| Cognome | Nome | Matricola |
|---|---|---|

**0.1 Esercizio.** 30 minuti

**Consideriamo un moto continuo, la cui espressione è** ($\tau$ , $\omega$ , $a$ , $b$ , $c \in \mathbb{R}$ sono cinque costanti date)

$$\begin{aligned} C^x(s,t;p) &= a\,s + \big(x(p) - a\,t\big)\,\cos\omega(s-t) + \big(z(p) - c\,t\big)\,\sin\omega(s-t)\,, \\ C^y(s,t;p) &= b\,s + \exp(\frac{s-t}{\tau})\,\big(y(p) - b\,t\big)\,, \\ C^z(s,t;p) &= c\,s - \big(x(p) - a\,t\big)\,\sin\omega(s-t) + \big(z(p) - c\,t\big)\,\cos\omega(s-t)\,. \end{aligned}$$

1. L'espressione euleriana della velocità è

$$\bar{\mathrm{v}}(t,p) := (\delta C)(t,p) = [\quad a + \omega\,\big(z(p) - c\,t\big)\quad]\,\bar{e}_x + [\quad b + \frac{1}{\tau}\,\big(y(p) - b\,t\big)\quad]\,\bar{e}_y + [\quad c - \omega\,\big(x(p) - a\,t\big)\quad]\,\bar{e}_z\,.$$

2. La derivata parziale rispetto al tempo della velocità è

$$(\partial_0\bar{\mathrm{v}})(t,p) = [\quad -\omega\,c\quad]\,\bar{e}_x + [\quad -\frac{b}{\tau}\quad]\,\bar{e}_y + [\quad \omega\,a\quad]\,\bar{e}_z\,.$$

3. L'espressione euleriana dell'accelerazione è

$$\bar{\mathrm{a}}(t,p) := (\delta^2 C)(t,p) = (\delta\bar{\mathrm{v}})(t,p) = [\quad -\omega^2\,\big(x(p) - a\,t\big)\quad]\,\bar{e}_x + [\quad \frac{1}{\tau^2}\,\big(y(p) - b\,t\big)\quad]\,\bar{e}_y + [\quad -\omega^2\,\big(z(p) - c\,t\big)\quad]\,\bar{e}_z\,.$$

4. La matrice dell'operatore jacobiano è

$$(J^i_j)(s,t,p) := (\overset{\vee}{D}C)(s;t,p) = \begin{pmatrix} \cos\omega(s-t) & 0 & \sin\omega(s-t) \\ 0 & \exp(\frac{s-t}{\tau}) & 0 \\ -\sin\omega(s-t) & 0 & \cos\omega(s-t) \end{pmatrix}.$$

5. La matrice dell'operatore delle deformazioni lineari è

$$(\mathcal{D}^i_j)(s,t,p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \exp(\frac{s-t}{\tau}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. La matrice dell'operatore delle rotazioni è

$$(\mathcal{R}^i_j)(s;t,p) = \begin{pmatrix} \cos\omega(s-t) & 0 & \sin\omega(s-t) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\omega(s-t) & 0 & \cos\omega(s-t) \end{pmatrix}.$$

7. Il determinante dell'operatore jacobiano è

$$\det(J^i_j)(s;t,p) = \det(\mathcal{D}^i_j)(s;t,p) = [\quad \exp(s-t)/\tau))\quad].$$

8. La matrice della derivata spaziale della velocità e della derivata totale temporale dell'operatore jacobiano è

$$(\overset{\vee}{D}\bar{\mathrm{v}})^i_j(t,p) = (\delta J^i_j)(t,p) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \omega \\ 0 & 1/\tau & 0 \\ -\omega & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

9. La matrice del tensore delle deformazioni infinitesime è

$$(\epsilon^i_j)(t,p) := \mathrm{Sim}(\overset{\vee}{D}\bar{\mathrm{v}}^i_j)(t,p) = \mathrm{Sim}(\delta J^i_j)(t,p) = \delta(\mathcal{D}^i_j)(t,p) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\tau & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

10. La matrice del tensore delle rotazioni infinitesime è

$$(\omega^i_j)(t,p) := \mathrm{Ant}(\overset{\vee}{D}\bar{\mathrm{v}}^i_j)(t,p) = \mathrm{Ant}(\delta J^i_j)(t,p) = \delta(\mathcal{R}^i_j)(t,p) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \omega \\ 0 & 0 & 0 \\ -\omega & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

11. La divergenza della velocità è

$$(\mathrm{div}\,\bar{\mathrm{v}})(t,p) := \mathrm{tr}((\overset{\vee}{D}\bar{\mathrm{v}})^i_j)(t,p) = \mathrm{tr}(\epsilon^i_j)(t,p) = \delta(\det(J^i_j))(t,p) = \delta(\det(\mathcal{D}^i_j))(t,p) = [\quad \frac{1}{\tau}\quad].$$

12. La velocità angolare è

$$\bar{\Omega}(t,p) = \tfrac{1}{2}\,(\mathrm{rot}\,\bar{\mathrm{v}})(t,p) = [\quad 0 \quad]\,\bar{e}_x + [\quad -\omega \quad]\,\bar{e}_y + [\quad 0 \quad]\,\bar{e}_z\,.$$

13. Il confronto delle due formule seguenti esprimenti l'accelerazione (vedi risposte 3, 2, 8, 1) dà esito positivo sì ■ no □

$$\bar{\mathrm{a}} = \delta^2 C \qquad \text{ed} \qquad \bar{\mathrm{a}} = \partial_0 \bar{\mathrm{v}} + \overset{\vee}{D}\bar{\mathrm{v}}(\bar{\mathrm{v}})\,.$$

14. Il moto è traslatorio *sì* □ *no* ■, stazionario *sì* □ *no* ■, irrotazionale *sì* □ *no* ■, rigido *sì* □ *no* ■ .

**Consideriamo una densità di massa, la cui espressione euleriana è** ($\mu_0, l \in \mathbb{R}^+$ sono due una costanti date)

$$\mu(t,p) = \frac{\mu_0\, l}{y(p) - b\,t}\,, \qquad \text{con} \qquad y(p) - b\,t > 0\,.$$

15. La derivata spaziale della densità di massa è

$$(\overset{\vee}{D}\mu)(t,p) = [\quad 0 \quad]\,Dx + [\quad -\frac{\mu_0\, l}{\big(y(p) - b\,t\big)^2} \quad]\,Dy + [\quad 0 \quad]\,Dz\,.$$

16. La derivata spaziale della densità di massa lungo la velocità è [*eseguire le eventuali semplificazioni evidenti*]

$$\big((\overset{\vee}{D}\mu)(\bar{\mathrm{v}})\big)(t,p) = [\quad -\frac{\mu_0\, l\, b}{\big(y(p) - b\,t\big)^2} - \frac{\mu(t,p)}{\tau} \quad]\,.$$

17. La derivata parziale rispetto al tempo della densità di massa è [*eseguire le eventuali semplificazioni evidenti*]

$$(\partial_0 \mu)(t,p) = [\quad \frac{\mu_0\, l\, b}{\big(y(p) - b\,t\big)^2} \quad]\,.$$

18. La derivata totale rispetto al tempo della densità di massa è [*eseguire le eventuali semplificazioni evidenti*]

$$(\delta\mu)(t,p) = [\quad -\frac{\mu(t,p)}{\tau} \quad]\,.$$

19. L'equazione di continuità è verificata? *sì* ■ *no* □ .

**0.2 Esercizio.** 10 minuti
Consideriamo un continuo elastico ed isotropo (nell'approssimazione lineare) caratterizzato dalle costanti elastiche $E$ e $\nu$ . Consideriamo un tensore delle tensioni la cui matrice è ($a\,, \in \mathbb{R}$ sono due costanti date)

$$(\sigma_{ij}) = \begin{pmatrix} a\,z & 0 & 0 \\ 0 & b\,y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. La divergenza del tensore delle tensioni è

$$\mathrm{div}\,\bar{\sigma} = [\quad 0 \quad]\,\bar{e}_x + [\quad b \quad]\,\bar{e}_y + [\quad 0 \quad]\,\bar{e}_z\,.$$

2. La matrice del tensore delle deformazioni infinitesime è [*eseguire le eventuali semplificazioni evidenti*]

$$(\epsilon_{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{E}\,a\,z - \frac{\nu}{E}\,b\,y & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{E}\,b\,y - \frac{\nu}{E}\,a\,z & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\nu}{E}\,(a\,z + b\,y) \end{pmatrix}.$$

3. Il tensore $\underline{\epsilon}$ soddisfa le condizioni di integrabilità dei tensori delle deformazioni infinitesime? *sì* ■ *no* □ .

4. La densità di potenza delle tensioni è [*eseguire le eventuali semplificazioni evidenti*]

$$\underline{\epsilon} \cdot \underline{\sigma} = [\quad \frac{1}{E}\,(a^2\,z^2 + b^2\,y^2) - 2\,\frac{\nu}{E}\,a\,z\,b\,y \quad]\,.$$

5. Il tensore delle tensioni è isotropo? *sì* □ *no* ■ .

6. Il tensore delle deformazioni infinitesime è isotropo? *sì* □ *no* ■ .