

Cognome	Nome	Matricola
---------	------	-----------

**0.1 Esercizio.** 30 minuti

Consideriamo un moto continuo, la cui espressione è  $(\tau, \omega, L, \alpha \in \mathbb{R}$  sono quattro costanti date)

$$C^x(s, t; p) = \exp\left(\frac{s-t}{\tau}\right)(x(p) \cos \omega(s-t) + z(p) \sin \omega(s-t)),$$

$$C^y(s, t; p) = y(p) + 2L(\cos \alpha s - \cos \alpha t),$$

$$C^z(s, t; p) = \exp\left(\frac{s-t}{\tau}\right)(-x(p) \sin \omega(s-t) + z(p) \cos \omega(s-t)).$$

1. L'espressione euleriana della velocità è

$$\bar{v}(t, p) := (\delta C)(t, p) = \left[ \frac{1}{\tau} x(p) + \omega z(p) \right] \bar{e}_x + \left[ -2L\alpha \sin \alpha t \right] \bar{e}_y + \left[ \frac{1}{\tau} z(p) - \omega x(p) \right] \bar{e}_z.$$

2. La derivata parziale rispetto al tempo della velocità è

$$(\partial_0 \bar{v})(t, p) = \left[ 0 \right] \bar{e}_x + \left[ -2L\alpha^2 \cos \alpha t \right] \bar{e}_y + \left[ 0 \right] \bar{e}_z.$$

3. L'espressione euleriana dell'accelerazione è

$$\bar{a}(t, p) := (\delta^2 C)(t, p) = (\delta \bar{v})(t, p) = \left[ \frac{1}{\tau^2} x(p) + 2\frac{\omega}{\tau} z(p) - \omega^2 x(p) \right] \bar{e}_x + \left[ -2L\alpha^2 \cos \alpha t \right] \bar{e}_y + \left[ \frac{1}{\tau^2} z(p) - 2\frac{\omega}{\tau} x(p) - \omega^2 z(p) \right] \bar{e}_z.$$

4. La matrice dell'operatore jacobiano è

$$(J_j^i)(s, t, p) := (\overset{\vee}{D}C)(s, t, p) = \begin{pmatrix} \exp\left(\frac{s-t}{\tau}\right) \cos \omega(s-t) & 0 & \exp\left(\frac{s-t}{\tau}\right) \sin \omega(s-t) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\exp\left(\frac{s-t}{\tau}\right) \sin \omega(s-t) & 0 & \exp\left(\frac{s-t}{\tau}\right) \cos \omega(s-t) \end{pmatrix}.$$

5. La matrice dell'operatore delle deformazioni lineari è

$$(D_j^i)(s, t, p) = \begin{pmatrix} \exp\left(\frac{s-t}{\tau}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \exp\left(\frac{s-t}{\tau}\right) \end{pmatrix}.$$

6. La matrice dell'operatore delle rotazioni è

$$(\mathcal{R}_j^i)(s, t, p) = \begin{pmatrix} \cos \omega(s-t) & 0 & \sin \omega(s-t) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \omega(s-t) & 0 & \cos \omega(s-t) \end{pmatrix}.$$

7. Il determinante dell'operatore jacobiano è

$$\det(J_j^i)(s, t, p) = \det(D_j^i)(s, t, p) = \left[ \exp\left(\frac{2(s-t)}{\tau}\right) \right].$$

8. La matrice della derivata spaziale della velocità e della derivata totale temporale dell'operatore jacobiano è

$$(\overset{\vee}{D}\bar{v})_j^i(t, p) = (\delta J_j^i)(t, p) = \begin{pmatrix} 1/\tau & 0 & \omega \\ 0 & 0 & 0 \\ -\omega & 0 & 1/\tau \end{pmatrix}.$$

9. La matrice del tensore delle deformazioni infinitesime è

$$(\epsilon_j^i)(t, p) := \text{Sim}(\overset{\vee}{D}\bar{v}_j^i)(t, p) = \text{Sim}(\delta J_j^i)(t, p) = \delta(D_j^i)(t, p) = \begin{pmatrix} 1/\tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\tau \end{pmatrix}.$$

10. La matrice del tensore delle rotazioni infinitesime è

$$(\omega_j^i)(t, p) := \text{Ant}(\overset{\vee}{D}\bar{v}_j^i)(t, p) = \text{Ant}(\delta J_j^i)(t, p) = \delta(\mathcal{R}_j^i)(t, p) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \omega \\ 0 & 0 & 0 \\ -\omega & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

11. La divergenza della velocità è

$$(\operatorname{div} \bar{\mathbf{v}})(t, p) := \operatorname{tr}((\overset{\vee}{D}\bar{\mathbf{v}})^i_j)(t, p) = \operatorname{tr}(\epsilon_j^i)(t, p) = \delta(\det(J_j^i))(t, p) = \delta(\det(\mathcal{D}_j^i))(t, p) = \left[ \begin{array}{c} 2 \\ \tau \end{array} \right].$$

12. La velocità angolare è

$$\bar{\Omega}(t, p) = \frac{1}{2} (\operatorname{rot} \bar{\mathbf{v}})(t, p) = \left[ \begin{array}{c} 0 \\ \omega \\ 0 \end{array} \right] \bar{e}_x + \left[ \begin{array}{c} \omega \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] \bar{e}_y + \left[ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] \bar{e}_z.$$

13. Il confronto delle due formule seguenti esprimenti l'accelerazione (vedi risposte 3, 8, 1) dà esito positivo sì  no

$$\bar{\mathbf{a}} = \delta^2 C \quad \text{ed} \quad \bar{\mathbf{a}} = \partial_0 \bar{\mathbf{v}} + \overset{\vee}{D}\bar{\mathbf{v}}(\bar{\mathbf{v}}).$$

14. Il moto è traslatorio sì  no , stazionario sì  no , irrotazionale sì  no , rigido sì  no .

**Consideriamo una densità di massa, la cui espressione euleriana è** ( $\mu_0, \tau \in \mathbb{R}^+$  sono due costanti date)

$$\mu(t, p) = \mu_0 \exp(-t/\tau).$$

15. La derivata spaziale della densità di massa è

$$(\overset{\vee}{D}\mu)(t, p) = \left[ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] Dx + \left[ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] Dy + \left[ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] Dz.$$

16. La derivata spaziale della densità di massa lungo la velocità è

$$((\overset{\vee}{D}\mu)(\bar{\mathbf{v}}))(t, p) = \left[ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right].$$

17. La derivata parziale rispetto al tempo della densità di massa è

$$(\partial_0 \mu)(t, p) = \left[ \begin{array}{c} -2 \frac{\mu(t, p)}{\tau} \\ 0 \\ 0 \end{array} \right].$$

18. La derivata totale rispetto al tempo della densità di massa è

$$(\delta \mu)(t, p) = \left[ \begin{array}{c} -2 \frac{\mu(t, p)}{\tau} \\ 0 \\ 0 \end{array} \right].$$

19. L'equazione di continuità è verificata? sì  no .

## 0.2 Esercizio. 10 minuti

Consideriamo un continuo elastico ed isotropo (nell'approssimazione lineare) caratterizzato dalle costanti elastiche  $\lambda$  e  $\mu$ . Consideriamo un tensore delle deformazioni infinitesime la cui matrice è ( $a \in \mathbb{R}$  è una costante data)

$$(\epsilon_{ij}) = \begin{pmatrix} az & 0 & 0 \\ 0 & az & 0 \\ 0 & 0 & az \end{pmatrix}.$$

2. Il tensore  $\epsilon$  soddisfa le condizioni di integrabilità dei tensori delle deformazioni infinitesime? sì  no .

3. La matrice del tensore delle tensioni è (eseguire le semplificazioni evidenti)

$$(\sigma_{ij}) = \begin{pmatrix} (2\mu + 3\lambda)az & 0 & 0 \\ 0 & (2\mu + 3\lambda)az & 0 \\ 0 & 0 & (2\mu + 3\lambda)az \end{pmatrix}.$$

1. La divergenza del tensore delle tensioni è

$$\operatorname{div} \bar{\sigma} = \left[ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ (2\mu + 3\lambda)a \end{array} \right] \bar{e}_x + \left[ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] \bar{e}_y + \left[ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] \bar{e}_z.$$

4. La densità di potenza delle tensioni è

$$\epsilon \cdot \sigma = \left[ \begin{array}{c} 3(2\mu + 3\lambda)a^2 z^2 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right].$$

5. Il tensore delle tensioni è isotropo? sì  no .

6. Il tensore delle deformazioni infinitesime è isotropo? sì  no .