

Cognome	Nome	Matricola
corso di laurea ambientale <input type="checkbox"/>		corso di laurea edile <input type="checkbox"/>

0.1 Esercizio. 5 minuti

Consideriamo una base ortonormale $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ e due vettori $\bar{u} = \bar{e}_1$ e $\bar{v} = \bar{e}_2 + \bar{e}_3$.

Il simbolo \cdot indica **solo** il prodotto scalare tra due vettori ed il simbolo \times indica **solo** il prodotto vettoriale tra due vettori.

1) Calcolare il prodotto scalare $\bar{u} \cdot \bar{v}$, il prodotto vettoriale $\bar{u} \times \bar{v}$, il doppio prodotto scalare $\bar{u} \cdot (\bar{u} \times \bar{v})$, il doppio prodotto vettoriale $\bar{u} \times (\bar{u} \times \bar{v})$, il prodotto misto $\bar{u} \cdot (\bar{u} \times \bar{v})$, il prodotto misto $\bar{u} \times (\bar{u} \cdot \bar{v})$, mettendo in evidenza se ciascuno di questi oggetti è uno scalare o un vettore [se qualcuna di queste domande è priva di senso, segnalare questo fatto con la sigla PS]:

$$\begin{aligned} \bar{u} \cdot \bar{v} &= \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}, & \bar{u} \times \bar{v} &= \begin{bmatrix} -\bar{e}_2 + \bar{e}_3 \end{bmatrix}, \\ \bar{u} \cdot (\bar{u} \times \bar{v}) &= \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}, & \bar{u} \times (\bar{u} \cdot \bar{v}) &= \begin{bmatrix} PS \end{bmatrix}, \\ \bar{u} \cdot (\bar{u} \cdot \bar{v}) &= \begin{bmatrix} PS \end{bmatrix}, & \bar{u} \times (\bar{u} \times \bar{v}) &= \begin{bmatrix} -\bar{e}_2 - \bar{e}_3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

2) Conformemente alla seguente uguaglianza

$$\bar{v} = \bar{v}^{\parallel} + \bar{v}^{\perp}, \quad \text{con} \quad \bar{v}^{\parallel} = v^{\parallel} \text{ vers } \bar{u}, \quad \bar{v}^{\perp} \cdot \bar{u} = 0,$$

calcolare la componente scalare v^{\parallel} di \bar{v} parallela ad \bar{u} , la componente vettoriale \bar{v}^{\parallel} di \bar{v} parallela ad \bar{u} e la componente vettoriale \bar{v}^{\perp} di \bar{v} ortogonale a \bar{u}

$$v^{\parallel} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{v}^{\parallel} = \begin{bmatrix} 0 & \bar{e}_1 + & 0 & \bar{e}_2 + & 0 & \bar{e}_3 \end{bmatrix}, \quad \bar{v}^{\perp} = \begin{bmatrix} 0 & \bar{e}_1 + & 1 & \bar{e}_2 + & 1 & \bar{e}_3 \end{bmatrix}.$$

0.2 Esercizio. 15 minuti

Un sistema continuo è costituito da un anello (**unidimensionale**) omogeneo e da un'asta **unidimensionale** omogenea ortogonale all'anello e con il suo punto medio coincidente con il centro dell'anello. Siano R il raggio dell'anello, $2R$ la lunghezza dell'asta, m la massa dell'anello e $2m$ la massa dell'asta [attenzione: la massa dell'asta è $2m$].

Trovare:

- 1) il momento d'inerzia I_1 dell'anello rispetto alla retta ortogonale all'anello e passante per il suo centro,
- 2) il momento d'inerzia I_2 dell'anello rispetto alla retta contenente un suo diametro,
- 3) il momento d'inerzia I_3 dell'anello rispetto ad una retta tangente all'anello,
- 4) il momento d'inerzia I_4 dell'asta rispetto alla retta contenente l'asta,
- 5) il momento d'inerzia I_5 dell'asta rispetto alla retta contenente un diametro dell'anello,
- 6) il momento d'inerzia I_6 dell'asta rispetto ad una retta tangente all'anello.

$$\begin{aligned} I_1 &= \begin{bmatrix} m R^2 \end{bmatrix}, & I_2 &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} m R^2 \end{bmatrix}, & I_3 &= \begin{bmatrix} \frac{3}{2} m R^2 \end{bmatrix}, \\ I_4 &= \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}, & I_5 &= \begin{bmatrix} \frac{2}{3} m R^2 \end{bmatrix}, & I_6 &= \begin{bmatrix} \frac{8}{3} m R^2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

0.3 Esercizio. 5 minuti

Supponiamo che gli autovalori del tensore delle tensioni siano

$$\lambda_1 = -5, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = 0.$$

1) Tra **tutte le infinite facce** quante sono quelle relativamente alle quali lo sforzo di taglio è nullo? (Ogni faccia con le sue due orientazioni va contata una sola volta.) [Scegliere una sola casella, *quella più appropriata*]

- nessuna faccia
- solo una faccia solo due facce solo tre facce
- una famiglia di infinite facce caratterizzata da 1 2 3 parametri indipendenti
- una singola faccia più una famiglia di infinite facce caratterizzata da 1 2 3 parametri indipendenti
- tutte le facce .

2) Tra **tutte le infinite facce** quante sono quelle relativamente alle quali lo sforzo normale è nullo? (Ogni faccia con le sue due orientazioni va contata una sola volta.) [Scegliere una sola casella, *quella più appropriata*]

- nessuna faccia
- solo una faccia solo due facce solo tre facce
- una famiglia di infinite facce caratterizzata da 1 2 3 parametri indipendenti
- una singola faccia più una famiglia di infinite facce caratterizzata da 1 2 3 parametri indipendenti
- tutte le facce .

0.4 Esercizio. 25 minuti

La matrice del tensore delle tensioni, in una base ortonormale $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3) \equiv (\bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{e}_z)$, è

$$\begin{pmatrix} \sigma_1^1 & \sigma_2^1 & \sigma_3^1 \\ \sigma_1^2 & \sigma_2^2 & \sigma_3^2 \\ \sigma_1^3 & \sigma_2^3 & \sigma_3^3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \sigma_x^x & \sigma_y^x & \sigma_z^x \\ \sigma_x^y & \sigma_y^y & \sigma_z^y \\ \sigma_x^z & \sigma_y^z & \sigma_z^z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. La faccia xy è principale? sì no
2. La faccia xz è principale? sì no
3. La faccia yz è principale? sì no
4. La componente lungo \bar{e}_x dello sforzo relativo alla faccia xz è $\phi = \begin{bmatrix} 1 \\ \end{bmatrix}$.
5. La componente lungo \bar{e}_y dello sforzo relativo alla faccia xz è $\phi = \begin{bmatrix} 0 \\ \end{bmatrix}$.
6. La componente lungo \bar{e}_z dello sforzo relativo alla faccia xz è $\phi = \begin{bmatrix} 0 \\ \end{bmatrix}$.
7. La traccia T , la somma $S := D_1 + D_2 + D_3$ dei determinanti D_1, D_2, D_3 dei tre minori principali di ordine 2 e il determinante D del tensore delle tensioni (σ_j^i) sono

$$T = \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} -1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -2 \end{bmatrix}.$$

8. Gli autovalori di $\hat{\sigma}$, **in ordine crescente** rispetto al loro valore, ed i **versori** dei corrispondenti autovettori sono [razionalizzare le frazioni **solo** quando è veramente conveniente]

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{bmatrix} -1 \end{bmatrix} & \bar{u}_1 &= \begin{bmatrix} \pm 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \bar{e}_x + \begin{bmatrix} \mp 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \bar{e}_y + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \bar{e}_z, \\ \lambda_2 &= \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} & \bar{u}_2 &= \begin{bmatrix} \pm 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \bar{e}_x + \begin{bmatrix} \pm 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \bar{e}_y + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \bar{e}_z \\ \lambda_3 &= \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix} & \bar{u}_3 &= \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \bar{e}_x + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \bar{e}_y + \begin{bmatrix} \pm 1 \end{bmatrix} \bar{e}_z. \end{aligned}$$

9. Il controllo sugli autovalori, basato sul confronto con gli invarianti T, S, D del tensore delle tensioni, dà esito

positivo negativo .

10. Il controllo sugli autovettori, basato sull'ortogonalità dei medesimi, dà esito

positivo negativo .

11. La massima componente (con il suo segno) dello sforzo scalare normale rispetto a tutte le possibili ∞^2 facce è

$$\phi = \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}.$$

12. La minima componente (con il suo segno) dello sforzo scalare normale rispetto a tutte le possibili ∞^2 facce è

$$\phi = \begin{bmatrix} -1 \end{bmatrix}.$$

13. Tra tutte le ∞^2 facce ve ne sono alcune rispetto alle quali lo sforzo normale è di trazione? sì no
14. Tra tutte le ∞^2 facce ve ne sono alcune rispetto alle quali lo sforzo normale è di pressione? sì no
14. Tra tutte le ∞^2 facce ve ne sono alcune rispetto alle quali lo sforzo normale è nullo? sì no
16. Lo sforzo relativo alla faccia ortogonale al vettore $\bar{e}_x + \bar{e}_y$ è

$$\bar{\phi} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \bar{e}_x + \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \bar{e}_y + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \bar{e}_z.$$

17. La componente scalare dello sforzo normale relativo alla faccia ortogonale al vettore $\bar{e}_x + \bar{e}_y$ è [eseguire le eventuali semplificazioni evidenti, ma razionalizzare le frazioni **solo** quando è veramente conveniente]

$$\phi = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}.$$

18. Lo sforzo tangenziale relativo alla faccia ortogonale al vettore $\bar{e}_x + \bar{e}_y$ è [eseguire le eventuali semplificazioni evidenti, ma razionalizzare le frazioni **solo** quando è veramente conveniente]

$$\bar{\phi}^\perp = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \bar{e}_x + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \bar{e}_y + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \bar{e}_z.$$