$\begin{aligned} x &= \rho \sin \varphi \sin \vartheta \\ y &= \rho \sin \varphi \cos \vartheta \\ z &= \rho \cos \varphi \end{aligned}$$

Il sistema di coordinate adattato X induce un sistema di coordinate superficiali X^\dagger per mezzo del vincolo $\rho = r$. Il sistema di coordinate indotto è pertanto

$$X^\dagger = (\varphi^\dagger, \vartheta^\dagger) : Q \rightarrow \mathbb{R}^2$$

Proposizione 4. *Le espressioni covariante e controvariante della metrica indotta g^\dagger sono, rispettivamente*

$$\begin{aligned} \underline{g} &= r^2 d\varphi \otimes d\varphi + r^2 \sin^2 \varphi d\vartheta \otimes d\vartheta \\ g &= \frac{1}{r^2} \partial\varphi \otimes \partial\varphi + \frac{1}{r^2 \sin^2 \varphi} \partial\vartheta \otimes \partial\vartheta \end{aligned}$$

Proposizione 5. *I simboli di Christoffel non nulli su Q sono*

$$\begin{aligned} \Gamma_{\vartheta\vartheta}^\varphi &= -\sin \varphi \cos \varphi \\ \Gamma_{\varphi\vartheta}^\vartheta &= \Gamma_{\vartheta\varphi}^\vartheta = \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} \end{aligned}$$

Proposizione 6. *Il campo vettoriale unitario normale di Q è*

$$n = \partial\rho.$$

Proposizione 7. *Il tensore di Weingarten e la seconda forma fondamentale su Q sono, rispettivamente*

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{r} (d\varphi \otimes \partial\varphi + d\vartheta \otimes \partial\vartheta) \\ \underline{L} &= r (d\varphi \otimes d\varphi + \sin^2 \varphi d\vartheta \otimes d\vartheta). \end{aligned}$$

- **Spostamenti e deformazioni**

Per calcolare le componenti di sforzo membranale ci basta conoscere le sole componenti del tensore di deformazione estensionale α della

superficie media Q

$$\begin{aligned}\alpha_{\varphi\varphi} &= v_{\varphi,\varphi} + rv^\xi \\ \alpha_{\theta\theta} &= v_{\vartheta,\vartheta} + \sin\varphi \cos\varphi + r \sin^2\varphi v^\xi \\ \alpha_{\vartheta\varphi} &= \frac{1}{2}(v_{\varphi,\theta} + v_{\vartheta,\varphi}) - \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} v_\vartheta\end{aligned}$$

- **Equilibrio**

Le equazioni di equilibrio in forma locale per un guscio emisferico soggetto ad un regime di sforzo membranale sono

$$N^{\varphi\varphi}_{,\varphi} + \cot\varphi N^{\varphi\varphi} - \sin\varphi \cos\varphi N^{\vartheta\vartheta} + q^\varphi = 0 \quad (42)$$

$$-N^{\varphi\varphi}r - N^{\vartheta\vartheta}r \sin^2\varphi + q^\xi = 0 \quad (43)$$

$$N^{\vartheta\varphi}_{,\varphi} + 3 \cot\varphi N^{\vartheta\varphi} + q^\vartheta = 0 \quad (44)$$

- **Equazioni di legame**

Le equazioni di legame sono

$$N^{\varphi\varphi} = D \left(\frac{1}{r^4} (v_{\varphi,\varphi} + rv^\xi) + \frac{\nu}{r^4 \sin^2\varphi} (v_{\vartheta,\vartheta} + \sin\varphi \cos\varphi v_\varphi + r \sin^2\varphi v^\xi) \right)$$

$$N^{\vartheta\vartheta} = D \left(\frac{1}{r^4 \sin^4\varphi} (v_{\vartheta,\vartheta} + \sin\varphi \cos\varphi v_\varphi + r \sin^2\varphi v^\xi) + \frac{\nu}{r^4 \sin^2\varphi} (v_{\varphi,\varphi} + rv^\xi) \right)$$

$$N^{\vartheta\varphi} = D \left(\frac{1-\nu}{r^4 \sin^2\varphi} \frac{1}{2} (v_{\varphi,\theta} + v_{\vartheta,\varphi}) - \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} v_\vartheta \right)$$

5.1.2 Duomo sferico: confronto analitico e numerico

Il modello di duomo sferico è costituito da elementi piani (SHELL di SAP2000) ed è vincolato alla base con carrelli.

Per eliminare la labilità strutturale un nodo di base è stato incastrato, ciò ha reso necessario leggere gli output numerici relativi alla sruiscia meridiana diametralmente opposta a quella dell'incastrato con l'accortezza di dimezzare i valori dello spostamento radiale.

Condizione di carico assialsimmetrica: carico verticale costante distribuito uniformemente sul guscio. (Peso proprio)

La condizione di carico simmetrico rispetto all'asse z ci permette di cercare una soluzione indipendente da ϑ .
 Supponiamo di avere un carico per unità di superficie q uniformemente distribuito sul guscio che nel sistema cartesiano si scrive

$$q = -q^z e_z$$

Nella base $\{\partial\varphi, \partial\vartheta, n\}$ il carico q si scrive in componenti fisiche

$$q^{<\xi>} = -q^z \cos \varphi n + q^z \sin \varphi \partial\varphi \quad (45)$$

Moltiplicando la (42) per $\sin \varphi$ si ottiene

$$(\sin \varphi N^{\varphi\varphi})_{,\varphi} - \sin^2 \varphi \cos \varphi N^{\vartheta\vartheta} + \sin \varphi q^\varphi = 0 \quad (46)$$

Vogliamo osservare che la base in cui abbiamo sempre espresso le componenti di N non è normalizzata.

Distinguiamo allora le componenti fisiche di N come

$$N^{<\alpha\beta>} = \frac{N^{\alpha\beta}}{|dx^\alpha||dx^\beta|} = N^{\alpha\beta} |\partial x_\alpha| |\partial x_\beta|$$

Allora la (46) diventa

$$(\sin \varphi N^{<\varphi\varphi>})_{,\varphi} - \cos \varphi N^{<\vartheta\vartheta>} + r \sin \varphi q^{<\varphi>} = 0 \quad (47)$$

Analogamente, moltiplicando la (44) per $\sin^2 \varphi$, considerando le componenti fisiche e osservato che $q^\vartheta = 0$, otteniamo

$$(\sin \varphi N^{<\vartheta\varphi>})_{,\varphi} + \cos \varphi N^{<\vartheta\varphi>} = 0 \quad (48)$$

La rimanente equazione di equilibrio diventa

$$-\frac{N^{<\varphi\varphi>}}{r} - \frac{N^{<\vartheta\vartheta>}}{r} + q^{<\xi>} = 0 \quad (49)$$

Ricavando $N^{<\vartheta\vartheta>}$ dalla (49) la (47) diventa

$$(\sin^2 \varphi N^{<\varphi\varphi>})_{,\varphi} = (q^{<\xi>} r \cos \varphi - q^{<\varphi>} r \sin \varphi) \sin \varphi \quad (50)$$

Da cui

$$\sin^2 \varphi N^{<\varphi\varphi>} = \int_{\bar{\varphi}}^{\varphi} r (q^{<\xi>}(\phi) \cos \phi - q^{<\varphi>}(\phi) \sin \phi) \sin \phi d\phi + K \quad (51)$$

Questo integrale esprime l'equilibrio di una porzione di calotta sferica compresa fra la latitudine $\bar{\varphi}$ e la generica $\varphi \in [0, \pi/2]$ con $\varphi > \bar{\varphi}$. In particolare $2\pi r K$, a meno del segno, bilancia la risultante agente sulla porzione

di calotta di apertura $\bar{\varphi}$.

Considerando la (45)

$$\sin^2 \varphi N^{<\varphi\varphi>} = -rq^z \left[-\cos \phi \right]_{\bar{\varphi}}^{\varphi} \quad (52)$$

Alla latitudine φ l'intero sforzo meridiano se $\bar{\varphi} = 0 \Rightarrow K = 0$ è

$$N^{<\varphi\varphi>} = -\frac{rq^z(1 - \cos \varphi)}{\sin \varphi} = -\frac{rq^z}{1 + \cos \varphi} \quad (53)$$

Dalla (49)

$$N^{<\vartheta\vartheta>} = rq^z \left(\frac{\sin^2 \varphi - \cos \varphi}{1 + \cos \varphi} \right) \quad (54)$$

La terza equazione di equilibrio è indipendente dagli ultimi due risultati. Inoltre, come nel nostro caso, per $q^\vartheta = 0$ si ha

$$N^{<\vartheta\varphi>} = 0 \quad (55)$$

ESEMPIO APPLICATIVO

Caratteristiche geometriche

- $r = 1500 \text{ cm}$
- $2\epsilon = 20 \text{ cm}$

Caratteristiche del materiale

- $E = 3350 \text{ KN/cm}^2$
- $\nu = 0.2$
- $\gamma_C = 25 \cdot 10^{-6} \text{ KN/cm}^3$

Carichi

- $q^z = -\gamma_C(2\epsilon) = 5 \cdot 10^{-4} \text{ KN/cm}^2$

Confronti

	ANAL.	SAP (20X20)	Δ [%]	SAP(40X40)	Δ [%]
$N_{ \varphi=0}^{\vartheta\vartheta}$	-0.3750	-0.296	-21.07	-0.350	-6.67
$N_{ \varphi=45}^{\vartheta\vartheta}$	-0.091	-0.088	-3.30	-0.092	1.10
$N_{ \varphi=90}^{\vartheta\vartheta}$	0.750	0.749	-0.13	0.755	0.67
$N_{ \varphi=0}^{\varphi\varphi}$	-0.375	-0.483	28.8	-0.491	30.93
$N_{ \varphi=45}^{\varphi\varphi}$	-0.439	-0.421	-4.10	-0.445	1.37
$N_{ \varphi=90}^{\varphi\varphi}$	-0.750	-0.704	6.13	-0.728	-2.93
$v_{ \varphi=0}^Z$	-	-0.038	-	-0.038	-
$v_{ \varphi=45}^Z$	-	-0.019	-	-0.020	-
$v_{ \varphi=90}^Z$	-	0.000	-	0.00	-
$v_{ \varphi=0}^R$	-	0.010	-	0.01	-
$v_{ \varphi=45}^R$	-	0.010	-	0.01	-
$v_{ \varphi=0}^R$	-	0.020	-	0.02	-

Tabella 1: Sollecitazioni e spostamenti di un duomo sferico soggetto a peso proprio valutate in tre punti caratteristici. Le unità usate sono [KN/cm] per le sollecitazioni, [cm] per gli spostamenti.

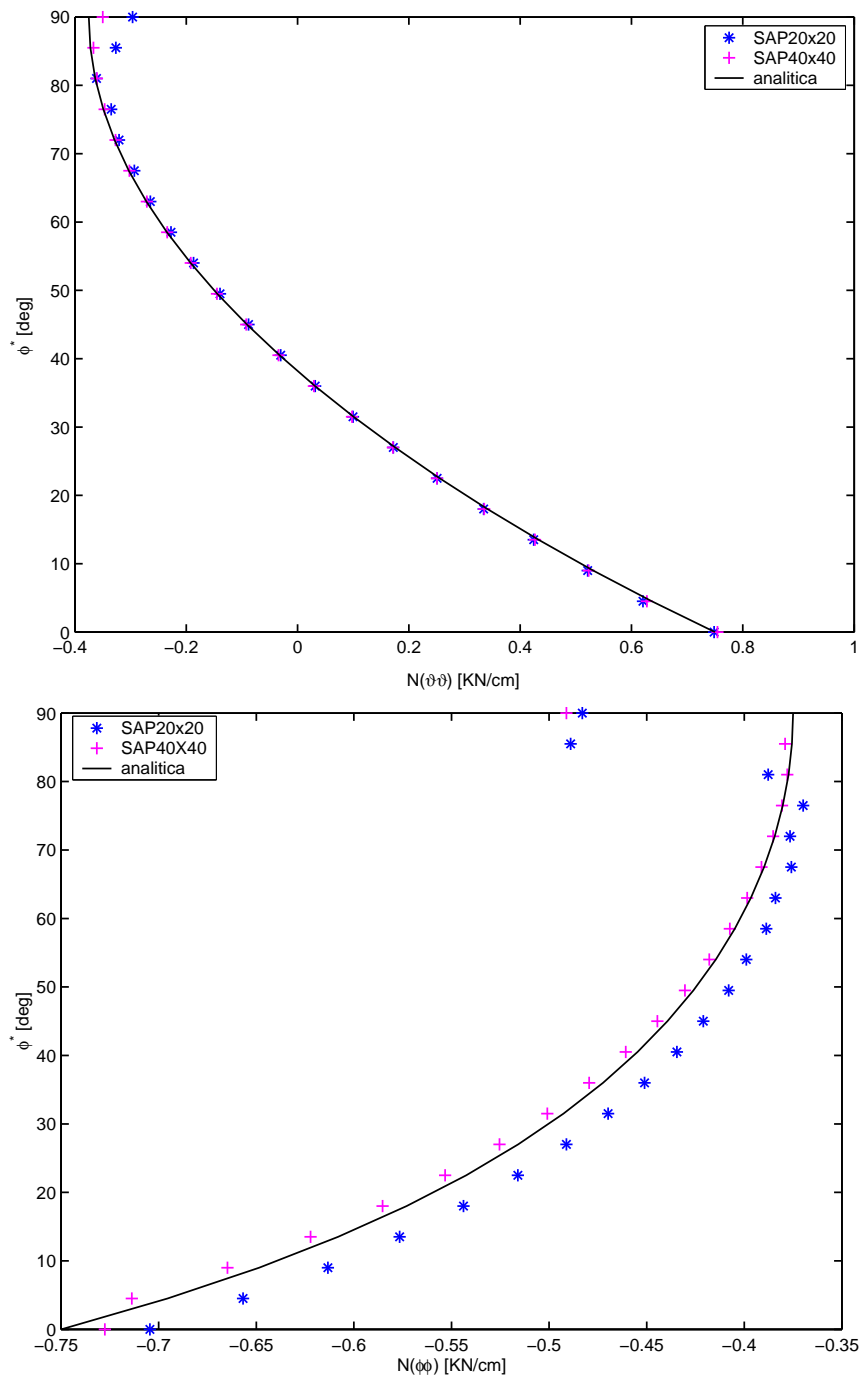


Figura 5: Confronto analitico-numerico delle sollecitazioni circonferenziali e meridionali di un duomo sferico soggetto a peso proprio.

Per migliorare la leggibilità del grafico, sull'asse delle ascisse - che diversamente dalla consuetudine abbiamo riportato in verticale - la variabile

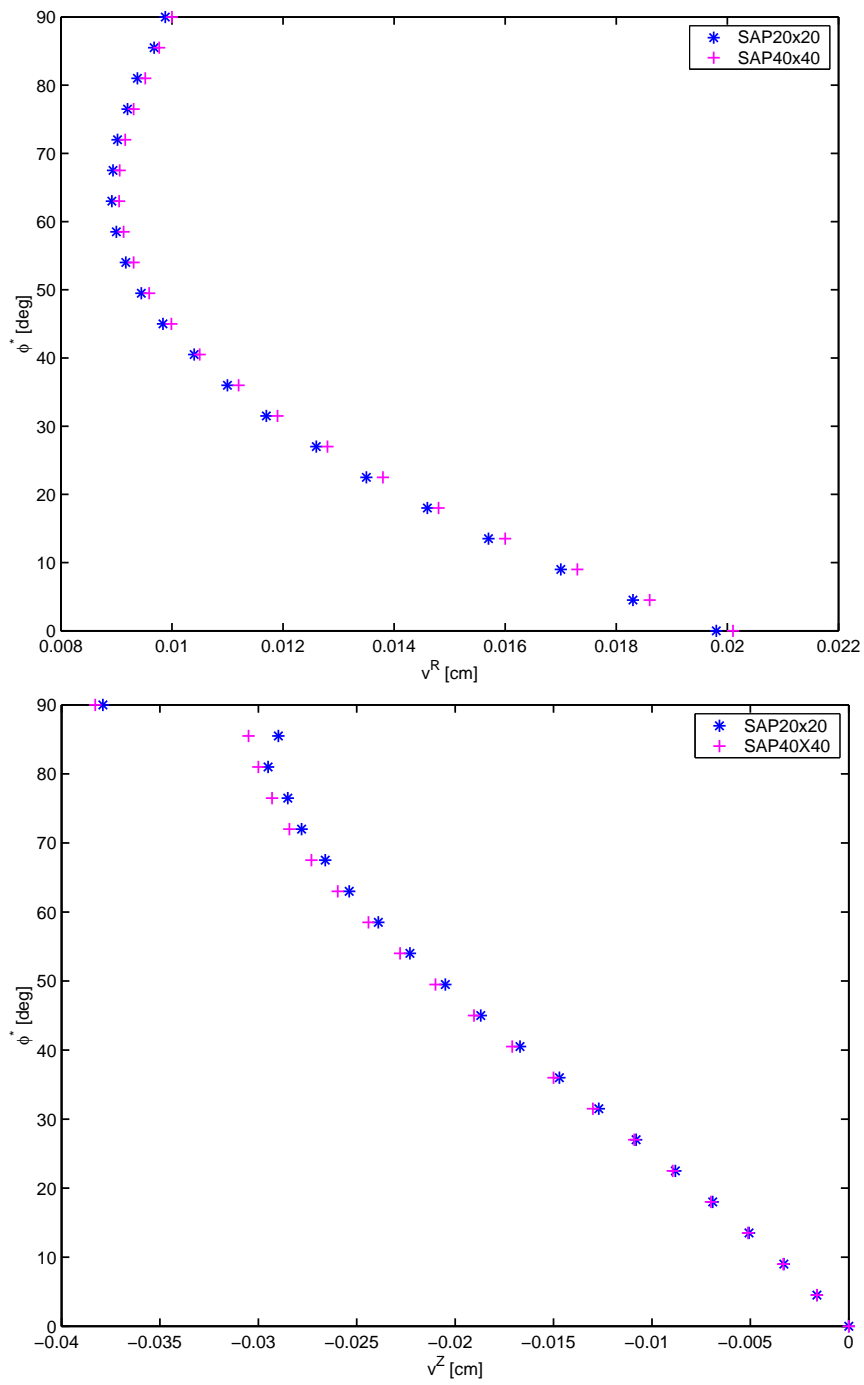


Figura 6: Confronto numerico degli spostamenti verticali e radiali di un duomo sferico soggetto a peso proprio.

indipendente è $\varphi^* = 90 - \varphi$ anzichè φ .

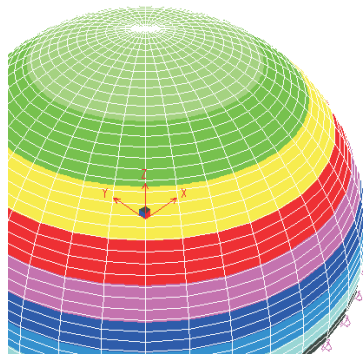


Figura 7: Output di **SAP2000** delle sollecitazioni di parallelo $N^{\theta\theta}$ di un duomo sferico soggetto a peso proprio.

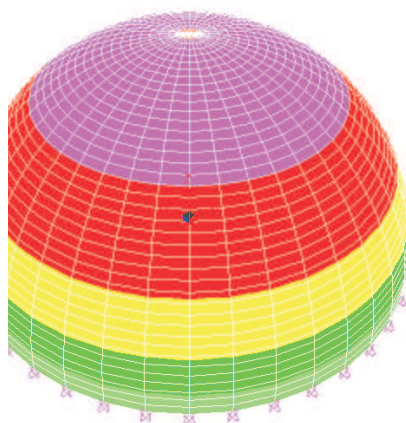


Figura 8: Output di **SAP2000** delle sollecitazioni di meridiano $N^{\varphi\varphi}$ di un duomo sferico soggetto a peso proprio.

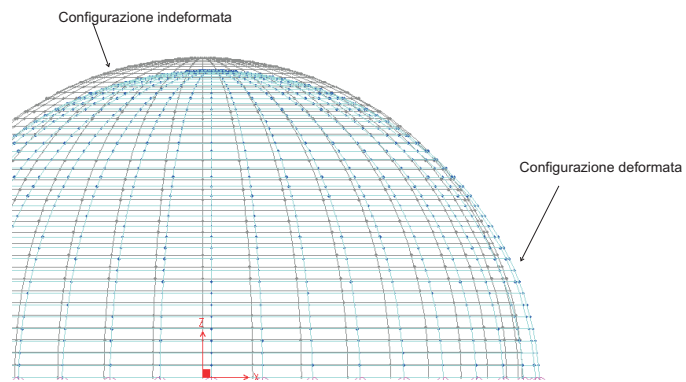


Figura 9: Configurazione deformata prodotta da **SAP2000** di un duomo sferico soggetto a peso proprio.

Condizione di carico assialsimmetrica: carico verticale costante distribuito sulla proiezione orizzontale della superficie del guscio

In questa ipotesi di carico rimangono inalterate le semplificazioni indotte dalla simmetria, cerchiamo, infatti, una soluzione indipendente da ϑ . Assunto un carico q^z , come nel caso precedente, per effetto della proiezione, nel sistema cartesiano globale, si ottiene

$$q = -q^z \cos \varphi e_z$$

che nella base locale, in componenti fisiche, si scrive

$$q^{<\xi>} = -q^z \cos^2 \varphi + q^z n \sin \varphi \cos \varphi \partial_\varphi$$

Con procedimento analogo alla condizione di carico precedente si giunge alla (51), che ora diventa

$$\begin{aligned} \sin^2 \varphi N^{<\varphi\varphi>} &= \int_{\bar{\varphi}}^{\varphi} r (q^{<\xi>}(\phi) \cos \phi - q^{<\varphi>}(\phi) \sin \phi) \sin \phi d\phi + K \\ &= \int_{\bar{\varphi}}^{\varphi} -r q^z \sin \varphi \cos \varphi + K \end{aligned}$$

Da cui

$$\sin^2 \varphi N^{<\varphi\varphi>} = -\frac{1}{2} [\cos^2 \varphi]_{\bar{\varphi}}^{\varphi}$$

Se $\bar{\varphi} = 0 \Rightarrow K = 0$ è l'intero sforzo meridiano è costantemente pari a

$$N^{<\varphi\varphi>} = -\frac{1}{2} r q^z$$

Dalla (49) si ricava

$$N^{<\vartheta\vartheta>} = -\frac{1}{2} r q^z \cos 2\varphi$$

ESEMPIO APPLICATIVO

Caratteristiche geometriche

- $r = 1500 \text{ cm}$
- $2\epsilon = 20 \text{ cm}$

Caratteristiche del materiale

- $E = 3350 \text{ KN/cm}^2$
- $\nu = 0.2$
- $\gamma_C = 25 \cdot 10^{-6} \text{ KN/cm}^3$

Carichi

- $q^z = 2 \cdot 10^{-4} \text{ KN/cm}^2$

Confronti

	ANA.	SAP(20X20)	Δ [%]	SAP(40X40)	Δ [%]
$N_{ \varphi=0}^{\vartheta\vartheta}$	-0.15	-0.119	-20.67	-0.140	-6.66
$N_{ \varphi=45}^{\vartheta\vartheta}$	0.00	0.001	0.10	0.00	0.00
$N_{ \varphi=90}^{\vartheta\vartheta}$	0.15	0.145	-3.33	0.149	-0.67
$N_{ \varphi=0}^{\varphi\varphi}$	-0.15	-0.193	28.67	-0.196	30.67
$N_{ \varphi=45}^{\varphi\varphi}$	-0.15	-0.145	-3.33	-0.148	-1.33
$N_{ \varphi=90}^{\varphi\varphi}$	-0.15	-0.148	-1.33	-0.149	-0.67
$v_{ \varphi=0}^Z$	-	-0.014		-0.014	
$v_{ \varphi=45}^Z$	-	-0.005		-0.005	
$v_{ \varphi=90}^Z$	-	0.00		0.00	
$v_{ \varphi=0}^R$	-	0.002		0.002	
$v_{ \varphi=45}^R$	-	0.002		0.002	
$v_{ \varphi=0}^R$	-	0.04		0.004	

Tabella 2: Sollecitazioni circonferenziali e meridionali e spostamenti radiali (R) e verticali (Z) di un duomo sferico soggetto ad un carico uniforme verticale agente sulla proiezione orizzontale della cupola e appoggiato alla base.

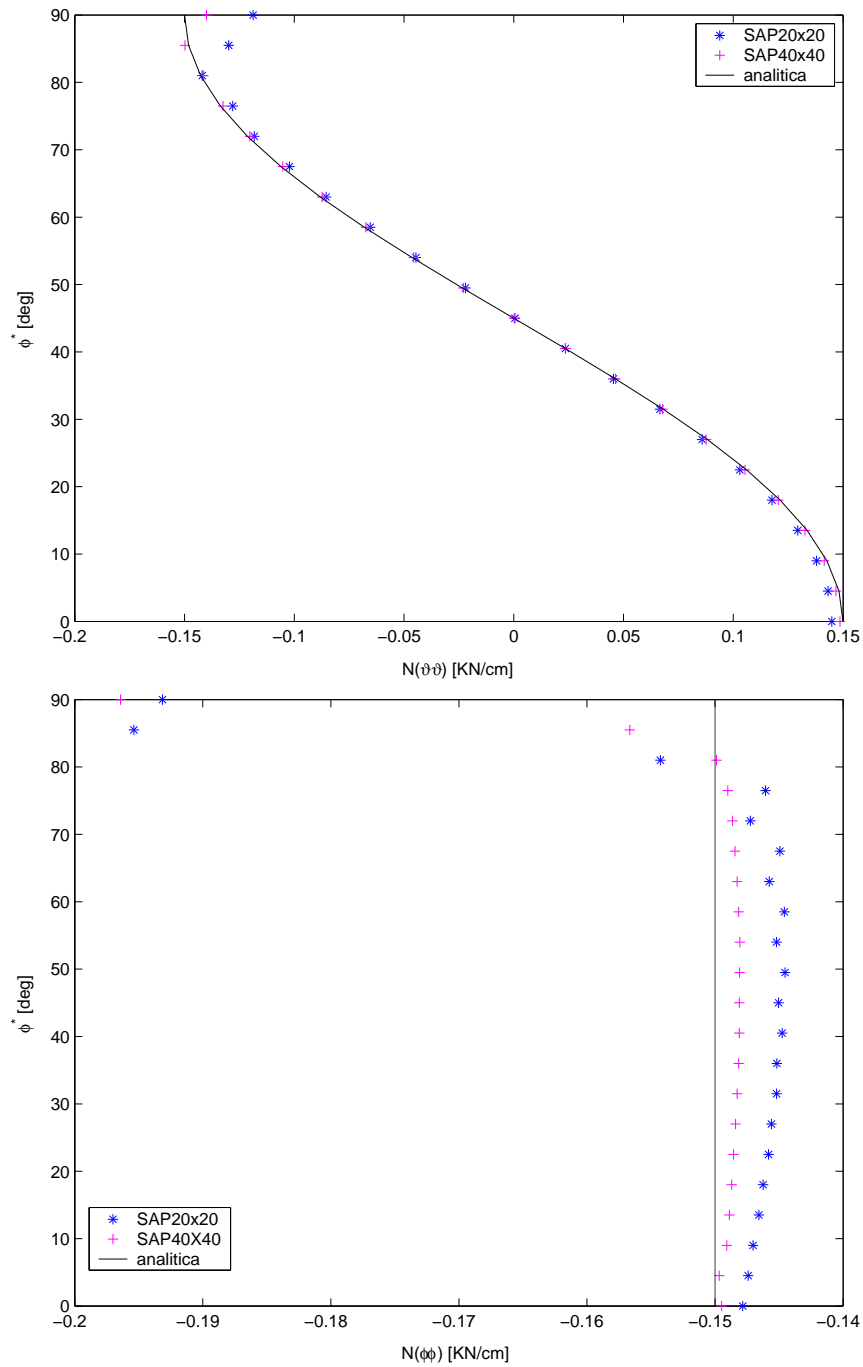


Figura 10: Confronto analitico-numerico delle sollecitazioni circonferenziali e meridionali di un duomo sferico soggetto a carico uniforme verticale agente sulla proiezione orizzontale della cupola e appoggiato alla base.

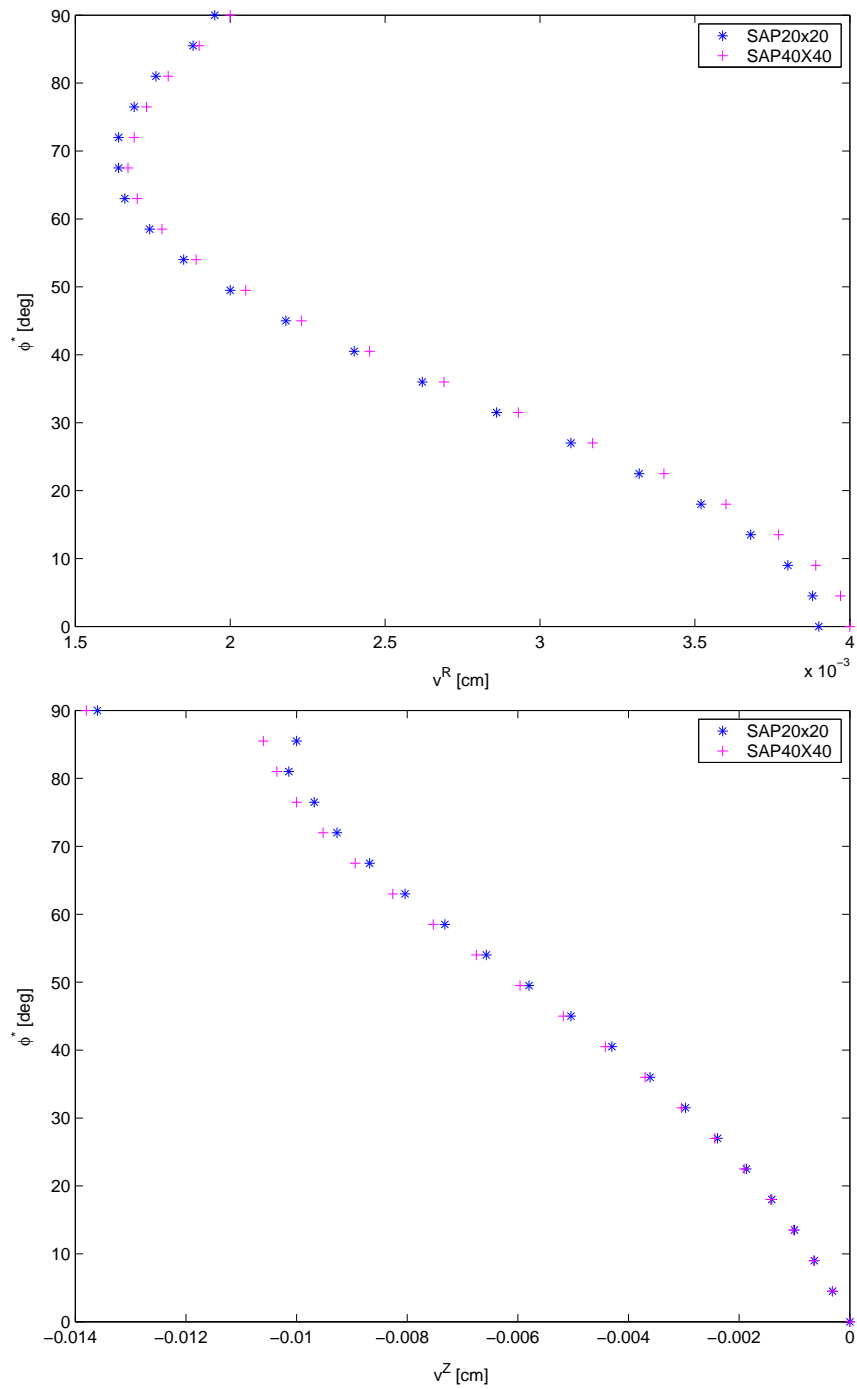


Figura 11: Confronto analitico-numerico degli spostamenti di un duomo sferico soggetto a carico uniforme verticale agente sulla proiezione orizzontale della cupola e appoggiato alla base.

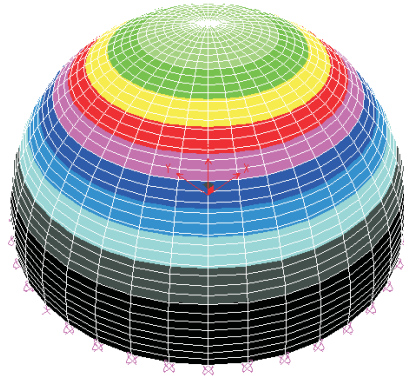


Figura 12: Output di **SAP2000** delle sollecitazioni di parallelo di un duomo sferico soggetto ad un carico uniforme.

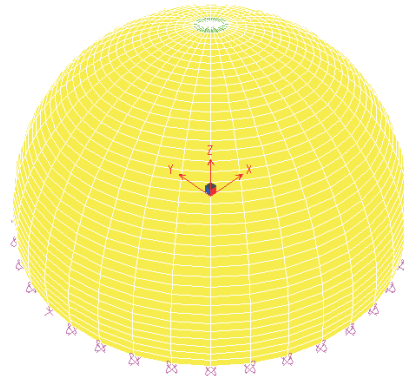


Figura 13: Output di **SAP2000** delle sollecitazioni di meridiano di un duomo sferico soggetto ad un carico uniforme.

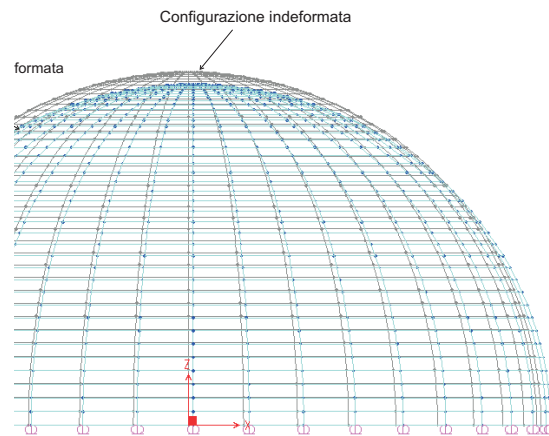


Figura 14: Configurazione deformata prodotta da **SAP2000** di un duomo sferico soggetto ad un carico uniforme.

5.1.3 Cilindro

In questo esempio vogliamo ricavare lo stato tensionale e deformativo di un guscio cilindrico soggetto ad alcune condizioni di carico tipiche: pressione uniforme, peso proprio, pressione idrostatica.

- **Geometria**

Scegliamo, com'è ovvio, un sistema di coordinate adattato cilindrico

$$X = (\vartheta, z, \rho) : E \rightarrow \mathbb{R}^3$$

Dove E è lo spazio affine euclideo in cui è immersa la sottovarietà cilindrica Q .

Rispetto ad un sistema di coordinate cartesiane, con origine nel centro della base del cilindro, vale la nota trasformazione di coordinate

$$\begin{aligned} x &= \rho \sin \vartheta \\ y &= \rho \cos \vartheta \\ Z &= z \end{aligned}$$

Il sistema di coordinate adattato X induce un sistema di coordinate superficiali X^\dagger per mezzo del vincolo $\rho = r$

$$X^\dagger = (\vartheta^\dagger, z^\dagger) : Q \rightarrow \mathbb{R}^2$$

Proposizione 8. *Le espressioni covariante e controvariante della metrica indotta sono, rispettivamente*

$$\begin{aligned} \underline{g} &= r^2 d\vartheta \otimes d\vartheta + dz \otimes dz \\ g &= \frac{1}{r^2} \partial\vartheta \otimes \partial\vartheta + \partial z \otimes \partial z \end{aligned}$$

Proposizione 9. *Tutti i simboli di Christoffel su Q sono nulli.*

Proposizione 10. *Il campo vettoriale unitario normale su Q è*

$$n = \partial\rho$$

Proposizione 11. *IL tensore di Weingarten e la seconda forma fondamentale su Q sono, rispettivamente*

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{r} d\vartheta \otimes \partial\vartheta \\ \underline{L} &= r d\vartheta \otimes d\vartheta \end{aligned}$$

- **Spostamenti e deformazioni**

Per calcolare le componenti di sforzo membranale ci basta conoscere le sole componenti del tensore di deformazione estensionale α

$$\begin{aligned}\alpha_{\vartheta\vartheta} &= v_{\vartheta,\vartheta} + rv_{\xi} \\ \alpha_{\vartheta z} &= \frac{1}{2}(v_{\vartheta,z} + v_{z,\vartheta}) \\ \alpha_{zz} &= v_{z,z}\end{aligned}$$

- **Equilibrio**

Le equazioni di equilibrio in forma locale per un guscio cilindrico soggetto ad un regime di sforzo membranale sono

$$\begin{aligned}N^{\vartheta\vartheta}_{,\vartheta} + N^{\vartheta z}_{,z} + p^{\vartheta} &= 0 \\ N^{z,\vartheta} + N^{zz}_{,z} + p^z &= 0 \\ -N^{\vartheta\vartheta}L_{\vartheta\vartheta} + p^{\xi} &= 0 \\ N^{\vartheta z} &= N^{z\vartheta}\end{aligned}$$

- **Equazioni di legame**

$$\begin{aligned}\tilde{N}^{\vartheta\vartheta} = N^{\vartheta\vartheta} &= \frac{D}{r^2} \left(\frac{1}{r^2} (v_{\vartheta,\vartheta} + rv_{\xi}) + v_{z,z} \right) \\ \tilde{N}^{\vartheta z} = N^{\vartheta z} &= D \left(\frac{1-\nu}{2r^2} (v_{\vartheta,z} + v_{z,\vartheta}) \right) \\ \tilde{N}^{zz} = N^{zz} &= D \left(\frac{\nu}{r^2} (v_{\vartheta,\vartheta} + rv_{\xi}) + v_{z,z} \right)\end{aligned}$$

5.1.4 Cilindro: confronto analitico e numerico

In questo paragrafo confrontiamo i risultati analitici con i rispettivi valori numerici prodotti dal codice di calcolo **FEMAS 90** e **SAP2000**. In particolare metteremo in evidenza l'efficacia degli elementi finiti a doppia curvatura **NACS48** rispetto all'uso degli elementi piatti **SHELL**, implementati nel codice **FEMAS 90** e **SAP2000** rispettivamente.

Il cilindro modellato al SAP2000 è vincolato alla base con appoggi scorrevoli. Per eliminare la labilità strutturale un nodo di base è stato incastrato, ciò ha reso necessario leggere gli output numerici relativi alla sruiscia meridiana diametralmente opposta a quella dell'incastro con l'accortezza di dimezzare i valori dello spostamento radiale.

Il modello al FEMAS 90 è un quarto di cilindro vincolato alla base con appoggi scorrevoli e con vincoli di simmetria.

Condizione di carico assialsimmetrica: pressione uniforme esercitata da un gas più peso proprio

Questa condizione di carico è rappresentata dalle due componenti q^ξ e q^z del vettore di carico q . Considerando la simmetria assiale, è possibile senz'altro eliminare tutte le derivate rispetto a alla coordinata ϑ . Così le equazioni di equilibrio diventano

$$\begin{aligned} N^{\vartheta\vartheta} &= \frac{q^\xi}{r} \\ N^{\vartheta z},z &= 0 \\ N^{zz},z + p^z &= 0 \end{aligned}$$

Considerando le condizioni al contorno ($z = 0$) relative alla particolare condizione di carico e trasformando le sollecitazioni nelle rispettive componenti fisiche, si ottiene

$$\begin{aligned} N^{<\vartheta\vartheta>} &= q^\xi r && \left[\frac{F}{L}\right] \\ N^{<\vartheta z>},z = 0 &\Rightarrow N^{<\vartheta z>} = 0 \\ N^{zz},z + q^z = 0 &\Rightarrow N^{zz} = \int_0^z -q^z d\zeta + K \Rightarrow \\ N^{zz} = N^{<zz>} &= -q^z(z - h) && \left[\frac{F}{L}\right] \end{aligned}$$

Le uniche componenti non nulle del vettore di deformazione v sono quella radiale e quella lungo z dovuta al peso oltre che all'effetto *Poisson*, rispettivamente scritte

$$\begin{aligned} v^\xi &= \frac{r^2 q^\xi + \nu r q^z (z - h)}{E(2\epsilon)} && [L] \\ v^z &= \frac{1}{E(2\epsilon)} \left(-q^z \left(\frac{z^2}{2} - hz \right) - \nu r q^\xi z \right) && [L] \end{aligned}$$

ESEMPIO APPLICATIVO

Caratteristiche geometriche

- $r = 300 \text{ cm}$
- $h = 800 \text{ cm}$
- $2\epsilon = 10 \text{ cm}$

Caratteristiche del materiale

- $E = 3350 \text{ KN/cm}^2$
- $\nu = 0.2$
- $\gamma = 25 \cdot 10^{-6} \text{ KN/cm}^3$

Carichi

- $q^\xi = 0.1 \text{ KN/cm}^2$
- $q^z = -\gamma(2\epsilon) = -25 \cdot 10^{-5} \text{ KN/cm}^2$

Confronti

	ANAL.	NACS48(1x20)	Δ [%]	SAP(20x20)	Δ [%]	SAP(40x40)	Δ [%]
$N_{z=800}^{\vartheta\vartheta}$	30.00	30.00	0.00	29.631	-1.23	29.908	-0.306
$N_{z=400}^{\vartheta\vartheta}$	30.00	30.00	0.00	29.632	-1.22	29.907	-0.31
$N_{z=0}^{\vartheta\vartheta}$	30.00	30.00	0.00	29.631	-1.23	29.908	-0.306
$N_{z=800}^{zz}$	0.00	0.00	0.00	-0.005	-0.5	-0.003	-0.30
$N_{z=400}^{zz}$	-0.10	-0.10	0.00	-0.095	-5.00	-0.097	-3.00
$N_{z=0}^{zz}$	-0.20	-0.20	0.00	-0.195	-2.50	-0.197	-1.5
$v_{z=800}^\xi$	0.269	0.269	0.00	0.268	-0.37	0.267	-0.74
$v_{z=400}^\xi$	0.269	0.269	0.00	0.268	-0.37	0.267	-0.74
$v_{z=0}^\xi$	0.269	0.269	0.00	0.268	-0.37	0.267	-0.74
$v_{z=800}^z$	-0.146	-0.146	0.00	-0.144	-1.37	-0.145	1.00
$v_{z=400}^z$	-0.072	-0.073	1.39	-0.073	1.39	-0.073	1.39
$v_{z=40}^z$	-0.007	-0.007	0.00	-0.007	0.00	-0.007	0.00

Tabella 3: Confronto analitico-numerico delle sollecitazioni e spostamenti a tre quote caratteristiche di un cilindro caricato con pressione uniforme e peso proprio.

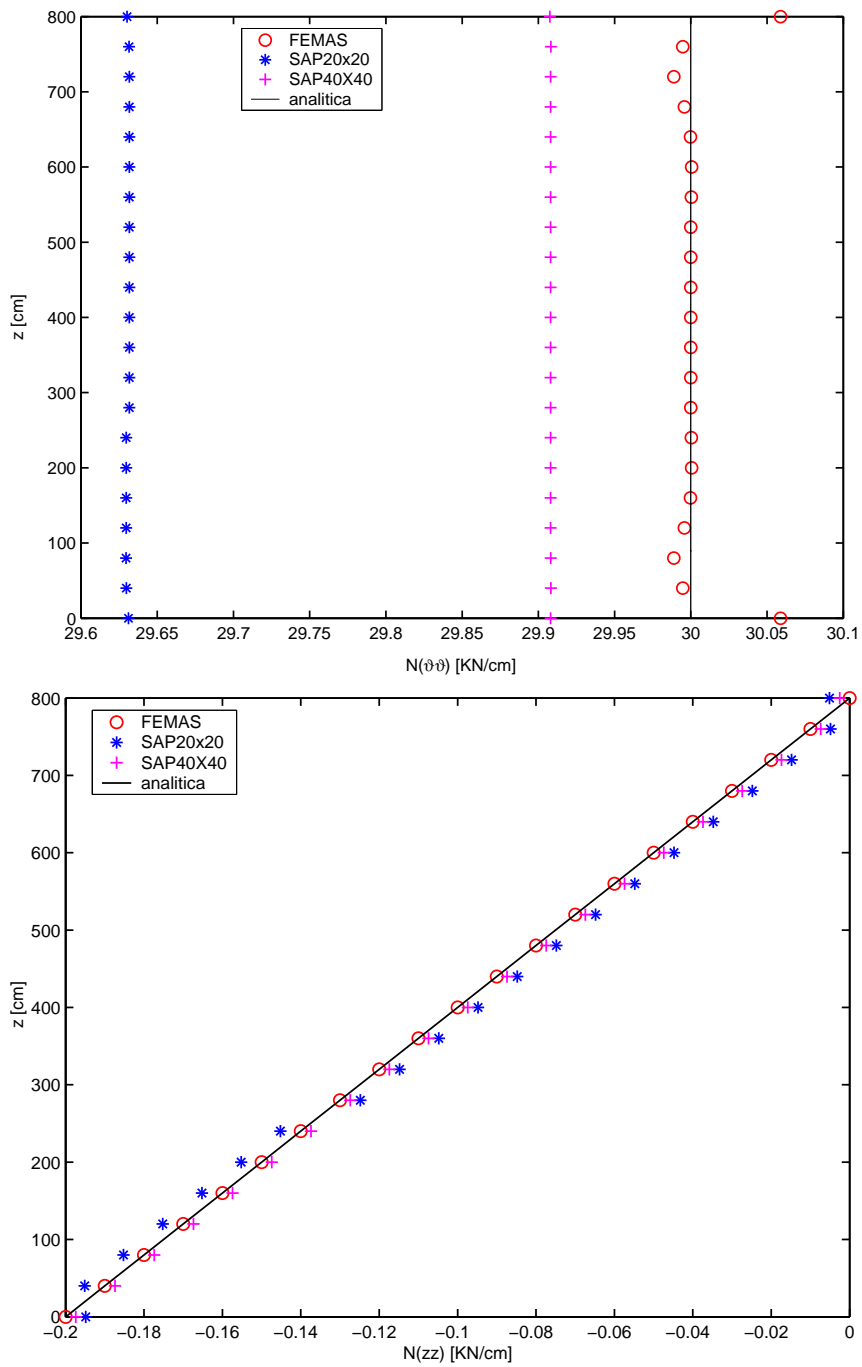


Figura 15: Confronto analitico-numerico delle sollecitazioni N^{zz} e $N^{\theta\theta}$ di un cilindro caricato con pressione uniforme e peso proprio. Confronta Tabella 3

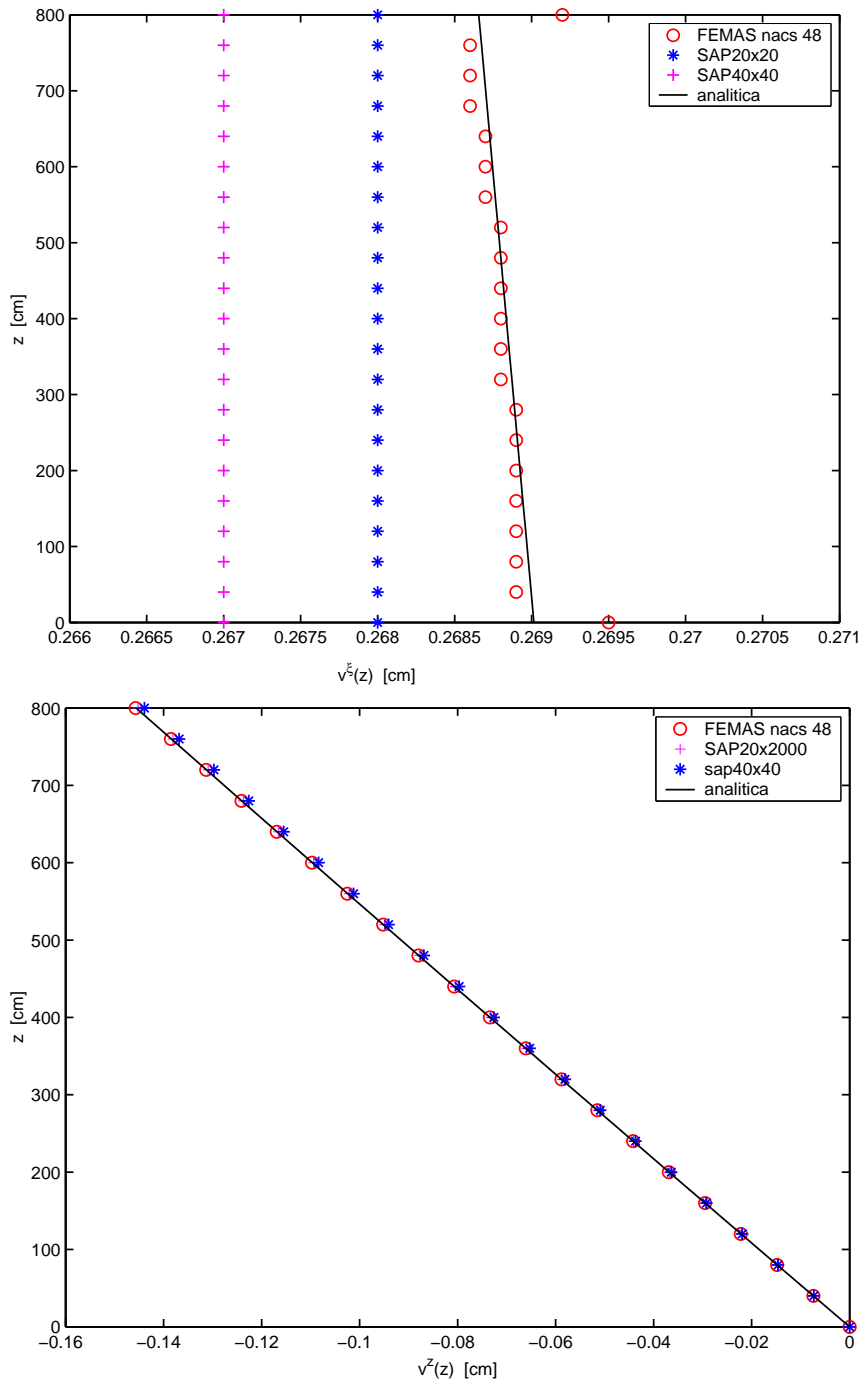


Figura 16: Confronto analitico-numerico degli spostamenti v^z e v^ξ di un cilindro caricato con pressione uniforme e peso proprio. Confronta Tabella 3

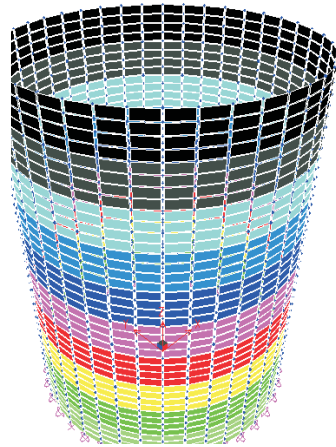


Figura 17: Output di **SAP2000** delle sollecitazioni di parallelo $N^{\theta\theta}$ di un cilindro caricato con pressione uniforme e peso proprio.

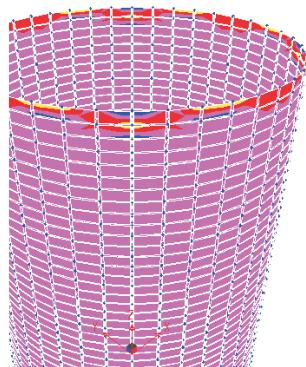


Figura 18: Output di **SAP2000** delle sollecitazioni di meridiano $N^{\varphi\varphi}$ di un cilindro caricato con pressione uniforme e peso proprio.

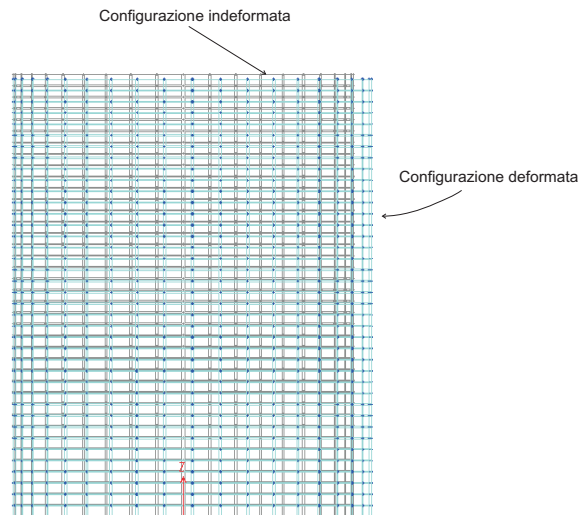


Figura 19: Configurazione deformata prodotta da **SAP2000** di un cilindro caricato con pressione uniforme e peso proprio.

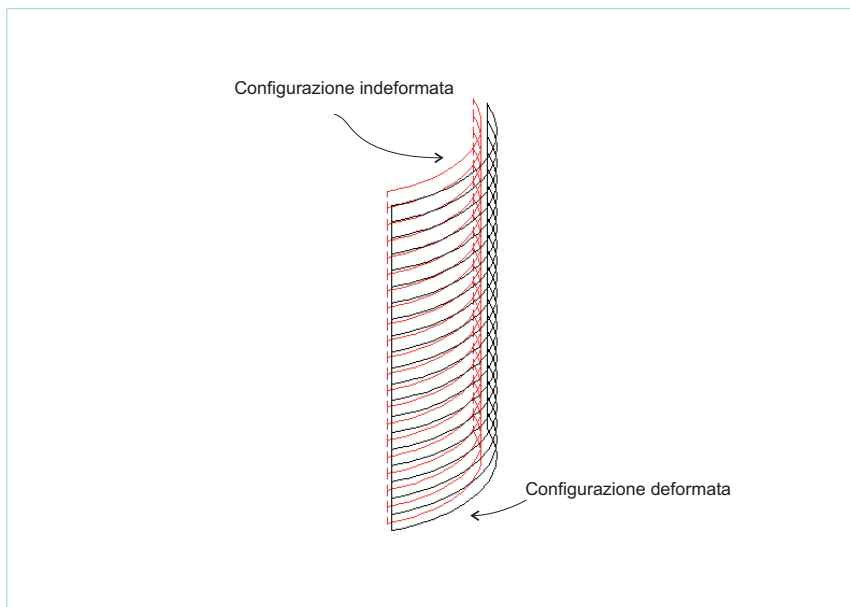


Figura 20: Configurazione deformata prodotta da **FEMAS90** di un cilindro caricato con pressione uniforme e peso proprio.

Condizione di carico assialsimmetrica: pressione idrostatica più peso proprio

Anche questa condizione di carico è rappresentata dalle due componenti non nulle q^{ξ} e q^z del vettore di carico q .

$$\begin{aligned} N^{\vartheta\theta} &= \frac{q^{\xi}}{r} \\ N^{\vartheta z},z &= 0 \\ N^{zz},z + q^z &= 0 \end{aligned}$$

Considerando le condizioni al contorno ($z = 0$) relative alla particolare condizione di carico e trasformando le sollecitazioni nelle rispettive componenti fisiche, si ottiene

$$\begin{aligned} N^{\langle\vartheta\theta\rangle} &= q^{\xi}r && \left[\frac{F}{L}\right] \\ N^{\langle\vartheta z\rangle},z &= 0 \Rightarrow N^{\langle\vartheta z\rangle} = 0 \\ N^{zz},z + q^z &= 0 \Rightarrow N^{zz} = \int_0^z -q^z d\zeta + K \Rightarrow \\ N^{zz} &= N^{\langle zz\rangle} = -q^z(z - h) && \left[\frac{F}{L}\right] \end{aligned}$$

Le componenti non nulle del vettore di deformazione v sono quella radiale e quella lungo z dovuta al peso oltre che all'effetto *Poisson*, rispettivamente scritte

$$\begin{aligned} v^{\xi} &= \frac{h - z}{E}r\left(\frac{\gamma L r}{2\epsilon} + \nu\gamma\right) && [L] \\ v^z &= \frac{r\nu\gamma l - q^z}{E(2\epsilon)}\left(\frac{z^2}{2} - hz\right) && [L] \end{aligned}$$

ESEMPIO APPLICATIVO

Caratteristiche geometriche

- $r = 300 \text{ cm}$
- $h = 800 \text{ cm}$
- $2\epsilon = 10 \text{ cm}$

Caratteristiche del materiale

- $E = 3350 \text{ KN/cm}^2$
- $\nu = 0.2$
- $\gamma_c = 25 \cdot 10^{-6} \text{ KN/cm}^3$

Carichi

- $q^s = \gamma_l(h - z) \text{ KN/cm}^2$
- $q^z = -\gamma_c(2\epsilon) = -25 \cdot 10^{-5} \text{ KN/cm}^2$
- $\gamma_l = 9.81 \cdot 10^{-6} \text{ KN/cm}^3$

Confronti

	ANAL.	NACS48(1x20)	Δ [%]	SAP(40x40)	Δ [%]
$N_{ z=800}^{\vartheta\vartheta}$	0.00	0.00	0.00	0.021	2.10
$N_{ z=400}^{\vartheta\vartheta}$	1.177	1.177	0.00	1.175	-0.17
$N_{ z=0}^{\vartheta\vartheta}$	2.353	2.358	0.21	2.330	-0.98
$N_{ z=800}^{zz}$	0.00	0.00	0.00	-0.005	-0.5
$N_{ z=400}^{zz}$	-0.10	-0.10	0.00	-0.091	-9.00
$N_{ z=0}^{zz}$	-0.20	-0.20	0.00	-0.193	-3.50
$v_{ z=800}^{\xi}$	0.00	0.00	0.00	0.011	1.10
$v_{ z=400}^{\xi}$	0.011	0.011	0.00	0.016	1.10
$v_{ z=0}^{\xi}$	0.021	0.021	0.00	0.021	0.00
$v_{ z=800}^z$	-0.008	-0.008	0.00	-0.008	0.00
$v_{ z=400}^z$	-0.006	-0.006	0.00	-0.006	0.00
$v_{ z=40}^z$	-0.0008	-0.0008	0.00	0.00	0.00

Tabella 4: Sollecitazioni e spostamenti a tre quote caratteristiche di un cilindro soggetto a peso proprio e pressione idrostatica.

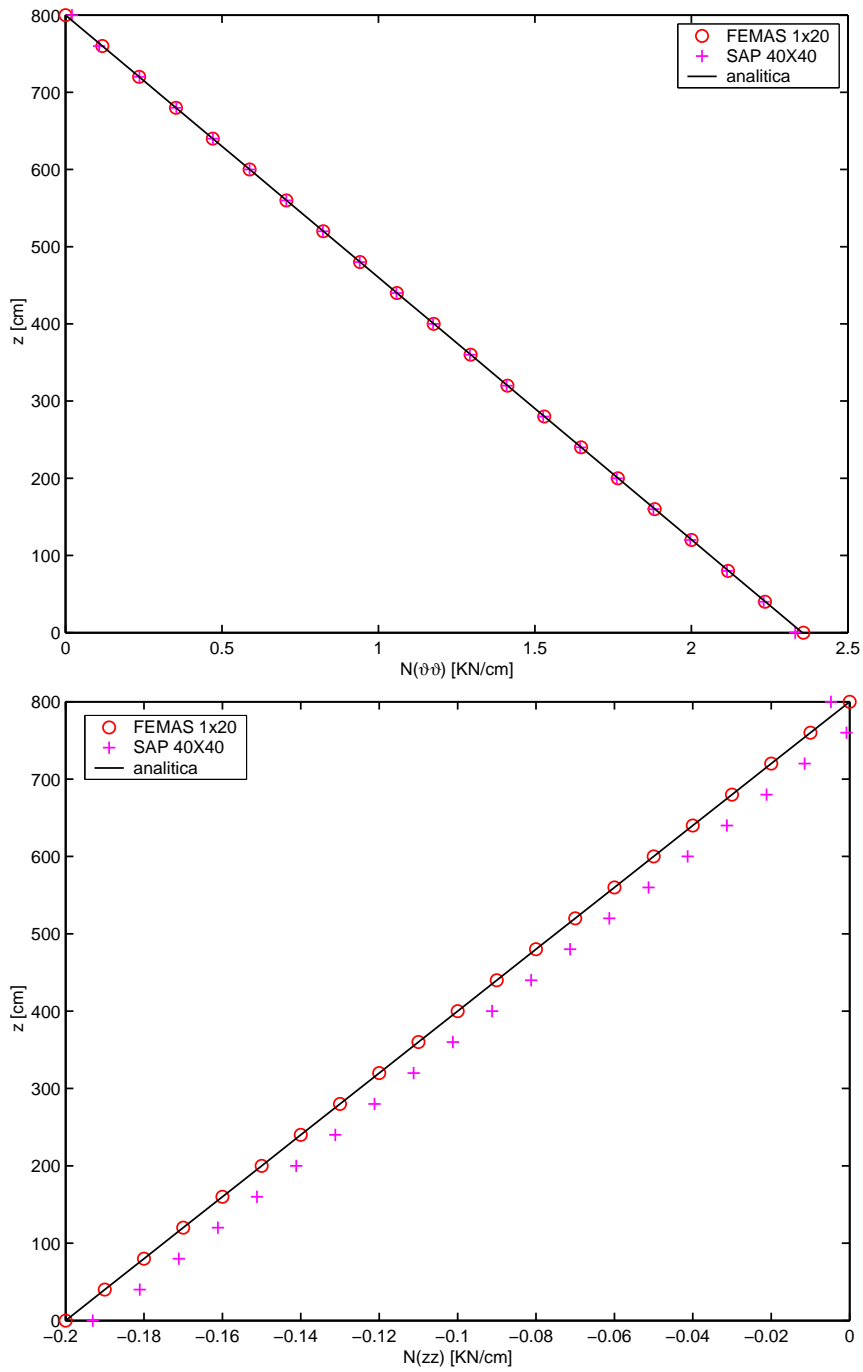


Figura 21: Confronto analitico-numerico delle sollecitazioni circonferenziale $N^{\theta\theta}$ e meridia N^{zz} . Vedi Tabella 4.

Vogliamo precisare che l'andamento delle sollecitazioni N^{zz} appena riportato coincide con quello per il caso di carico precedente. Come del tutto

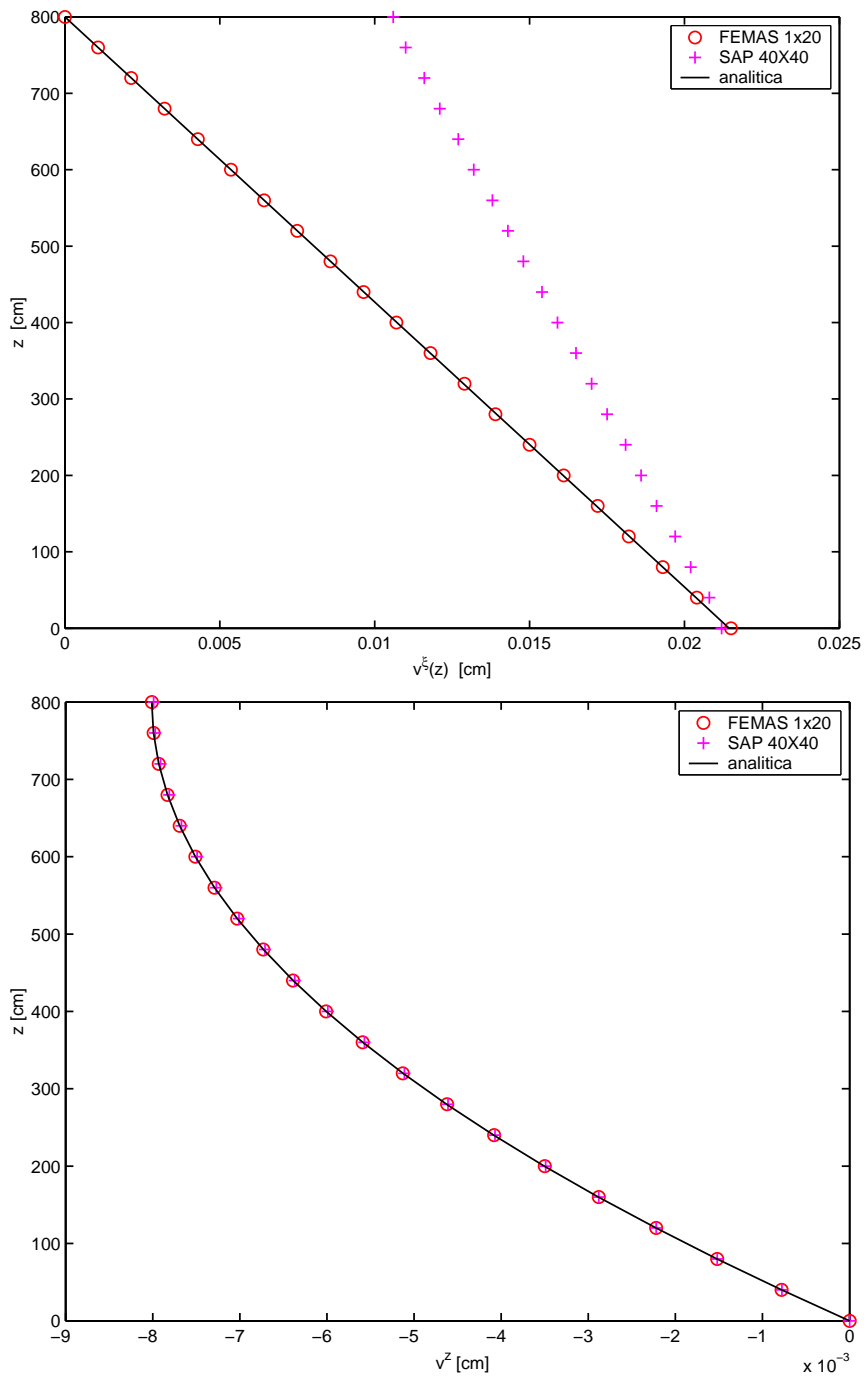


Figura 22: Confronto analitico-numerico degli spostamenti radiali v^ξ e verticali v^z . Vedi Tabella 4

evidente dai risultati analitici, ciò è dovuto alla natura disaccoppiata dello stato tensionale circonferenziale rispetto a quello meridionale. La deformazione indotta da questi casi di carico, infatti, può essere ottenuta per sovrapposizione degli effetti.



Figura 23: Output di **SAP2000** delle sollecitazioni di parallelo $N^{\theta\theta}$ di un cilindro caricato con peso proprio e pressione idrostatica.

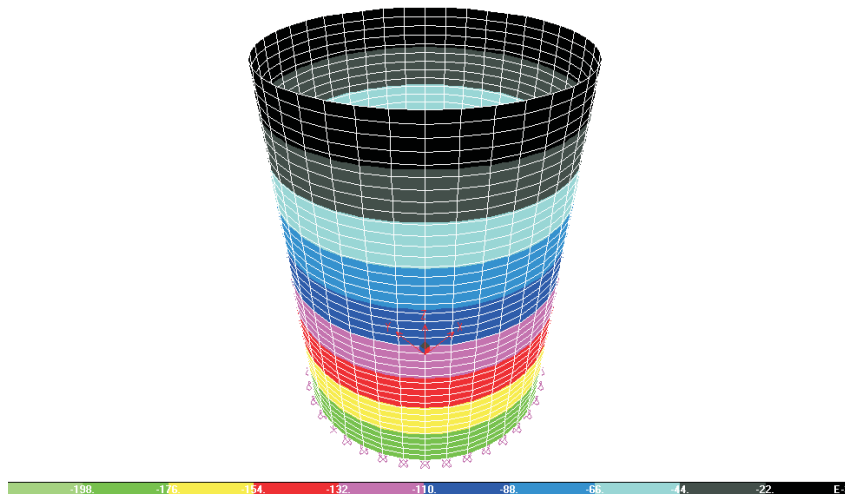


Figura 24: Output di **SAP2000** delle sollecitazioni di meridiano N^{zz} di un cilindro caricato con peso proprio e pressione idrostatica.

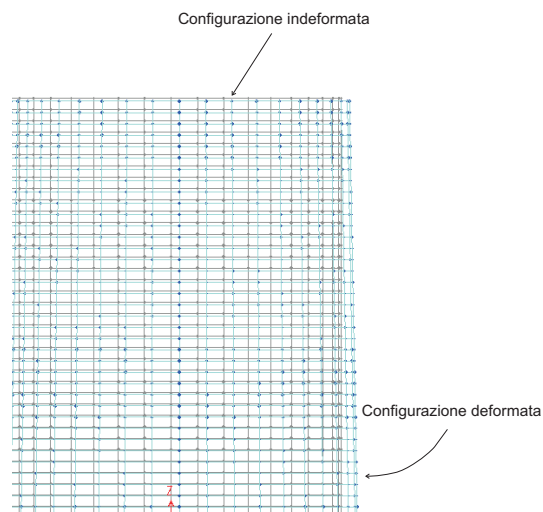


Figura 25: Configurazione deformata prodotta **SAP2000** di un cilindro caricato con pressione idrostatica e peso proprio.

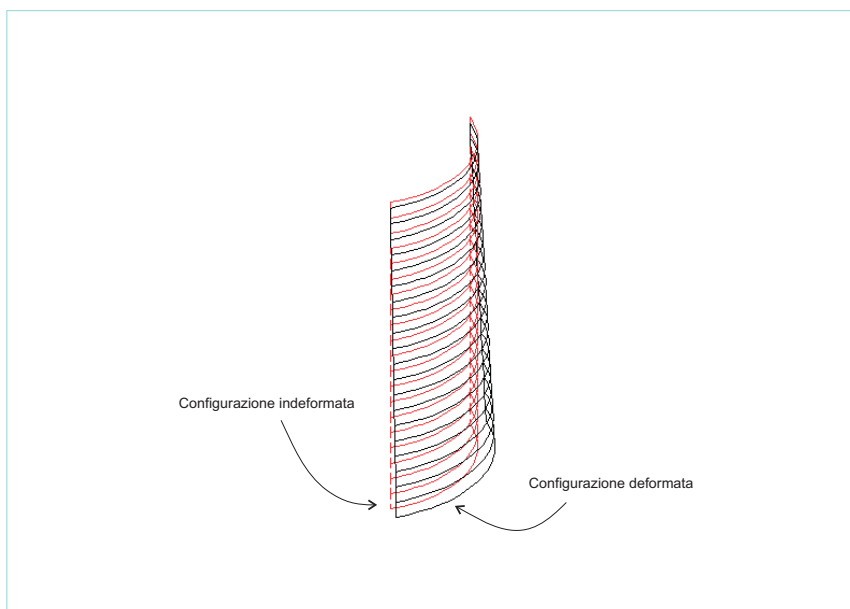


Figura 26: Configurazione deformata prodotta **FEMAS90** di un cilindro caricato con pressione idrostatica e peso proprio.

5.1.5 Iperboloide di rivoluzione soggetto a peso proprio

Come ultimo esempio applicativo consideriamo una torre di raffreddamento avente la forma di un iperboloide ad una falda soggetto al carico assialsimmetrico del peso proprio.

- **Geometria**

Per lo studio completo della geometria si considera innanzitutto una varietà M coincidente con lo spazio affine Euclideo E , in cui, definito un sistema di coordinate iperbolico (f, ϑ, z) , si calcola la metrica e i simboli di *Christoffel*.

Successivamente si considera la sottovarietà Riemanniana Q , di codimensione 1, rappresentata dall'iperboloide ad una falda. Pertanto, da un sistema di coordinate adattato, si passa ad un sistema di coordinate indotto $(\vartheta^\dagger, z^\dagger)$. Ovvero, $f|_Q = 0$ è il vincolo.

Dell'iperboloide si calcolano, dunque, la metrica, la connessione e le curvatures.

Consideriamo un sistema di coordinate iperbolico $(f, \vartheta, z) : E \rightarrow \mathbb{R}^3$ a cui è associata un origine $o \in E$ e una base ortonormale (e_i) of E .

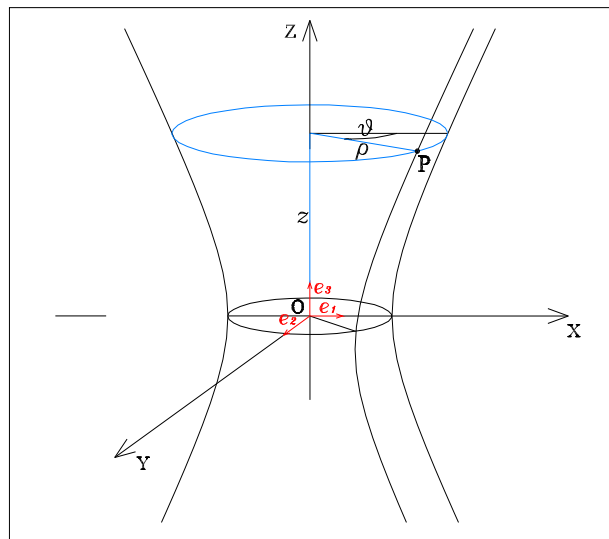


Figura 27: Coordinate iperboliche e cartesiane

Usiamo la funzione coordinata f per definire la superficie Q , i.e. $f = 0$,

che è caratterizzata dalla seguente funzione implicita in coordinate cartesiane

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} - 1 = 0$$

Definiamo, inoltre, la funzione coordinata f

$$f = \rho - \rho(z)$$

dove $\rho(z) = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Rispetto al sistema cartesiano vale la seguente trasformazione di coordinate

$$\begin{aligned} x &= \left(f + \frac{a}{b}\sqrt{b^2 + z^2}\right) \cos \vartheta \\ y &= \left(f + \frac{a}{b}\sqrt{b^2 + z^2}\right) \sin \vartheta \\ z &= z \end{aligned}$$

Proposizione 12. *Le espressioni in coordinate della metrica covariante e controvariante sono rispettivamente:*

$$\begin{aligned} g &= df \otimes df + \left(f + \frac{a}{b}\sqrt{b^2 + z^2}\right)^2 d\vartheta \otimes d\vartheta \\ &+ \left(\frac{a}{b} \frac{z}{\sqrt{b^2 + z^2}}\right) (df \otimes dz + dz \otimes df) \\ &+ \left(\frac{a^2 z^2}{b^2(b^2 + z^2)} + 1\right) dz \otimes dz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{g} &= \left(\frac{a^2 z^2}{b^2(b^2 + z^2)} + 1\right) \partial f \otimes \partial f \\ &- \left(\frac{a}{b} \frac{z}{\sqrt{b^2 + z^2}}\right) (\partial f \otimes \partial z + \partial z \otimes \partial f) \\ &+ \frac{1}{\left(f + \frac{a}{b}\sqrt{b^2 + z^2}\right)^2} \partial \vartheta \otimes \partial \vartheta + \partial z \otimes \partial z \end{aligned}$$

Proposizione 13. *I simboli di Christoffel non nulli nel sistema di coordinate iperbolico sono*

$$\begin{aligned} \Gamma_{zz}^f &= \frac{ab}{(\sqrt{b^2 + z^2})^3} \\ \Gamma_{\vartheta\vartheta}^f &= -\left(f + \frac{a}{b}\sqrt{b^2 + z^2}\right) \\ \Gamma_{f\vartheta}^{\vartheta} &= \Gamma_{\vartheta f}^{\vartheta} = \frac{1}{f + \frac{a}{b}\sqrt{b^2 + z^2}} \\ \Gamma_{z\vartheta}^{\vartheta} &= \Gamma_{\vartheta z}^{\vartheta} = \frac{az}{b\left(f + \frac{a}{b}\sqrt{b^2 + z^2}\right)\sqrt{b^2 + z^2}} \end{aligned}$$

Consideriamo ora il vincolo $\rho = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 + z^2}$, i.e. $f = 0$. Così, da un sistema di coordinate iperbolico adattato (f, ϑ, z) , otteniamo un sistema di coordinate indotto superficiale $(\vartheta^\dagger, z^\dagger)^{11}$.

Proposizione 14. *Le espressioni in coordinate della metrica covariante e controvariante superficiale sono, rispettivamente*

$$g^\dagger = \frac{a^2}{b^2}(b^2 + z^2)d\vartheta \otimes d\vartheta + \left(\frac{a^2 z^2}{b^2(b^2 + z^2)} + 1\right)dz \otimes dz$$

$$\bar{g}^\dagger = \frac{b^2}{a^2} \frac{1}{(b^2 + z^2)} \partial\vartheta \otimes \partial\vartheta + \frac{b^2(b^2 + z^2)}{a^2 z^2 + b^2(b^2 + z^2)} \partial z \otimes \partial z$$

Proposizione 15. *I simboli di Christoffel Γ^\dagger non nulli su Q sono*

$$\Gamma^\dagger_{z\vartheta}{}^\vartheta = \Gamma^\dagger_{\vartheta z}{}^\vartheta = \frac{z}{(b^2 + z^2)}$$

$$\Gamma^\dagger_{zz}{}^z = \frac{a^2 b^2 z}{[a^2 z^2 + b^2(b^2 + z^2)](b^2 + z^2)}$$

$$\Gamma^\dagger_{\vartheta\vartheta}{}^z = -\frac{a^2 z(b^2 + z^2)}{a^2 z^2 + b^2(b^2 + z^2)}$$

Proposizione 16. *Il vettore unitario normale è*

$$n = \sqrt{\frac{a^2 z^2 + b^2(b^2 + z^2)}{b^2(b^2 + z^2)}} \partial f - \frac{az}{\sqrt{a^2 z^2 + b^2(b^2 + z^2)}} \partial z$$

Proposizione 17. *Il tensore di Weingarten e la seconda forma fondamentale su Q sono, rispettivamente*

$$L = \frac{b^2}{a\sqrt{a^2 z^2 + b^2(b^2 + z^2)}} d\vartheta \otimes \partial\vartheta - \frac{ab^4}{[a^2 z^2 + b^2(b^2 + z^2)]^{\frac{3}{2}}} dz \otimes \partial z$$

$$\underline{L} = \frac{a(b^2 + z^2)}{\sqrt{a^2 z^2 + b^2(b^2 + z^2)}} d\vartheta \otimes d\vartheta - \frac{ab^2}{(b^2 + z^2)\sqrt{a^2 z^2 + b^2(b^2 + z^2)}} dz \otimes dz$$

Proposizione 18. *La curvatura totale (curvatura di Gauss), e la curvatura media sono*

$$K = -\frac{b^6}{[a^2 z^2 + b^2(b^2 + z^2)]^2}$$

$$H = \frac{a^2 b^2(z^2 - b^2) + b^4(b^2 + z^2)}{a[a^2 z^2 + b^2(b^2 + z^2)]^{\frac{3}{2}}}$$

¹¹In seguito ometteremo il simbolo \dagger su ϑ e z .

Dal tensore di *Weingarten*, inoltre, si ricavano immediatamente le curvatures principali dell' iperboloide

$$\lambda_1 = \frac{b^2(b^2 + z^2)}{a(b^2 + z^2)\sqrt{a^2z^2 + b^2(b^2 + z^2)}}$$

$$\lambda_2 = -\frac{ab^4}{[a^2z^2 + b^2(b^2 + z^2)]^{\frac{3}{2}}}$$

La scelta del sistema di coordinate superficiali (ϑ, z) è senz'altro quella più comoda e pratica per individuare i punti della superficie. Tuttavia, per poter risolvere le equazioni dell'equilibrio membranale sotto condizioni di carico assialsimmetriche, è di gran lunga più vantaggioso scegliere al posto della coordinata z l'angolo φ che il prolungamento della normale alla superficie forma con l'asse Z del sistema cartesiano. Vedi figura 27.

La funzione coordinata φ è legata alla z dalla seguente relazione

$$\varphi = \sin^{-1} \left(\frac{\sqrt{b^2 + z^2}}{\sqrt{b^2 + k^2z^2}} \right)$$

Dove k è un fattore geometrico adimensionale

$$k = \sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2}}$$

- **Equilibrio**

Usando la coordinata φ , la risoluzione delle equazioni di equilibrio membranale, vedi [7], ci permette di scrivere le espressioni delle caratteristiche della sollecitazione

$$N^{<\varphi\varphi>} = \frac{qa\sqrt{k^2 \sin^2 \varphi - 1}}{\sin^2 \varphi \sqrt{k^2 - 1}} (\zeta(\varphi) - \zeta(\varphi_t))$$

$$N^{<\vartheta\vartheta>} = \frac{a\sqrt{k^2 - 1}}{k^2 \sin^2 \varphi - 1} \left(-q \cos \varphi + \frac{N^{<\varphi\varphi>} (k^2 \sin^2 \varphi - 1)^{\frac{3}{2}}}{a\sqrt{k^2 - 1}} \right)$$

Dove q è il peso proprio per unità di superficie (assunto costante dato lo spessore costante) e la funzione ζ vale

$$\zeta = \frac{-\cos \varphi}{2(k^2 \sin^2 \varphi - 1)} + \frac{1}{4k\sqrt{k^2 - 1}} \ln \left(\frac{\sqrt{k^2 - 1} - k \cos \varphi}{\sqrt{k^2 - 1} + k \cos \varphi} \right)$$

ESEMPIO APPLICATIVO

La modellazione in SAP è stata eseguita con una mesh di 4200 elementi piani. Per simulare un appoggio della struttura su sede conica abbiamo aumentato notevolmente la rigidità della corona degli elementi di base e parallelamente abbiamo assegnato a questi un comportamento a lastra per escludere un effetto incastro. Con il FEMAS abbiamo modellato un quarto di iperboloidi vincolandolo per simmetria lungo i meridiani di bordo. Alla base la struttura è appoggiata su sede conica.

Caratteristiche geometriche

- $a = 4263.00 \text{ cm}$
- $b = 21148.00 \text{ cm}$
- $k = 1.02011$
- $H = T + S = 20000 \text{ cm}$
- $T = 5800.00 \text{ cm}$
- $S = 14200.00 \text{ cm}$
- $\rho(z = -14200.00) = s = 5134.80 \text{ cm}$
- $\rho(z = 5800.00) = t = 4420.419 \text{ cm}$
- $\rho(z = 0.00) = a = 4263.00 \text{ cm}$
- $\varphi_s = 83.588 \text{ [deg]}$
- $\varphi_t = 93.052 \text{ [deg]}$
- $2(\epsilon) = 25 \text{ cm}$

Si è indicato con H l'altezza totale della torre, T l'altezza della torre a partire dalla sezione di gola fino alla estremità superiore, S l'altezza della torre dalla base fino alla sezione di gola, s il raggio di base, t il raggio in testa, a il raggio di gola. Vedi figura 28

Caratteristiche del materiale

- $E = 3350 \text{ KN/cm}^2$
- $\nu = 0.2$
- $\gamma_C = 25 \cdot 10^{-6} \text{ KN/cm}^3$

Carico

- $q = \gamma_C \cdot 2(\epsilon) = 6.25 \cdot 10^{-4} \text{ KN/cm}^2$

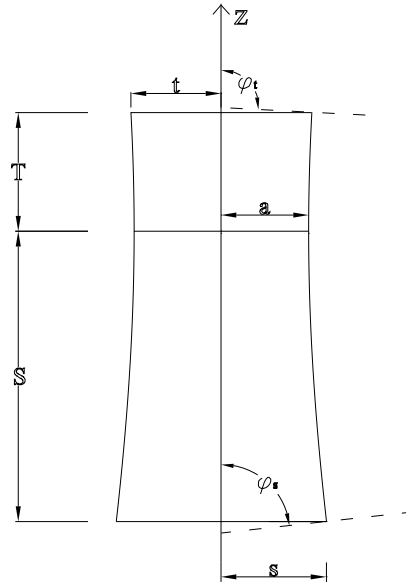


Figura 28: Caratteristiche geometriche dell'iperboloide di rotazione.

Confronti

	ANAL.	NACS48(1x20)	Δ [%]	SAP(70x60)	Δ [%]
$N_{z=5800}^{\vartheta\vartheta}$	0.1474	-3.9341	*	0.099	-32.83
$N_{z=0}^{\vartheta\vartheta}$	-0.1492	-2.569	*	0.119	*
$N_{z=-14200}^{\vartheta\vartheta}$	-0.6656	-0.662	0.54	-2.477	*
$N_{z=5800}^{\varphi\varphi}$	0.0008	-0.6648	*	-0.104	*
$N_{z=0}^{\varphi\varphi}$	-3.671	-3.608	1.72	-3.622	1.33
$N_{z=-14200}^{\varphi\varphi}$	-11.026	-11.024	0.018	-10.865	1.46

Tabella 5: Sollecitazioni e spostamenti a tre quote caratteristiche di una torre di raffreddamento iperbolica soggetta al peso proprio. Nelle caselle contrassegnate dagli asterischi si è omesso il valore numerico perchè non attendibile. Ci sono casi con scarti superiori al 100%.

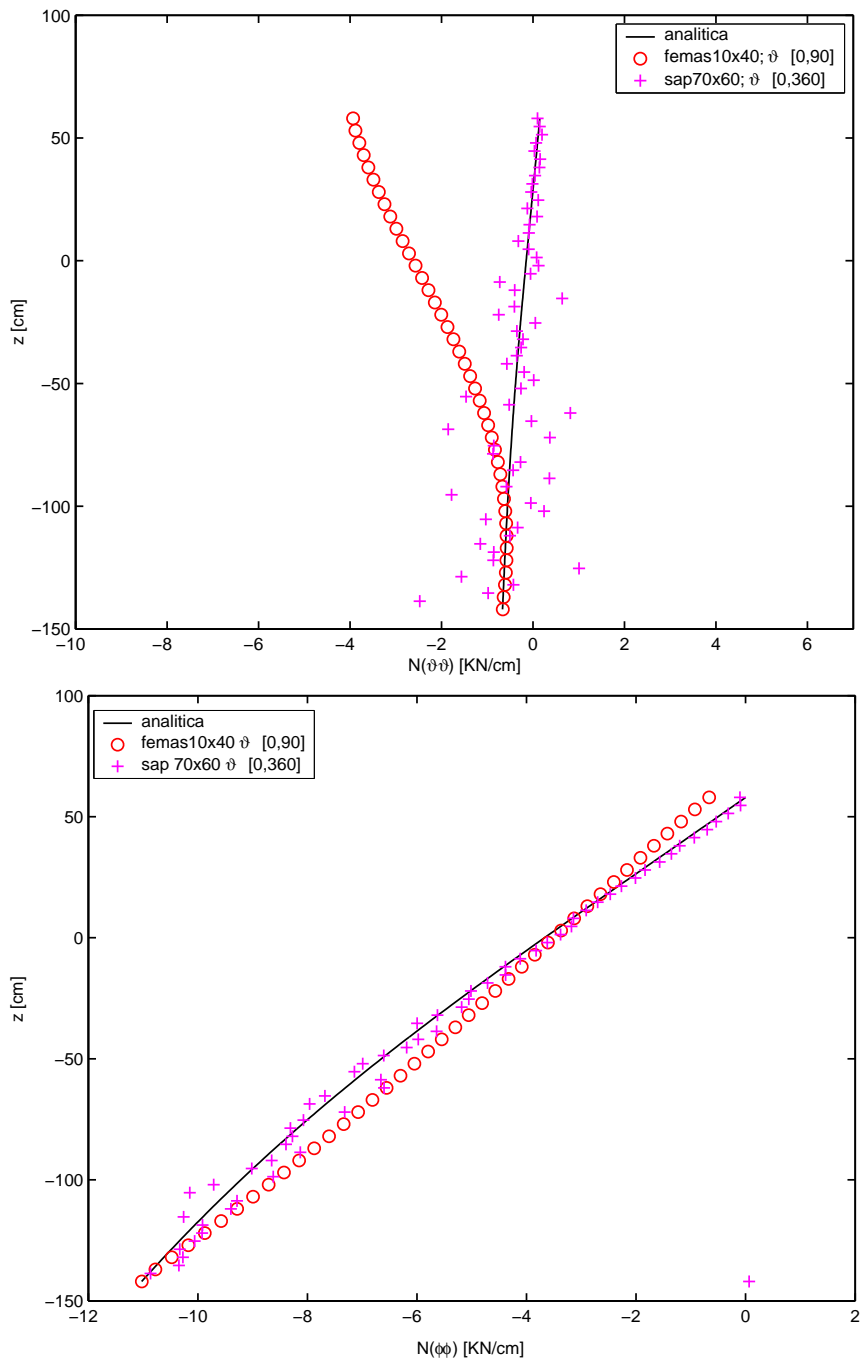


Figura 29: Confronto analitico-numerico delle sollecitazioni meridiane e circonferenziali di una torre di raffreddamento iperbolica soggetta al peso proprio. Vedi Tabella 5



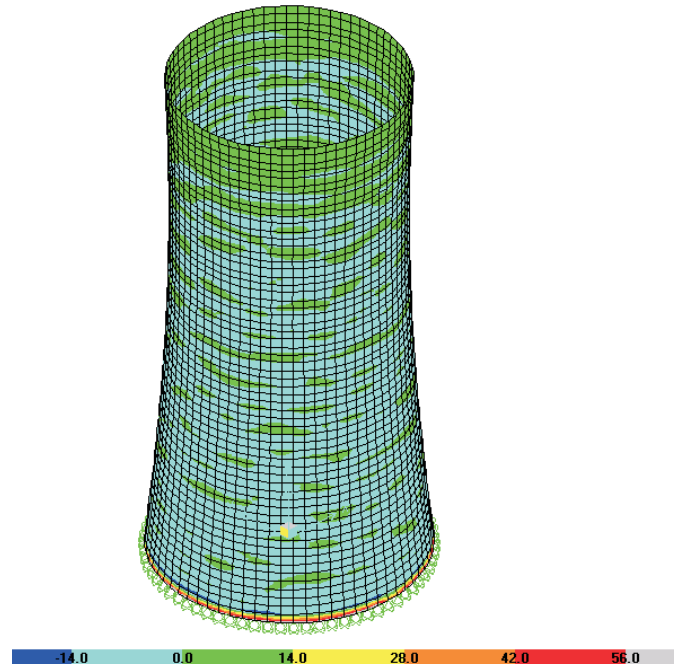


Figura 30: Output di **SAP2000** delle sollecitazioni parallelo $N^{\theta\theta}$ di un iperboloide soggetto al peso proprio.

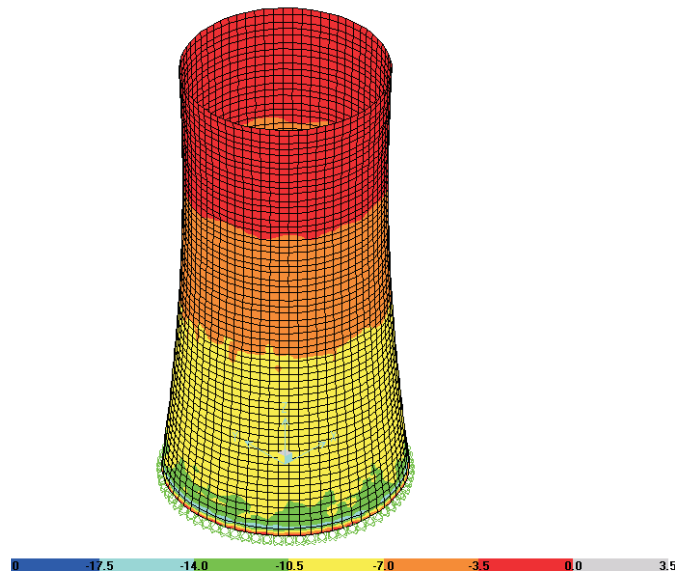


Figura 31: Output delle sollecitazioni di meridiano $N^{\varphi\varphi}$ di un iperboloide soggetto al peso proprio.

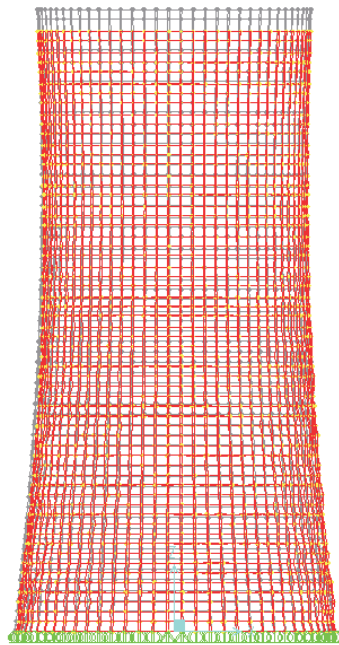


Figura 32: Configurazione deformata prodotta da **SAP2000** di un iperboloido soggetto a peso proprio.

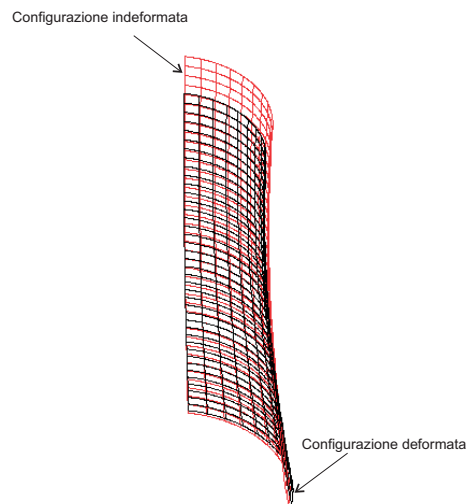
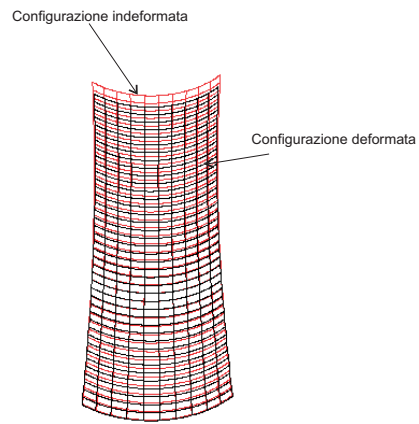


Figura 33: Due punti di vista della configurazione deformata prodotta da **FEMAS90** di un iperboloide soggetto a peso proprio.

6 Influenza degli effetti di bordo sul regime di sforzi membranale

Le condizioni di vincolo esterne finora considerate sono state pensate prevalentemente per garantire uno stato di sollecitazioni membranale. In quest'ultimo capitolo vogliamo mostrare che l'influenza di vincoli differenti, come gli incastrati di base, non invalida significativamente i risultati della teoria membranale. Come apparirà chiaro dai grafici che seguono, gli effetti flessionali indotti dalle condizioni vincolari di bordo tendono ad estinguersi rapidamente; possono essere fronteggiati a livello locale.

6.1 Effetti di bordo indotti da incastrati alla base in duomo sferico soggetto al peso proprio

Riportiamo alcuni valori numerici delle sollecitazioni e degli spostamenti che si hanno in un duomo sferico (con le caratteristiche descritte negli esempi precedenti) soggetto al peso proprio e incastrato alla base.

	ANA.	SAP(40X40)
$N_{ \varphi=0}^{\vartheta\vartheta}$	-1.5	-0.350
$N_{ \varphi=45}^{\vartheta\vartheta}$	0.00	-0.092
$N_{ \varphi=90}^{\vartheta\vartheta}$	1.5	-0.166
$N_{ \varphi=0}^{\varphi\varphi}$	-1.5	-0.491
$N_{ \varphi=45}^{\varphi\varphi}$	-1.5	-0.445
$N_{ \varphi=90}^{\varphi\varphi}$	-1.5	-0.831
$v_{ \varphi=0}^Z$	-	-0.038
$v_{ \varphi=45}^Z$	-	-0.019
$v_{ \varphi=90}^Z$	-	0.00
$v_{ \varphi=0}^R$	-	0.00
$v_{ \varphi=45}^R$	-	0.00
$v_{ \varphi=90}^R$	-	0.00

Tabella 6: Sollecitazioni e spostamenti di un duomo sferico incastrato alla base e soggetto al peso proprio.

Per migliorare la leggibilità del grafico, sull'asse delle ascisse - che diversamente dalla consuetudine abbiamo riportato in verticale - la variabile indipendente è $\phi^* = 90 - \varphi$ anziché φ .

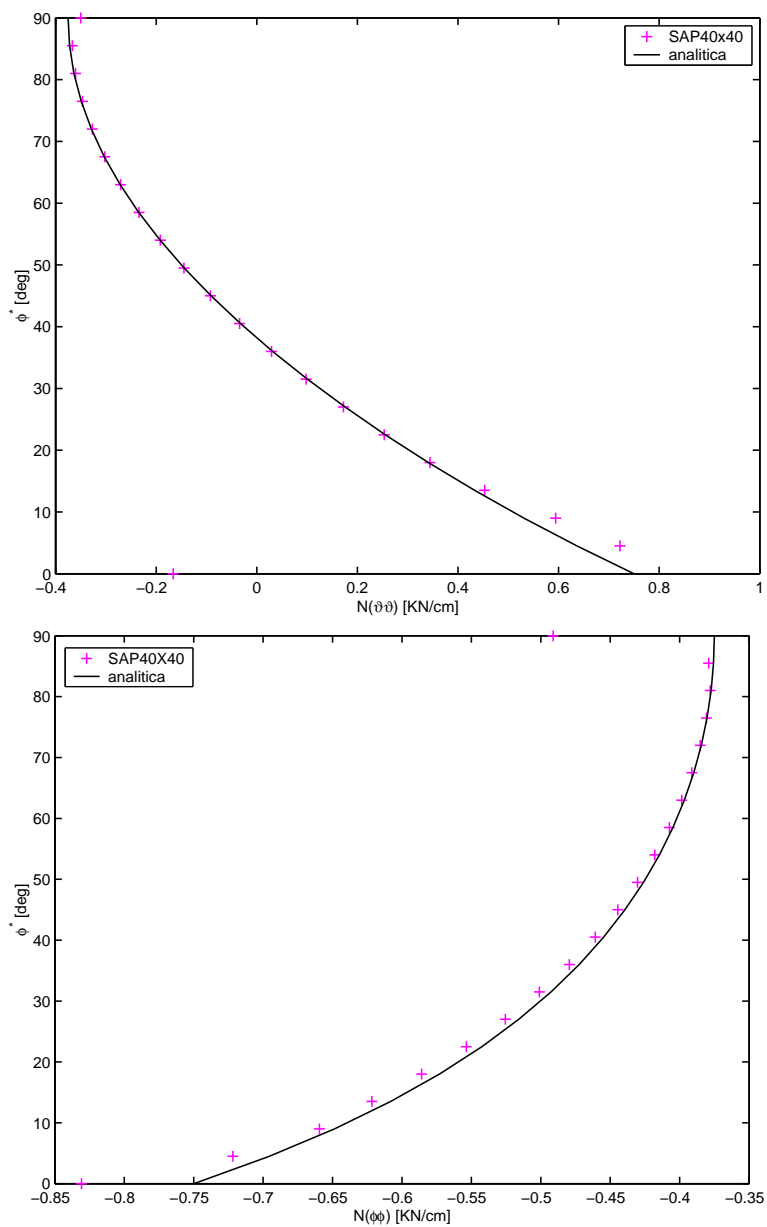


Figura 34: Confronto analitico e numerico delle sollecitazioni circonferenziali e meridionali di un duomo sferico soggetto al peso proprio incastrato alla base.

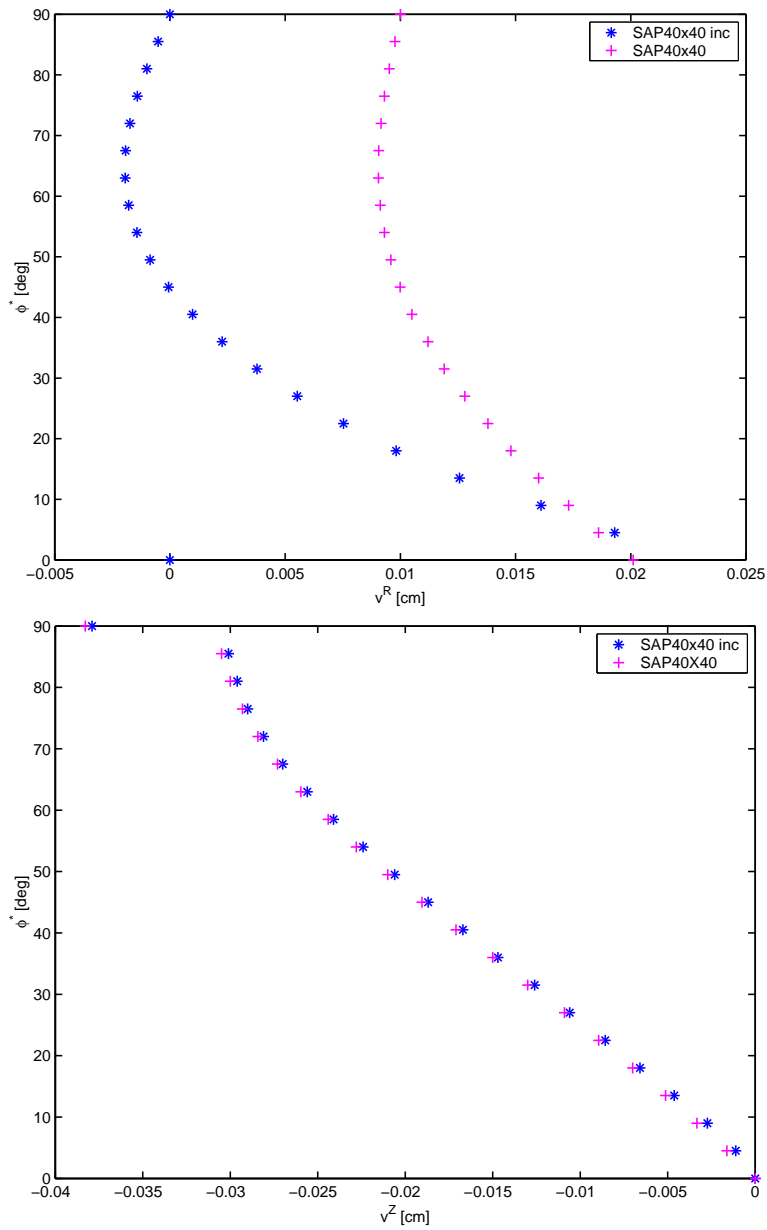


Figura 35: Confronto numerico degli spostamenti di un duomo sferico soggetto al peso proprio incastrato alla base.

6.2 Effetti di bordo indotti da incastri alla base in un cilindro soggetto ad una pressione idrostatica e al peso proprio

Riportiamo alcuni valori numerici delle sollecitazioni e degli spostamenti che si hanno in un cilindro (con le caratteristiche descritte negli esempi precedenti) soggetto al peso proprio e ad una pressione idrostatica con incastri alla base.

	ANAL.	SAP(40x40)
$N _{z=800}^{\vartheta\vartheta}$	0.00	0.021
$N _{z=400}^{\vartheta\vartheta}$	1.177	1.171
$N _{z=0}^{\vartheta\vartheta}$	2.353	-0.090
$N _{z=800}^{zz}$	0.00	-0.005
$N _{z=400}^{zz}$	-0.10	-0.109
$N _{z=0}^{zz}$	-0.20	-0.448
$v _{z=800}^{\xi}$	0.00	0.00
$v _{z=400}^{\xi}$	0.011	0.011
$v _{z=0}^{\xi}$	0.021	0.00
$v _{z=800}^z$	-0.008	-0.008
$v _{z=400}^z$	-0.006	-0.006
$v _{z=40}^z$	-0.0008	0.00

Tabella 7: Sollecitazioni e spostamenti a tre quote caratteristiche del cilindro caricato con pressione idrostatica e peso proprio con effetto degli incastri di base.

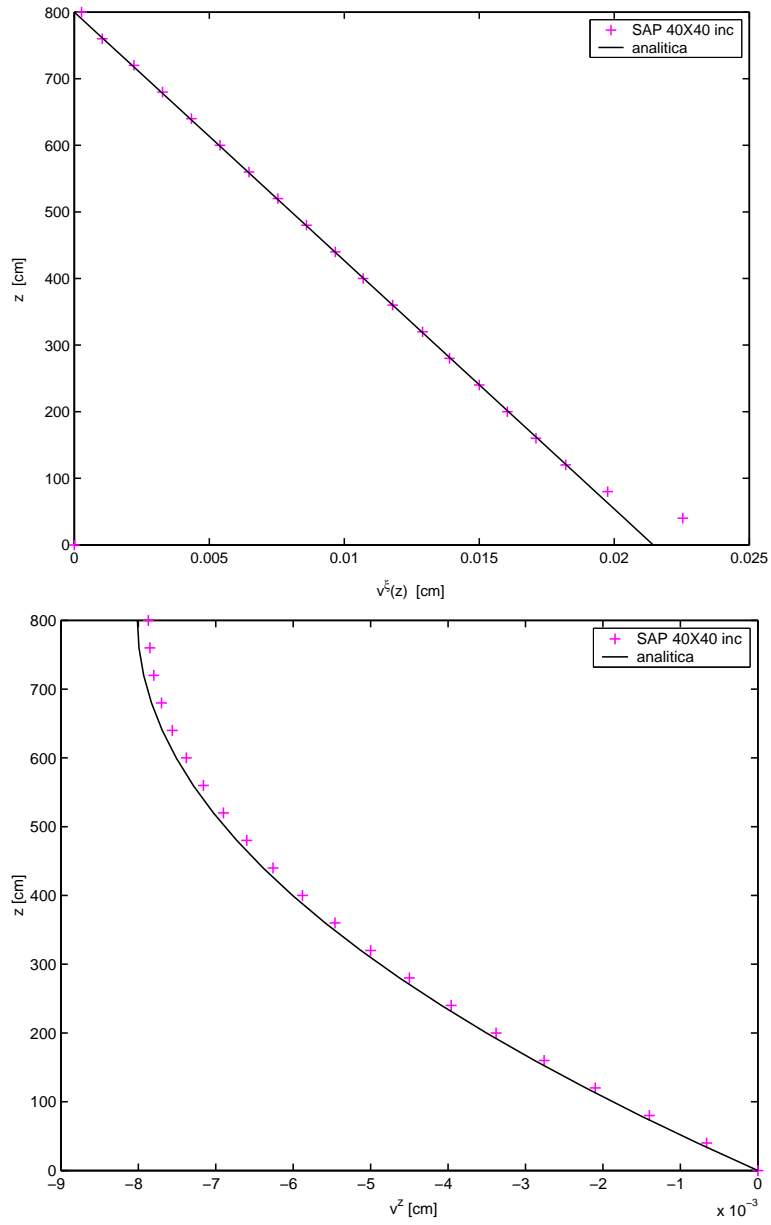


Figura 36: Confronto analitico-numerico degli spostamenti radiali v^ξ e verticali v^z . Vedi Tabella 7

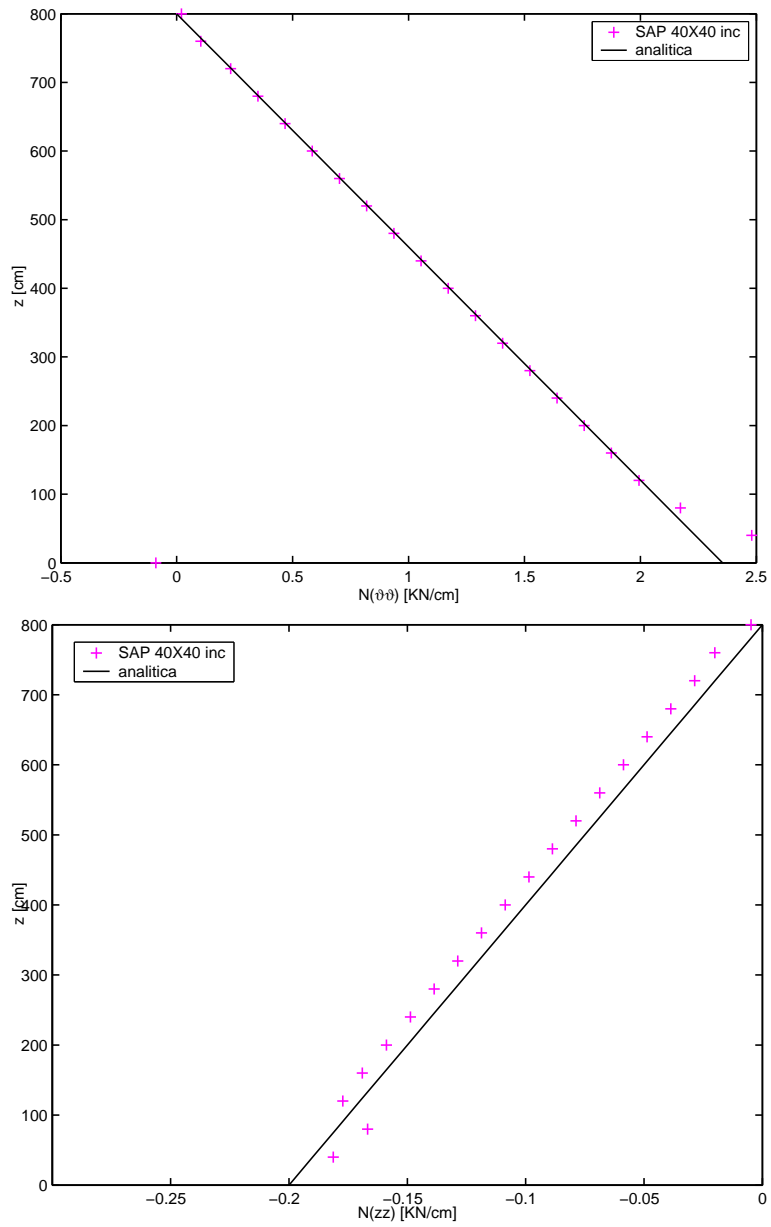


Figura 37: Confronto analitico-numerico delle sollecitazioni circolari $N^{\theta\theta}$ e meridiane N^{zz} . Vedi Tabella 7.



Riferimenti bibliografici

- [1] Yavuz Basar - E.h.Wilfried B.Krätzig: *Theory of Shell Structures*. Reihe 18, Mechanik/Bruchmechanik, Nr.258, 2000.
- [2] P.Podio Guidugli: *Lezioni sulla teoria lineare dei gusci elastici sottili*. Ed.Masson, Milano 1991.
- [3] Cesare Davini: *Lezioni sulla teoria dei gusci*. Dispense, 1993.
- [4] M.Modugno: *Sistemi Continui* Appunti per gli studenti. [<http://poincare.dma.unifi.it/~modugno/didattica>]
- [5] M.Modugno: *Notes on geometry of surfaces*. Notes for students used in the course of Mathematical Physics for Civil Engineers. [<http://poincare.dma.unifi.it/~modugno/didattica>]
- [6] C.Borri - R.Harte: *A doubly curved thin shell finite element for the analysis of hyperboloidal natural draught cooling towers. Linear Analysis*.
- [7] Phillip L.Gould: *Static Analysis of Shells*. Toronto, Lexington Book,1977.
- [8] W.Flugge: *Stress in Shells* Berlin, 1966.
- [9] L.Fischer: *Theory and Practice of Shell Structures* Berlin, Munich, 1968.