Cognome	Nome	Matricola

corso di laurea ambientale ☐	corso di laurea edile ☐

0.1 Esercizio. 5 minuti
Consideriamo una base ortonormale $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ e due vettori $\bar{u} = \bar{e}_1$ e $\bar{v} = \bar{e}_2 - \bar{e}_3$.
Il simbolo $\cdot$ indica **solo** il prodotto scalare tra due vettori ed il simbolo $\times$ indica **solo** il prodotto vettoriale tra due vettori.

1) Calcolare il prodotto scalare $\bar{u} \cdot \bar{v}$, il prodotto vettoriale $\bar{u} \times \bar{v}$, il doppio prodotto scalare $u \cdot (\bar{u} \cdot \bar{v})$, il doppio prodotto vettoriale $u \times (\bar{u} \times \bar{v})$, il prodotto misto $\bar{u} \cdot (\bar{u} \times \bar{v})$, il prodotto misto $\bar{u} \times (\bar{u} \cdot \bar{v})$, mettendo in evidenza se ciascuno di questi oggetti è uno scalare o un vettore [*se qualcuna di queste domande è priva di senso, segnalare questo fatto con la sigla PS*]:

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = [\quad 0 \quad], \qquad \bar{u} \times \bar{v} = [\quad \bar{e}_2 + \bar{e}_3 \quad],$$
$$\bar{u} \cdot (\bar{u} \times \bar{v}) = [\quad 0 \quad], \qquad \bar{u} \times (\bar{u} \cdot \bar{v}) = [\quad PS \quad],$$
$$\bar{u} \cdot (\bar{u} \cdot \bar{v}) = [\quad PS \quad], \qquad \bar{u} \times (\bar{u} \times \bar{v}) = [\quad -\bar{e}_2 + \bar{e}_3 \quad].$$

2) Conformemente alla seguente uguaglianza

$$\bar{v} = \bar{v}^{\parallel} + \bar{v}^{\perp}, \qquad \text{con} \qquad \bar{v}^{\parallel} = v^{\parallel} \operatorname{vers} \bar{u}, \quad \bar{v}^{\perp} \cdot \bar{u} = 0,$$

calcolare la componente scalare $v^{\parallel}$ di $\bar{v}$ parallela ad $\bar{u}$, la componente vettoriale $\bar{v}^{\parallel}$ di $\bar{v}$ parallela ad $\bar{u}$ e la componente vettoriale $\bar{v}^{\perp}$ di $\bar{v}$ ortogonale a $\bar{u}$

$$v^{\parallel} = [\ 0\ ], \qquad \bar{v}^{\parallel} = [\ 0\ \bar{e}_1 + \ 0\ \bar{e}_2 + \ 0\ \bar{e}_3], \qquad \bar{v}^{\perp} = [\ 0\ \bar{e}_1 + \ 1\ \bar{e}_2 + \ (-1)\ \bar{e}_3].$$

0.2 Esercizio. 15 minuti
Un sistema continuo è costituito da un anello (**unidimensionale**) omogeneo e da un'asta **unidimensionale** omogenea costituente un diametro dell'anello. Siano R il raggio dell'anello, $2\,R$ la lunghezza dell'asta, m la massa dell'anello e $2\,m$ la massa dell'asta [*attenzione: la massa dell'asta è* $2\,m$].

Trovare:
1) il momento d'inerzia I_1 dell'anello rispetto alla retta ortogonale all'anello e passante per il suo centro,
2) il momento d'inerzia I_2 dell'anello rispetto alla retta contenente un suo diametro,
3) il momento d'inerzia I_3 dell'anello rispetto ad una retta tangente all'anello,
4) il momento d'inerzia I_4 dell'asta rispetto alla retta contenente l'asta,
5) il momento d'inerzia I_5 dell'asta rispetto alla retta ortogonale all'anello e passante per il suo centro,
6) il momento d'inerzia I_6 dell'asta rispetto ad una retta tangente all'anello e parallela all'asta.

$$I_1 = [\quad m\,R^2 \quad], \qquad I_2 = [\quad \frac{1}{2}\,m\,R^2 \quad], \qquad I_3 = [\quad \frac{3}{2}\,m\,R^2 \quad],$$
$$I_4 = [\quad 0 \quad], \qquad I_5 = [\quad \frac{2}{3}\,m\,R^2 \quad] \qquad I_6 = [\quad 2\,m\,R^2 \quad].$$

0.3 Esercizio. 5 minuti
Supponiamo che gli autovalori del tensore delle tensioni siano

$$\lambda_1 = 0, \qquad \lambda_2 = 8, \qquad \lambda_3 = 0.$$

1) Tra **tutte le infinite facce** quante sono quelle relativamente alle quali lo sforzo di taglio è nullo? (Ogni faccia con le sue due orientazioni va contata una sola volta.) [Scegliere una sola casella, *quella più appropriata*]
nessuna faccia ☐
solo una faccia ☐ solo due facce ☐ solo tre facce ☐
una famiglia di infinite facce caratterizzata da 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ parametri indipendenti
una singola faccia più una famiglia di infinite facce caratterizzata da 1 ■ 2 ☐ 3 ☐ parametri indipendenti
tutte le facce ☐ .

2) Tra **tutte le infinite facce** quante sono quelle relativamente alle quali lo sforzo normale è nullo? (Ogni faccia con le sue due orientazioni va contata una sola volta.) [Scegliere una sola casella, *quella più appropriata*]
nessuna faccia ☐
solo una faccia ☐ solo due facce ☐ solo tre facce ☐
una famiglia di infinite facce caratterizzata da 1 ■ 2 ☐ 3 ☐ parametri indipendenti
una singola faccia più una famiglia di infinite facce caratterizzata da 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ parametri indipendenti
tutte le facce ☐ .

0.4 Esercizio. 25 minuti

La matrice del tensore delle tensioni, in una base ortonormale $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3) \equiv (\bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{e}_z)$, è

$$\begin{pmatrix} \sigma_1^1 & \sigma_2^1 & \sigma_3^1 \\ \sigma_1^2 & \sigma_2^2 & \sigma_3^2 \\ \sigma_1^3 & \sigma_2^3 & \sigma_3^3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \sigma_x^x & \sigma_y^x & \sigma_z^x \\ \sigma_x^y & \sigma_y^y & \sigma_z^y \\ \sigma_x^z & \sigma_y^z & \sigma_z^z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. La faccia xy è principale? *sì* □ *no* ■
2. La faccia xz è principale? *sì* □ *no* ■
3. La faccia yz è principale? *sì* ■ *no* □ .
4. La componente lungo $\bar{e}_x$ dello sforzo relativo alla faccia xz è $\phi = [\quad 0 \quad]$.
5. La componente lungo $\bar{e}_y$ dello sforzo relativo alla faccia xz è $\phi = [\quad 0 \quad]$.
6. La componente lungo $\bar{e}_z$ dello sforzo relativo alla faccia xz è $\phi = [\quad 1 \quad]$.
7. La traccia T , la somma $S := D_1 + D_2 + D_3$ dei determinanti D_1, D_2, D_3 dei tre minori principali di ordine 2 e il determinante D del tensore delle tensioni (σ_j^i) sono

$$T = [\quad 3 \quad], \qquad S = [\quad -1 \quad], \qquad D = [\quad -3 \quad].$$

8. Gli autovalori di $\hat{\sigma}$, **in ordine <u>crescente</u>** rispetto al loro valore, ed i **<u>versori</u>** dei corrispondenti autovettori sono [*razionalizzare le frazioni* **solo** *quando è veramente conveniente*]

$$\lambda_1 = [\quad -1 \quad] \quad \bar{u}_1 = [\quad 0 \quad]\,\bar{e}_x + [\quad \mp 1/\sqrt{2} \quad]\,\bar{e}_y + [\quad \pm 1/\sqrt{2} \quad]\,\bar{e}_z\,,$$

$$\lambda_2 = [\quad 1 \quad] \quad \bar{u}_2 = [\quad 0 \quad]\,\bar{e}_x + [\quad \pm 1/\sqrt{2} \quad]\,\bar{e}_y + [\quad \pm 1/\sqrt{2} \quad]\,\bar{e}_z$$

$$\lambda_3 = [\quad 3 \quad] \quad \bar{u}_3 = [\quad \pm 1 \quad]\,\bar{e}_x + [\quad 0 \quad]\,\bar{e}_y + [\quad 0 \quad]\,\bar{e}_z\,.$$

9. Il controllo sugli autovalori, basato sul confronto con gli invarianti T, S, D del tensore delle tensioni, dà esito

positivo ■ negativo □.

10. Il controllo sugli autovettori, basato sull'ortogonalità dei medesimi, dà esito

positivo ■ negativo □.

11. La massima componente (con il suo segno) dello sforzo scalare normale rispetto a tutte le possibili ∞^2 facce è

$$\phi = [\quad 3 \quad].$$

12. La minima componente (con il suo segno) dello sforzo scalare normale rispetto a tutte le possibili ∞^2 facce è

$$\phi = [\quad -1 \quad].$$

13. Tra tutte le ∞^2 facce ve ne sono alcune rispetto alle quali lo sforzo normale è di trazione? sì ■ no □
14. Tra tutte le ∞^2 facce ve ne sono alcune rispetto alle quali lo sforzo normale è di pressione? sì ■ no □
14. Tra tutte le ∞^2 facce ve ne sono alcune rispetto alle quali lo sforzo normale è nullo? sì ■ no □
16. Lo sforzo relativo alla faccia ortogonale al vettore $\bar{e}_y + \bar{e}_z$ è

$$\bar{\phi} = [\quad 0 \quad]\,\bar{e}_x + [\quad 1/\sqrt{2} \quad]\,\bar{e}_y + [\quad 1/\sqrt{2} \quad]\,\bar{e}_z\,.$$

17. La componente scalare dello sforzo normale relativo alla faccia ortogonale al vettore $\bar{e}_y + \bar{e}_z$ è [*eseguire le eventuali semplificazioni evidenti, ma razionalizzare le frazioni* **solo** *quando è veramente conveniente*]

$$\phi = [\quad 1 \quad].$$

18. Lo sforzo tangenziale relativo alla faccia ortogonale al vettore $\bar{e}_y + \bar{e}_z$ è [*eseguire le eventuali semplificazioni evidenti, ma razionalizzare le frazioni* **solo** *quando è veramente conveniente*]

$$\bar{\phi}^{\perp} = [\quad 0 \quad]\,\bar{e}_x + [\quad 0 \quad]\,\bar{e}_y + [\quad 0 \quad]\,\bar{e}_z\,.$$