Cognome	Nome	Matricola

0.1 Esercizio. 30 minuti
Consideriamo un moto continuo, la cui espressione è (τ , α , $\beta \in \mathbb{R}^+$ sono tre costanti date)

$$\begin{aligned} C^x(s,t;p) &= x(p)\,\exp\left(-\frac{s-t}{\tau}\right), \\ C^y(s,t;p) &= y(p) + (s-t)\,\beta + \tfrac{1}{2}\,(s^2-t^2)\,\alpha, \\ C^z(s,t;p) &= z(p)\,\exp\left(-\frac{s-t}{\tau}\right). \end{aligned}$$

1. L'espressione euleriana della velocità è

$$\bar{\mathrm{v}}(t,p) := (\delta C)(t,p) = [\quad -\frac{1}{\tau}\,x(p) \quad]\,\bar{e}_x + [\quad \beta + \alpha\,t \quad]\,\bar{e}_y + [\quad -\frac{1}{\tau}\,z(p) \quad]\,\bar{e}_z\,.$$

2. La derivata parziale rispetto al tempo della velocità è

$$(\partial_0 \bar{\mathrm{v}})(t,p) = [\quad 0 \quad]\,\bar{e}_x + [\quad \alpha \quad]\,\bar{e}_y + [\quad 0 \quad]\,\bar{e}_z\,.$$

3. L'espressione euleriana dell'accelerazione è

$$\bar{\mathrm{a}}(t,p) := (\delta^2 C)(t,p) = (\delta \bar{\mathrm{v}})(t,p) = [\quad \frac{1}{\tau^2}\,x(p) \quad]\bar{e}_x + [\quad \alpha \quad]\bar{e}_y + [\quad \frac{1}{\tau^2}\,z(p) \quad]\bar{e}_z\,.$$

4. La matrice dell'operatore jacobiano è

$$(J^i_j)(s,t,p) := (\overset{\vee}{D}C)(s;t,p) = \begin{pmatrix} \exp\left(-\frac{s-t}{\tau}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \exp\left(-\frac{s-t}{\tau}\right) \end{pmatrix}.$$

5. La matrice dell'operatore delle deformazioni lineari è

$$(\mathcal{D}^i_j)(s,t,p) = \begin{pmatrix} \exp\left(-\frac{s-t}{\tau}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \exp\left(-\frac{s-t}{\tau}\right) \end{pmatrix}.$$

6. La matrice dell'operatore delle rotazioni è

$$(\mathcal{R}^i_j)(s;t,p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Il determinante dell'operatore jacobiano è

$$\det(J^i_j)(s;t,p) = \det(\mathcal{D}^i_j)(s;t,p) = [\quad \exp\left(\frac{-2\,(s-t)}{\tau}\right) \quad].$$

8. La matrice della derivata spaziale della velocità e della derivata totale temporale dell'operatore jacobiano è

$$(\overset{\vee}{D}\bar{\mathrm{v}})^i_j(t,p) = (\delta J^i_j)(t,p) = \begin{pmatrix} -1/\tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/\tau \end{pmatrix}.$$

9. La matrice del tensore delle deformazioni infinitesime è

$$(\epsilon^i_j)(t,p) := \mathrm{Sim}(\overset{\vee}{D}\bar{\mathrm{v}}^i_j)(t,p) = \mathrm{Sim}(\delta J^i_j)(t,p) = \delta(\mathcal{D}^i_j)(t,p) = \begin{pmatrix} -1/\tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/\tau \end{pmatrix}.$$

10. La matrice del tensore delle rotazioni infinitesime è

$$(\omega^i_j)(t,p) := \mathrm{Ant}(\overset{\vee}{D}\bar{\mathrm{v}}^i_j)(t,p) = \mathrm{Ant}(\delta J^i_j)(t,p) = \delta(\mathcal{R}^i_j)(t,p) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

11. La divergenza della velocità è

$$(\mathrm{div}\,\bar{\mathrm{v}})(t,p) := \mathrm{tr}((\overset{\vee}{D}\bar{\mathrm{v}})^i_j)(t,p) = \mathrm{tr}(\epsilon^i_j)(t,p) = \delta(\det(J^i_j))(t,p) = \delta(\det(\mathcal{D}^i_j))(t,p) = [\quad -2/\tau \quad].$$

12. La velocità angolare è

$$\bar{\Omega}(t,p) = \tfrac{1}{2}\,(\mathrm{rot}\,\bar{\mathrm{v}})(t,p) = [\quad 0 \quad]\,\bar{e}_x + [\quad 0 \quad]\,\bar{e}_y + [\quad 0 \quad]\,\bar{e}_z\,.$$

13. Il confronto delle due formule seguenti esprimenti l'accelerazione dà esito positivo sì ■ no □

$$\bar{\mathrm{a}} = \delta^2 C \qquad \text{ed} \qquad \bar{\mathrm{a}} = \partial_0\bar{\mathrm{v}} + \overset{\vee}{D}\bar{\mathrm{v}}(\bar{\mathrm{v}})\,.$$

14. Il moto è traslatorio *sì* □ *no* ■, stazionario *sì* □ *no* ■, irrotazionale *sì* ■ *no* □, rigido *sì* □ *no* ■ .

Consideriamo una densità di massa, la cui espressione euleriana è ($\mu_0, l \in \mathbb{R}^+$ sono due una costanti date)

$$\mu(t,p) = \mu_0\, \exp(2\,t/\tau)\,.$$

15. La derivata spaziale della densità di massa è

$$(\overset{\vee}{D}\mu)(t,p) = [\quad 0 \quad]\,Dx + [\quad 0 \quad]\,Dy + [\quad 0 \quad]\,Dz\,.$$

16. La derivata spaziale della densità di massa lungo la velocità è

$$\big((\overset{\vee}{D}\mu)(\bar{\mathrm{v}})\big)(t,p) = [\quad 0 \quad]\,.$$

17. La derivata parziale rispetto al tempo della densità di massa è

$$(\partial_0\mu)(t,p) = [\quad 2\,\mu(t,p)/\tau \quad]\,.$$

18. La derivata totale rispetto al tempo della densità di massa è

$$(\delta\mu)(t,p) = [\quad 2\,\mu(t,p)/\tau \quad]\,.$$

19. L'equazione di continuità è verificata? *sì* ■ *no* □ .

0.2 Esercizio. 10 minuti
Consideriamo un continuo elastico ed isotropo (nell'approssimazione lineare) caratterizzato dalle costanti elastiche λ e μ.
Consideriamo un tensore delle deformazioni infinitesime la cui matrice è ($a \in \mathbb{R}$ è una costante data)

$$(\epsilon_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a\,z \end{pmatrix}.$$

2. Il tensore $\underset{\sim}{\epsilon}$ soddisfa le condizioni di integrabilità dei tensori delle deformazioni infinitesime? *sì* ■ *no* □ .

3. La matrice del tensore delle tensioni è (eseguire le semplificazioni evidenti)

$$(\sigma_{ij}) = \begin{pmatrix} \lambda\,a\,z & 0 & 0 \\ 0 & \lambda\,a\,z & 0 \\ 0 & 0 & (2\,\mu + \lambda)\,a\,z \end{pmatrix}.$$

4. La divergenza del tensore delle tensioni è

$$\mathrm{div}\,\bar{\sigma} = [\quad 0 \quad]\,\bar{e}_x + [\quad 0 \quad]\,\bar{e}_y + [\quad (2\,\mu + \lambda)\,a \quad]\,\bar{e}_z\,.$$

5. La densità di potenza delle tensioni è

$$\underset{\sim}{\epsilon} \cdot \underset{\sim}{\sigma} = [\quad (2\,\mu + \lambda)\,a^2\,z^2 \quad]\,.$$

6. Il tensore delle tensioni è isotropo? *sì* □ *no* ■ .

7. Il tensore delle deformazioni infinitesime è isotropo? *sì* □ *no* ■ .