

| | | |
|---------|------|-----------|
| Cognome | Nome | Matricola |
|---------|------|-----------|

| | |
|---|--|
| corso di laurea ambientale <input type="checkbox"/> | corso di laurea edile <input type="checkbox"/> |
|---|--|

0.1 Esercizio. 5 minuti

Consideriamo una base ortonormale $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ e due vettori $\bar{u} = \bar{e}_1 - \bar{e}_2$ e $\bar{v} = 3(\bar{e}_1 + \bar{e}_2)$.

Il simbolo \cdot indica **solo** il prodotto scalare tra due vettori ed il simbolo \times indica **solo** il prodotto vettoriale tra due vettori.

1) Calcolare il prodotto scalare $\bar{u} \cdot \bar{v}$, il prodotto vettoriale $\bar{u} \times \bar{v}$, il doppio prodotto scalare $u \cdot (\bar{u} \cdot \bar{v})$, il doppio prodotto vettoriale $u \times (\bar{u} \times \bar{v})$, il prodotto misto $\bar{u} \cdot (\bar{u} \times \bar{v})$, il prodotto misto $\bar{u} \times (\bar{u} \cdot \bar{v})$

[se qualcuna delle domande fosse priva di senso, segnalare questo fatto con la sigla PS (= privo di senso)]:

$$\begin{aligned} \bar{u} \cdot \bar{v} &= \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}, & \bar{u} \times \bar{v} &= \begin{bmatrix} 6\bar{e}_3 \end{bmatrix}, \\ \bar{u} \cdot (\bar{u} \cdot \bar{v}) &= \begin{bmatrix} PS \end{bmatrix}, & \bar{u} \times (\bar{u} \times \bar{v}) &= \begin{bmatrix} -6(\bar{e}_1 + \bar{e}_2) \end{bmatrix}, \\ \bar{u} \cdot (\bar{u} \times \bar{v}) &= \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}, & \bar{u} \times (\bar{u} \cdot \bar{v}) &= \begin{bmatrix} PS \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

2) Conformemente alla seguente uguaglianza

$$\bar{v} = \bar{v}^{\parallel} + \bar{v}^{\perp}, \quad \text{con} \quad \bar{v}^{\parallel} = v^{\parallel} \text{ vers } \bar{u}, \quad \bar{v}^{\perp} \cdot \bar{u} = 0,$$

calcolare la componente scalare v^{\parallel} di \bar{v} parallela ad \bar{u} , la componente vettoriale \bar{v}^{\parallel} di \bar{v} parallela ad \bar{u} e la componente vettoriale \bar{v}^{\perp} di \bar{v} ortogonale a \bar{u}

$$v^{\parallel} = [0], \quad \bar{v}^{\parallel} = [0 \bar{e}_1 + 0 \bar{e}_2 + 0 \bar{e}_3], \quad \bar{v}^{\perp} = [3 \bar{e}_1 + 3 \bar{e}_2 + 0 \bar{e}_3].$$

0.2 Esercizio. 15 minuti

Consideriamo un sistema continuo costituito da un anello (**unidimensionale**) omogeneo e da un'asta (**unidimensionale**) omogenea ortogonale al piano dell'anello e con il suo punto medio coincidente con il centro dell'anello. Siano R il raggio dell'anello e la lunghezza dell'asta ed m la massa dell'anello e la massa dell'asta.

Trovare:

- 1) il momento d'inerzia I_1 dell'asta rispetto alla retta contenente l'asta,
- 2) il momento d'inerzia I_2 dell'asta rispetto ad una retta ortogonale all'asta e passante per il suo punto medio,
- 3) il momento d'inerzia I_3 dell'anello rispetto alla retta ortogonale all'anello e passante per il suo centro,
- 4) il momento d'inerzia I_4 dell'anello rispetto ad una retta giacente sul piano dell'anello e passante per il suo centro,
- 5) il momento d'inerzia I_5 dell'anello rispetto ad una retta (giacente sul piano dell'anello e) tangente all'anello,
- 6) il momento d'inerzia I_6 del sistema rispetto ad una retta (giacente sul piano dell'anello e) tangente all'anello.

$$\begin{aligned} I_1 &= \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}, & I_2 &= \begin{bmatrix} \frac{1}{12} m R^2 \end{bmatrix}, & I_3 &= \begin{bmatrix} m R^2 \end{bmatrix}, \\ I_4 &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} m R^2 \end{bmatrix}, & I_5 &= \begin{bmatrix} \frac{3}{2} m R^2 \end{bmatrix}, & I_6 &= \begin{bmatrix} \frac{5}{2} m L^2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

0.3 Esercizio. 5 minuti

Supponiamo che gli autovalori del tensore delle tensioni siano

$$\lambda_1 = 2\pi, \quad \lambda_2 = -3\pi, \quad \lambda_3 = 0.$$

1) Tra *tutte le infinite facce* quante sono quelle relativamente alle quali lo sforzo di taglio è nullo? (Ogni faccia con le sue due orientazioni va contata una sola volta.) [Scegliere una sola casella, *quella più appropriata*]

- nessuna faccia
 solo una faccia solo due facce solo tre facce
 una famiglia di infinite facce caratterizzata da 1 2 3 parametri indipendenti
 una singola faccia più una famiglia di infinite facce caratterizzata da 1 2 3 parametri indipendenti
 tutte le facce .

2) Tra *tutte le infinite facce* quante sono quelle relativamente alle quali lo sforzo normale è nullo? (Ogni faccia con le sue due orientazioni va contata una sola volta.) [Scegliere una sola casella, *quella più appropriata*]

- nessuna faccia
 solo una faccia solo due facce solo tre facce
 una famiglia di infinite facce caratterizzata da 1 2 3 parametri indipendenti
 tutte le facce .

0.4 Esercizio. 25 minuti

La matrice del tensore delle tensioni, in una base ortonormale $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3) \equiv (\bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{e}_z)$, è

$$\begin{pmatrix} \sigma_1^1 & \sigma_2^1 & \sigma_3^1 \\ \sigma_1^2 & \sigma_2^2 & \sigma_3^2 \\ \sigma_1^3 & \sigma_2^3 & \sigma_3^3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \sigma_x^x & \sigma_y^x & \sigma_z^x \\ \sigma_x^y & \sigma_y^y & \sigma_z^y \\ \sigma_x^z & \sigma_y^z & \sigma_z^z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3/2 \end{pmatrix}.$$

1. La faccia xy è principale? sì no
2. La faccia xz è principale? sì no
3. La faccia yz è principale? sì no .
4. La componente lungo \bar{e}_x dello sforzo relativo alla faccia xy è $\phi = \begin{bmatrix} -1 \\ \end{bmatrix}$.
5. La componente lungo \bar{e}_y dello sforzo relativo alla faccia xy è $\phi = \begin{bmatrix} 0 \\ \end{bmatrix}$.
6. La componente lungo \bar{e}_z dello sforzo relativo alla faccia xy è $\phi = \begin{bmatrix} 3/2 \\ \end{bmatrix}$.
7. La traccia T , la somma $S := D_1 + D_2 + D_3$ dei determinanti D_1, D_2, D_3 dei tre minori principali di ordine 2 e il determinante D del tensore delle tensioni (σ_j^i) sono

$$T = \begin{bmatrix} 3/2 \\ \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} -1 \\ \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ \end{bmatrix}.$$

8. Gli autovalori di $\hat{\sigma}$, **in ordine crescente** rispetto al loro valore, ed i **versori** dei corrispondenti autovettori sono

$$\lambda_1 = \begin{bmatrix} -1/2 \\ \end{bmatrix} \quad \bar{u}_3 = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} \\ \end{bmatrix} \bar{e}_x + \begin{bmatrix} 0 \\ \end{bmatrix} \bar{e}_y + \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} \\ \end{bmatrix} \bar{e}_z,$$

$$\lambda_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \end{bmatrix} \quad \bar{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \end{bmatrix} \bar{e}_x + \begin{bmatrix} 1 \\ \end{bmatrix} \bar{e}_y + \begin{bmatrix} 0 \\ \end{bmatrix} \bar{e}_z$$

$$\lambda_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ \end{bmatrix} \quad \bar{u}_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} \\ \end{bmatrix} \bar{e}_x + \begin{bmatrix} 0 \\ \end{bmatrix} \bar{e}_y + \begin{bmatrix} -2/\sqrt{5} \\ \end{bmatrix} \bar{e}_z.$$

9. Il controllo sugli autovalori, basato sul confronto con gli invarianti T, S, D del tensore delle tensioni, dà esito

positivo negativo .

10. Il controllo sugli autovettori, basato sull'ortogonalità dei medesimi, dà esito

positivo negativo .

11. La massima componente (con il suo segno) dello sforzo scalare normale rispetto a tutte le possibili ∞^2 facce è

$$\phi = \begin{bmatrix} 2 \\ \end{bmatrix}.$$

12. La minima componente (con il suo segno) dello sforzo scalare normale rispetto a tutte le possibili ∞^2 facce è

$$\phi = \begin{bmatrix} -1/2 \\ \end{bmatrix}.$$

13. Tra tutte le ∞^2 facce ve ne sono alcune rispetto alle quali lo sforzo normale è di trazione? sì no
14. Tra tutte le ∞^2 facce ve ne sono alcune rispetto alle quali lo sforzo normale è di pressione? sì no
14. Tra tutte le ∞^2 facce ve ne sono alcune rispetto alle quali lo sforzo normale è nullo? sì no
16. Lo sforzo relativo alla faccia ortogonale al vettore $\bar{e}_x + \bar{e}_z$ è

$$\bar{\phi} = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ \end{bmatrix} \bar{e}_x + \begin{bmatrix} 0 \\ \end{bmatrix} \bar{e}_y + \begin{bmatrix} 1/(2\sqrt{2}) \\ \end{bmatrix} \bar{e}_z.$$

17. La componente scalare dello sforzo normale relativo alla faccia ortogonale al vettore $\bar{e}_x + \bar{e}_z$ è

$$\phi = \begin{bmatrix} -1/4 \\ \end{bmatrix}.$$

18. Lo sforzo tangenziale relativo alla faccia ortogonale al vettore $\bar{e}_x + \bar{e}_z$ è

$$\bar{\phi}^\perp = \begin{bmatrix} -3/(4\sqrt{2}) \\ \end{bmatrix} \bar{e}_x + \begin{bmatrix} 0 \\ \end{bmatrix} \bar{e}_y + \begin{bmatrix} 3/(4\sqrt{2}) \\ \end{bmatrix} \bar{e}_z.$$

[Nelle risposte eseguire le eventuali semplificazioni evidenti. Razionalizzare le frazioni **solo** quando è veramente conveniente.]