Cognome	Nome	Matricola

0.1 Esercizio. 30 minuti
Consideriamo un moto continuo, la cui espressione è (τ , ω , $u \in \mathbb{R}$ sono tre costanti date)

$$\begin{aligned} C^x(s,t;p) &= x(p)\, \cos\omega(s-t) + y(p)\, \sin\omega(s-t)\,, \\ C^y(s,t;p) &= -x(p)\, \sin\omega(s-t) + y(p)\, \cos\omega(s-t)\,, \\ C^z(s,t;p) &= u\,s + \exp(\frac{s-t}{\tau})\,\big(z(p) - u\,t\big)\,. \end{aligned}$$

1. L'espressione euleriana della velocità è

$$\bar{\mathrm{v}}(t,p) := (\delta C)(t,p) = [\quad \omega\, y(p) \quad]\,\bar{e}_x + [\quad -\omega\, x(p) \quad]\,\bar{e}_y + [\quad u + \frac{1}{\tau}\,(z(p) - u\,t) \quad]\,\bar{e}_z\,.$$

2. La derivata parziale rispetto al tempo della velocità è

$$(\partial_0 \bar{\mathrm{v}})(t,p) = [\quad 0 \quad]\,\bar{e}_x + [\quad 0 \quad]\,\bar{e}_y + [\quad -\frac{1}{\tau}\,u \quad]\,\bar{e}_z\,.$$

3. L'espressione euleriana dell'accelerazione è

$$\bar{\mathrm{a}}(t,p) := (\delta^2 C)(t,p) = (\delta\bar{\mathrm{v}})(t,p) = [\quad -\omega^2 x(p) \quad]\,\bar{e}_x + [\quad -\omega^2 y(p) \quad]\,\bar{e}_y + [\quad \frac{1}{\tau^2}\,(z(p) - u\,t) \quad]\,\bar{e}_z\,.$$

4. La matrice dell'operatore jacobiano è

$$(J^i_j)(s,t,p) := (\overset{\vee}{D} C)(s;t,p) = \begin{pmatrix} \cos\omega(s-t) & \sin\omega(s-t) & 0 \\ -\sin\omega(s-t) & \cos\omega(s-t) & 0 \\ 0 & 0 & \exp(\frac{s-t}{\tau}) \end{pmatrix}.$$

5. La matrice dell'operatore delle deformazioni lineari è

$$(\mathcal{D}^i_j)(s,t,p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \exp(\frac{s-t}{\tau}) \end{pmatrix}.$$

6. La matrice dell'operatore delle rotazioni è

$$(\mathcal{R}^i_j)(s;t,p) = \begin{pmatrix} \cos\omega(s-t) & \sin\omega(s-t) & 0 \\ -\sin\omega(s-t) & \cos\omega(s-t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Il determinante dell'operatore jacobiano è

$$\det(J^i_j)(s;t,p) = \det(\mathcal{D}^i_j)(s;t,p) = [\quad \exp((s-t)/\tau) \quad]\,.$$

8. La matrice della derivata spaziale della velocità e della derivata totale temporale dell'operatore jacobiano è

$$(\overset{\vee}{D}\bar{\mathrm{v}})^i_j(t,p) = (\delta J^i_j)(t,p) = \begin{pmatrix} 0 & \omega & 0 \\ -\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\tau \end{pmatrix}.$$

9. La matrice del tensore delle deformazioni infinitesime è

$$(\epsilon^i_j)(t,p) := \mathrm{Sim}(\overset{\vee}{D}\bar{\mathrm{v}}^i_j)(t,p) = \mathrm{Sim}(\delta J^i_j)(t,p) = \delta(\mathcal{D}^i_j)(t,p) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\tau \end{pmatrix}.$$

10. La matrice del tensore delle rotazioni infinitesime è

$$(\omega^i_j)(t,p) := \mathrm{Ant}(\overset{\vee}{D}\bar{\mathrm{v}}^i_j)(t,p) = \mathrm{Ant}(\delta J^i_j)(t,p) = \delta(\mathcal{R}^i_j)(t,p) = \begin{pmatrix} 0 & \omega & 0 \\ -\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

11. La divergenza della velocità è

$$(\mathrm{div}\,\bar{\mathrm{v}})(t,p) := \mathrm{tr}((\overset{\vee}{D}\bar{\mathrm{v}})^i_j)(t,p) = \mathrm{tr}(\epsilon^i_j)(t,p) = \delta(\det(J^i_j))(t,p) = \delta(\det(\mathcal{D}^i_j))(t,p) = [\quad 1/\tau \quad]\,.$$

12. La velocità angolare è

$$\bar{\Omega}(t,p) = \tfrac{1}{2}\,(\mathrm{rot}\,\bar{v})(t,p) = [\quad 0 \quad]\,\bar{e}_x + [\quad 0 \quad]\,\bar{e}_y + [\quad -\omega \quad]\,\bar{e}_z\,.$$

13. Il confronto delle due formule seguenti esprimenti l'accelerazione (vedi risposte 3, 2, 8, 1) dà esito positivo sì ■ no □

$$\bar{a} = \delta^2 C \qquad \text{ed} \qquad \bar{a} = \partial_0 \bar{v} + \overset{\vee}{D}\bar{v}(\bar{v})\,.$$

14. Il moto è traslatorio *sì* □ *no* ■, stazionario *sì* □ *no* ■, irrotazionale *sì* □ *no* ■, rigido *sì* □ *no* ■ .

Consideriamo una densità di massa, la cui espressione euleriana è ($\mu_0,\ l \in \mathbb{R}^+$ sono due costanti date)

$$\mu(t,p) = \mu_0 \exp\Big(\frac{-\big(x^2(p)+y^2(p)\big)}{l^2}\Big)\,\exp\big(\frac{-t}{\tau}\big)\,.$$

15. La derivata spaziale della densità di massa è [*eseguire le ovvie semplificazioni*]

$$(\overset{\vee}{D}\mu)(t,p) = [\quad -\frac{2}{l^2}\,\mu(t,p)\,x(p) \quad]\,Dx + [\quad -\frac{2}{l^2}\,\mu(t,p)\,y(p) \quad]\,Dy + [\quad 0 \quad]\,Dz\,.$$

16. La derivata spaziale della densità di massa lungo la velocità è [*eseguire le ovvie semplificazioni*]

$$\big((\overset{\vee}{D}\mu)(\bar{v})\big)(t,p) = [\quad 0 \quad]\,.$$

17. La derivata parziale rispetto al tempo della densità di massa è [*eseguire le ovvie semplificazioni*]

$$(\partial_0\mu)(t,p) = [\quad -\frac{\mu(t,p)}{\tau} \quad]\,.$$

18. La derivata totale rispetto al tempo della densità di massa è [*eseguire le ovvie semplificazioni*]

$$(\delta\mu)(t,p) = [\quad -\frac{\mu(t,p)}{\tau} \quad]\,.$$

19. L'equazione di continuità è verificata? *sì* ■ *no* □ .

0.2 Esercizio. 10 minuti
Consideriamo un continuo elastico ed isotropo (nell'approssimazione lineare) caratterizzato dalle costanti elastiche E e ν.
Consideriamo un tensore delle tensioni la cui matrice è ($a \in \mathbb{R}$ è una costante data)

$$(\sigma_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & b\,y & 0 \\ b\,y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a\,y \end{pmatrix}.$$

1. La divergenza del tensore delle tensioni è

$$\mathrm{div}\,\bar{\sigma} = [\quad b \quad]\,\bar{e}_x + [\quad 0 \quad]\,\bar{e}_y + [\quad 0 \quad]\,\bar{e}_z\,.$$

2. La matrice del tensore delle deformazioni infinitesime è [*eseguire le ovvie semplificazioni*]

$$(\epsilon_{ij}) = \begin{pmatrix} -\frac{\nu}{E}\,a\,y & \frac{1+\nu}{E}\,b\,y & 0 \\ \frac{1+\nu}{E}\,b\,y & -\frac{\nu}{E}\,a\,y & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{E}\,a\,y \end{pmatrix}.$$

3. Il tensore $\underline{\epsilon}$ soddisfa le condizioni di integrabilità dei tensori delle deformazioni infinitesime? *sì* ■ *no* □ .

4. La densità di potenza delle tensioni è [*eseguire le ovvie semplificazioni*]

$$\underline{\epsilon}\cdot\underline{\sigma} = [\quad \frac{a^2 + 2\,(1+\nu)\,b^2}{E}\,y^2 \quad]\,.$$

5. Il tensore delle tensioni è isotropo? *sì* □ *no* ■ .

6. Il tensore delle deformazioni infinitesime è isotropo? *sì* □ *no* ■ .