Cognome	Nome	Matricola

0.1 Esercizio. 30 minuti

Consideriamo un moto continuo, la cui espressione è (τ , ω , $a \in \mathbb{R}$ sono tre costanti date)

$$C^x(s,t;p) = x(p) + a\,(s-t)\,,$$
$$C^y(s,t;p) = \exp(\frac{s-t}{\tau})\big(y(p)\,\cos\omega(s-t) + z(p)\,\sin\omega(s-t)\big)\,,$$
$$C^z(s,t;p) = \exp(\frac{s-t}{\tau})\big(-y(p)\,\sin\omega(s-t) + z(p)\,\cos\omega(s-t)\big)\,.$$

1. L'espressione euleriana della velocità è

$$\bar{\mathrm{v}}(t,p) := (\delta C)(t,p) = [\quad a \quad]\,\bar{e}_x + [\quad \frac{1}{\tau}\,y(p) + \omega\,z(p) \quad]\,\bar{e}_y + [\quad \frac{1}{\tau}\,z(p) - \omega\,y(p) \quad]\,\bar{e}_z\,.$$

2. La derivata parziale rispetto al tempo della velocità è

$$(\partial_0\bar{\mathrm{v}})(t,p) = [\quad 0 \quad]\,\bar{e}_x + [\quad 0 \quad]\,\bar{e}_y + [\quad 0 \quad]\,\bar{e}_z\,.$$

3. L'espressione euleriana dell'accelerazione è

$$\bar{\mathrm{a}}(t,p) := (\delta^2 C)(t,p) = (\delta\bar{\mathrm{v}})(t,p) =$$
$$= [\quad 0 \quad]\bar{e}_x + [\quad \frac{1}{\tau^2}\,y(p) + 2\,\frac{\omega}{\tau}\,z(p) - \omega^2 y(p) \quad]\bar{e}_y + [\quad \frac{1}{\tau^2}\,z(p) - 2\,\frac{\omega}{\tau}\,y(p) - \omega^2 z(p) \quad]\bar{e}_z\,.$$

4. La matrice dell'operatore jacobiano è

$$(J^i_j)(s,t,p) := (\overset{\vee}{D}C)(s;t,p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \exp(\frac{s-t}{\tau})\,\cos\omega(s-t) & \exp(\frac{s-t}{\tau})\,\sin\omega(s-t) \\ 0 & -\exp(\frac{s-t}{\tau})\,\sin\omega(s-t) & \exp(\frac{s-t}{\tau})\,\cos\omega(s-t) \end{pmatrix}.$$

5. La matrice dell'operatore delle deformazioni lineari è

$$(\mathcal{D}^i_j)(s,t,p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \exp(\frac{s-t}{\tau}) & 0 \\ 0 & 0 & \exp(\frac{s-t}{\tau}) \end{pmatrix}.$$

6. La matrice dell'operatore delle rotazioni è

$$(\mathcal{R}^i_j)(s;t,p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\omega(s-t) & \sin\omega(s-t) \\ 0 & -\sin\omega(s-t) & \cos\omega(s-t) \end{pmatrix}.$$

7. Il determinante dell'operatore jacobiano è

$$\det(J^i_j)(s;t,p) = \det(\mathcal{D}^i_j)(s;t,p) = [\quad \exp(\frac{2\,(s-t)}{\tau}) \quad]\,.$$

8. La matrice della derivata spaziale della velocità e della derivata totale temporale dell'operatore jacobiano è

$$(\overset{\vee}{D}\bar{\mathrm{v}})^i_j(t,p) = (\delta J^i_j)(t,p) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\tau & \omega \\ 0 & -\omega & 1/\tau \end{pmatrix}.$$

9. La matrice del tensore delle deformazioni infinitesime è

$$(\epsilon^i_j)(t,p) := \mathrm{Sim}(\overset{\vee}{D}\bar{\mathrm{v}}^i_j)(t,p) = \mathrm{Sim}(\delta J^i_j)(t,p) = \delta(\mathcal{D}^i_j)(t,p) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\tau & 0 \\ 0 & 0 & 1/\tau \end{pmatrix}.$$

10. La matrice del tensore delle rotazioni infinitesime è

$$(\omega^i_j)(t,p) := \mathrm{Ant}(\overset{\vee}{D}\bar{\mathrm{v}}^i_j)(t,p) = \mathrm{Ant}(\delta J^i_j)(t,p) = \delta(\mathcal{R}^i_j)(t,p) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega \\ 0 & -\omega & 0 \end{pmatrix}.$$

11. La divergenza della velocità è

$$(\operatorname{div}\bar{v})(t,p) := \operatorname{tr}((\overset{\vee}{D}\bar{v})^i_j)(t,p) = \operatorname{tr}(\epsilon^i_j)(t,p) = \delta(\det(J^i_j))(t,p) = \delta(\det(\mathcal{D}^i_j))(t,p) = [\quad \frac{2}{\tau} \quad].$$

12. La velocità angolare è

$$\bar{\Omega}(t,p) = \tfrac{1}{2}\,(\operatorname{rot}\bar{v})(t,p) = [\quad -\omega \quad]\,\bar{e}_x + [\quad 0 \quad]\,\bar{e}_y + [\quad 0 \quad]\,\bar{e}_z\,.$$

13. Il confronto delle due formule seguenti esprimenti l'accelerazione (vedi risposte 3, 8, 1) dà esito positivo sì ■ no □

$$\bar{a} = \delta^2 C \qquad \text{ed} \qquad \bar{a} = \partial_0\bar{v} + \overset{\vee}{D}\bar{v}(\bar{v})\,.$$

14. Il moto è traslatorio *sì* □ *no* ■, stazionario *sì* ■ *no* □, irrotazionale *sì* □ *no* ■, rigido *sì* □ *no* ■ .

Consideriamo una densità di massa, la cui espressione euleriana è ($\mu_0\,, \tau\,, l \in \mathbb{R}^+$ sono tre costanti date)

$$\mu(t,p) = \mu_0\,\exp(-2\,t/\tau)\,\exp\Big(\frac{-\big(y^2(p)+z^2(p)\big)}{l^2}\Big)\,.$$

15. La derivata spaziale della densità di massa è [*eseguire le ovvie semplificazioni*]

$$(\overset{\vee}{D}\mu)(t,p) = [\quad 0 \quad]\,Dx + [\quad -2\,\mu(t,p)\,\frac{y(p)}{l^2} \quad]\,Dy + [\quad -2\,\mu(t,p)\,\frac{z(p)}{l^2} \quad]\,Dz\,.$$

16. La derivata spaziale della densità di massa lungo la velocità è [*eseguire le ovvie semplificazioni*]

$$\big((\overset{\vee}{D}\mu)(\bar{v})\big)(t,p) = [\quad -\frac{2}{\tau}\,\mu(t,p)\,\frac{y^2(p)+z^2(p)}{l^2} \quad].$$

17. La derivata parziale rispetto al tempo della densità di massa è [*eseguire le ovvie semplificazioni*]

$$(\partial_0\mu)(t,p) = [\quad -\frac{2}{\tau}\,\mu(t,p) \quad].$$

18. La derivata totale rispetto al tempo della densità di massa è [*eseguire le ovvie semplificazioni*]

$$(\delta\mu)(t,p) = [\quad -\frac{2}{\tau}\,\mu(t,p) - \frac{2}{\tau}\,\mu(t,p)\,\frac{y^2(p)+z^2(p)}{l^2} \quad].$$

19. L'equazione di continuità è verificata? *sì* □ *no* ■ .

0.2 Esercizio. 10 minuti
Consideriamo un continuo elastico ed isotropo (nell'approssimazione lineare) caratterizzato dalle costanti elastiche λ e μ.
Consideriamo un tensore delle deformazioni infinitesime la cui matrice è ($a \in \mathbb{R}$ è una costante data)

$$(\epsilon_{ij}) = \begin{pmatrix} a\,x & 0 & 0 \\ 0 & a\,x & 0 \\ 0 & 0 & a\,x \end{pmatrix}.$$

2. Il tensore $\underset{\sim}{\epsilon}$ soddisfa le condizioni di integrabilità dei tensori delle deformazioni infinitesime? *sì* ■ *no* □ .
3. La matrice del tensore delle tensioni è (eseguire le semplificazioni evidenti)

$$(\sigma_{ij}) = \begin{pmatrix} (2\,\mu+3\,\lambda)\,a\,x & 0 & 0 \\ 0 & (2\,\mu+3\,\lambda)\,a\,x & 0 \\ 0 & 0 & (2\,\mu+3\,\lambda)\,a\,x \end{pmatrix}.$$

1. La divergenza del tensore delle tensioni è

$$\operatorname{div}\bar{\sigma} = [\quad (2\,\mu+3\,\lambda)\,a \quad]\,\bar{e}_x + [\quad 0 \quad]\,\bar{e}_y + [\quad 0 \quad]\,\bar{e}_z\,.$$

4. La densità di potenza delle tensioni è

$$\underset{\sim}{\epsilon}\cdot\underset{\sim}{\sigma} = [\quad 3\,(2\,\mu+3\,\lambda)\,a^2\,x^2 \quad].$$

5. Il tensore delle tensioni è isotropo? *sì* ■ *no* □ .
6. Il tensore delle deformazioni infinitesime è isotropo? *sì* ■ *no* □ .