Esercizi d'esame

Meccanica dei Continui - Meccanica Razionale

Marco Modugno

Dipartimento di Matematica Applicata, Università di Firenze

Via S. Marta 3, 50139 Firenze

email: marco.modugno@unifi.it

Esercizi simili a quelli che potrebbero capitare nella prova scritta d'esame.
Data 2013.01.29. - 02.22.

Introduzione

Gli esercizi contenuti in questa dispensa potrebbero essere simili a quelli della prova scritta d'esame.

Ogni studente può esercitarsi inventando delle variazioni per ogni tipo di esercizio.
Per esempio, l'esercizio sui momenti d'inerzia può essere variato sostituendo il quadrato con un disco o con una corona circolare e sostituendo l'asta ortogonale al quadrato con un'asta parallela ad un lato del quadrato e passante per il centro del quadrato.
Per esempio, l'esercizio sul numero delle facce con sforzi di taglio nulli e sforzi normali nulli può essere variato considerando autovalori positivi, negativi e nulli e considerando tutti e tre gli autovalori uguali tra loro, due autovalori uguali tra loro e tutti e tre gli autovalori diversi tra loro.
Per esempio, l'esercizio sul tensore delle tensioni può essere variato cambiando la matrice iniziale e cambiando il vettore che individua la faccia rispetto a cui si chiede di calcolare lo sforzo.
Per esempio, l'esercizio di cinematica può essere variato considerando diversi tipi di composizione di moti traslatori rettilinei uniformi, di moti traslatori rettilinei uniformemente accelerati, di moti traslatori oscillanti sinussoidalmente, di moti rigidi di rotazione con asse di rotazione fisso o con asse di rotazione traslante con moto uniforme, di moti di espansione sferica, cilindrica e rettilinea.
Per esempio, l'esercizio sull'equazione di continuità può essere variato considerando diversi tipi di densità di massa dipendente dalle coordinate spaziali o dalla coordinata temporale.
Per esempio, gli esercizi sull'elasticità possono essere variati cambiando la matrice iniziale.

Ricordo che tutti i tipi esercizi contenuti in questa dispensa e le variazioni proposte qui sopra sono stati discussi ampiamente durante le lezioni del corso.

Raccomando caldamente di eseguire gli esercizi con lo spitito "giusto".
L'esercizio sul prodotto scalare e vettoriale e sulla decomposizione dei vettori serve a saggiare alcune nozioni minime di base. Se uno studente ha delle minime incertezze su questo argomento è necessario che colmi queste lacune prima di procedere.
Ogni tipo di esercizio non deve essere "imparato", ma deve essere un occasione per capire in modo chiaro ed approfondito i concetti teorici e le leggi che stanno alla base e per imparare un "metodo".
È molto meglio svolgere pochi esercizi in modo approfondito che tanti esercizi in modo superficiale.
È del tutto inutile tentare di svolgere degli esercizi se prima non sono state capite in modo lucido e solido le nozioni elementari dei prerequisiti di ciascun esercizio. Per esempio, è inutile tentare di svolgere o di imparare meccanicamente a svolgere gli esercizi sul tensore delle tensioni se prima non si hanno idee chiare su come si costruisce la matrice di un operatore lineare, su cosa sono gli sforzi di taglio e gli sforzi normali, su come si calcolano questi sforzi, su cosa è un autovettore, su come si calcolano gli autovettori e gli autovalori, sulle motivazioni algebriche di questo metodo di calcolo, eccetera.
Nella maggioranza dei casi, gli studenti se sbagliano a risolvere un tipo di esercizio è proprio perché hanno lacune serie sulle nozioni di base.

Raccomando caldamente che ogni esercizio venga svolto confrontando i risultati ottenuti con il metodo analitico con i risultati che ci si possono aspettare intuitivamente. A questo proposito è molto importante valutare le eventuali simmetrie di ogni problema e le loro possibili conseguenze; spesso una simmetria permette di arrivare ad un risultato molto più velocemente del calcolo analitico. Per esempio, nell'esercizio di cinematica, una valutazione preliminare intuitiva del tipo di moto proposto suggerisce subito il tipo di velocità, di accelerazione, di tensore delle deformazioni infinitesime, di tensore delle rotazioni infinitesime, di velocità angolare, eccetera, che saranno poi ottenute mediante un calcolo analitico rigoroso.

Raccomando anche caldamente che per ogni esercizio siano eseguiti tutti i possibili controlli. Per esempio, è fondamentale eseguire sempre i controlli dimensionali. Inoltre, in vari esercizi è possibile fare alcuni controlli specifici che sono stati ampiamente discussi durante le lezioni del corso.

In conclusione, questa collezione di esercizi intende essere una piccola guida alla preparazione della prova scritta, ma non è in grado di sostituire tutto quello che è stato insegnato durante il corso.

Indice

1 Primo compito

1.1 Test elementare

1.1 Esercizio. 5 minuti
Consideriamo una base ortonormale orientata positivamente $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ e due vettori

$$\bar{u} = \bar{e}_1 - 2\,\bar{e}_2 + \bar{e}_3 \qquad \text{e} \qquad \bar{v} = 2\,\bar{e}_1 - \bar{e}_2 - \bar{e}_3\,.$$

Indichiamo il prodotto scalare tra due vettori con il simbolo $\cdot$ ed il prodotto vettoriale tra due vettori con il simbolo $\times$.

1) Calcolare il prodotto scalare $\bar{u} \cdot \bar{v}$, il prodotto vettoriale $\bar{u} \times \bar{v}$, i doppi prodotti scalari $\bar{u} \cdot (\bar{u} \cdot \bar{v})$, $(\bar{u} \cdot \bar{u}) \cdot \bar{v}$, i doppi prodotti vettoriali $\bar{u} \times (\bar{u} \times \bar{v})$, $(\bar{u} \times \bar{u}) \times \bar{v}$, i prodotti misti $\bar{u} \cdot (\bar{u} \times \bar{v})$, $(\bar{u} \cdot \bar{u}) \times \bar{v}$, $\bar{u} \times (\bar{u} \cdot \bar{v})$, $(\bar{u} \times \bar{u}) \cdot \bar{v}$:

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = [\qquad\qquad], \qquad \bar{u} \times \bar{v} = [\qquad\qquad],$$

$$\bar{u} \cdot (\bar{u} \cdot \bar{v}) = [\qquad\qquad], \qquad \bar{u} \times (\bar{u} \times \bar{v}) = [\qquad\qquad],$$
$$(\bar{u} \cdot \bar{u}) \cdot \bar{v} = [\qquad\qquad], \qquad (\bar{u} \times \bar{u}) \times \bar{v} = [\qquad\qquad],$$

$$\bar{u} \cdot (\bar{u} \times \bar{v}) = [\qquad\qquad], \qquad \bar{u} \times (\bar{u} \cdot \bar{v}) = [\qquad\qquad],$$
$$(\bar{u} \cdot \bar{u}) \times \bar{v} = [\qquad\qquad], \qquad (\bar{u} \times \bar{u}) \cdot \bar{v} = [\qquad\qquad].$$

Se qualcuna delle domande fosse eventualmente priva di senso, segnalare questo fatto con la sigla PS (= privo di senso).

2) Calcolare la componente scalare $v^{\parallel}$ di $\bar{v}$ parallela ad $\bar{u}$, la componente vettoriale $\bar{v}^{\parallel}$ di $\bar{v}$ parallela ad $\bar{u}$ e la componente vettoriale $\bar{v}^{\perp}$ di $\bar{v}$ ortogonale a $\bar{u}$

$$v^{\parallel} = [\quad], \qquad \bar{v}^{\parallel} = [\quad \bar{e}_1 + \quad \bar{e}_2 + \quad \bar{e}_3], \qquad \bar{v}^{\perp} = [\quad \bar{e}_1 + \quad \bar{e}_2 + \quad \bar{e}_3].$$

1.2 Tensore d'inerzia

1.2 Esercizio. 15 minuti
Consideriamo un sistema continuo costituito da un quadrato (bidimensionale) omogeneo e da un'asta (unidimensionale) omogenea ortogonale al piano del quadrato e con il suo punto medio coincidente con il centro del quadrato.
Siano $m = m_{quadrato} = m_{asta}$ la massa del quadrato e la massa dell'asta e siano $L = L_{quadrato} = L_{asta}$ la lunghezza del lato del quadrato e la lunghezza dell'asta.

Calcolare:
1) il momento d'inerzia I_1 del quadrato rispetto alla retta parallela ad un lato al quadrato e passante per il centro del quadrato,
2) il momento d'inerzia I_2 del quadrato rispetto alla retta ortogonale al quadrato e passante per il centro del quadrato,
3) il momento d'inerzia I_3 dell'asta rispetto alla retta contenente l'asta,
4) il momento d'inerzia I_4 dell'asta rispetto ad una retta ortogonale all'asta e passante per il centro dell'asta,
5) il momento d'inerzia I_5 del sistema rispetto alla retta ortogonale al quadrato e passante per il centro del quadrato,
6) il momento d'inerzia I_6 del sistema rispetto alla retta parallela ad un lato al quadrato e passante per il centro del quadrato,
7) il momento d'inerzia I_7 del sistema rispetto alla retta passante per un lato del quadrato,
8) il momento d'inerzia I_8 del sistema rispetto alla retta parallela all'asta e passante per un vertice del quadrato.

$$I_1 = [\qquad\qquad] \quad I_2 = [\qquad\qquad] \quad I_3 = [\qquad\qquad] \quad I_4 = [\qquad\qquad]$$
$$I_5 = [\qquad\qquad] \quad I_6 = [\qquad\qquad] \quad I_7 = [\qquad\qquad] \quad I_8 = [\qquad\qquad].$$

1.3 Sforzi tangenziali e normali

1.3 Esercizio. 5 minuti
Supponiamo che gli autovalori del tensore delle tensioni siano $\lambda_1 = -\frac{5}{4}$, $\lambda_2 = -\frac{5}{4}$, $\lambda_3 = -\frac{5}{4}$.

1) Tra *tutte le infinite facce* quante sono quelle relativamente alle quali lo sforzo di taglio è nullo? (Ogni faccia con le sue due orientazioni va contata una sola volta.) [*Scegliere una sola casella, quella più appropriata.*]
nessuna faccia □
solo una faccia □ solo due facce □ solo tre facce □
una famiglia di infinite facce caratterizzata da 1 □ 2 □ 3 □ parametri indipendenti
una singola faccia più una famiglia di infinite facce caratterizzata da 1 □ 2 □ 3 □ parametri indipendenti
tutte le facce □ .

2) Tra *tutte le infinite facce* quante sono quelle relativamente alle quali lo sforzo normale è nullo? (Ogni faccia con le sue due orientazioni va contata una sola volta.) [*Scegliere una sola casella, quella più appropriata.*]
nessuna faccia □
solo una faccia □ solo due facce □ solo tre facce □
una famiglia di infinite facce caratterizzata da 1 □ 2 □ 3 □ parametri indipendenti
tutte le facce □ .

1.4 Autovalori ed autovettori

1.4 Esercizio. 25 minuti
La matrice del tensore delle tensioni, in una base ortonormale $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3) \equiv (\bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{e}_z)$, è

$$\begin{pmatrix} \sigma_1^1 & \sigma_2^1 & \sigma_3^1 \\ \sigma_1^2 & \sigma_2^2 & \sigma_3^2 \\ \sigma_1^3 & \sigma_2^3 & \sigma_3^3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \sigma_x^x & \sigma_y^x & \sigma_z^x \\ \sigma_x^y & \sigma_y^y & \sigma_z^y \\ \sigma_x^z & \sigma_y^z & \sigma_z^z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 6 \end{pmatrix} .$$

1. La faccia xy è principale? *sì* ☐ *no* ☐
2. La faccia xz è principale? *sì* ☐ *no* ☐
3. La faccia yz è principale? *sì* ☐ *no* ☐ .
4. La componente lungo $\bar{e}_x$ dello sforzo relativo alla faccia xy è $\phi = [\qquad\qquad]$.
5. La componente lungo $\bar{e}_y$ dello sforzo relativo alla faccia xy è $\phi = [\qquad\qquad]$.
6. La componente lungo $\bar{e}_z$ dello sforzo relativo alla faccia xy è $\phi = [\qquad\qquad]$.
7. La traccia ed il determinante del tensore delle tensioni sono

$$\mathrm{tr}(\sigma_j^i) = [\qquad\qquad] \qquad \text{e} \qquad \det(\sigma_j^i) = [\qquad\qquad] .$$

8. Gli autovalori di $\hat{\sigma}$, *in ordine crescente rispetto al loro valore*, ed i **versori** dei corrispondenti autovettori sono

$$\lambda_1 = [\qquad\qquad] \qquad \bar{u}_1 = [\qquad\qquad]\,\bar{e}_x + [\qquad\qquad]\,\bar{e}_y + [\qquad\qquad]\,\bar{e}_z ,$$

$$\lambda_2 = [\qquad\qquad] \qquad \bar{u}_2 = [\qquad\qquad]\,\bar{e}_x + [\qquad\qquad]\,\bar{e}_y + [\qquad\qquad]\,\bar{e}_z ,$$

$$\lambda_3 = [\qquad\qquad] \qquad \bar{u}_3 = [\qquad\qquad]\,\bar{e}_x + [\qquad\qquad]\,\bar{e}_y + [\qquad\qquad]\,\bar{e}_z .$$

9. Il controllo sugli autovalori, basato sul confronto con la traccia ed il determinante del tensore delle tensioni, dà esito

positivo ☐ negativo ☐.

10. Il controllo sugli autovettori, basato sull'ortogonalità dei medesimi, dà esito

positivo ☐ negativo ☐.

11. La massima componente dello sforzo scalare normale rispetto a tutte le possibili ∞^2 facce è

$$\phi = [\qquad\qquad] .$$

12. La minima componente dello sforzo scalare normale rispetto a tutte le possibili ∞^2 facce è

$$\phi = [\qquad\qquad] .$$

13. Tra tutte le ∞^2 facce ve ne sono alcune rispetto alle quali lo sforzo normale è di trazione? sì ☐ no ☐
14. Tra tutte le ∞^2 facce ve ne sono alcune rispetto alle quali lo sforzo normale è di pressione? sì ☐ no ☐
15. Lo sforzo relativo alla faccia ortogonale al vettore $\bar{e}_y + \bar{e}_z$ è

$$\bar{\phi} = [\qquad\qquad]\,\bar{e}_x + [\qquad\qquad]\,\bar{e}_y + [\qquad\qquad]\,\bar{e}_z .$$

16. La componente scalare dello sforzo normale relativo alla faccia ortogonale al vettore $\bar{e}_y + \bar{e}_z$ è

$$\phi^{\parallel} = [\qquad\qquad] .$$

17. Lo sforzo tangenziale relativo alla faccia ortogonale al vettore $\bar{e}_y + \bar{e}_z$ è

$$\bar{\phi}^{\perp} = [\qquad\qquad]\,\bar{e}_x + [\qquad\qquad]\,\bar{e}_y + [\qquad\qquad]\,\bar{e}_z .$$

[*Nelle risposte eseguire le eventuali semplificazioni evidenti. Razionalizzare le frazioni* **solo** *quando è veramente conveniente.*]

2 Secondo compito

2.1 Cinematica

2.1 Esercizio. 25 minuti
Consideriamo un moto continuo, la cui espressione è (τ , ω , $u \in \mathbb{R}$ sono tre costanti date)

$$\begin{aligned} C^x(s,t;p) &= \exp(\frac{s-t}{\tau})\big(x(p)\,\cos\omega(s-t) + y(p)\,\sin\omega(s-t)\big)\,, \\ C^y(s,t;p) &= \exp(\frac{s-t}{\tau})\big(-x(p)\,\sin\omega(s-t) + y(p)\,\cos\omega(s-t)\big)\,, \\ C^z(s,t;p) &= z(p) + u\,(s-t)\,. \end{aligned}$$

Consideriamo una densità di massa, la cui espressione euleriana è ($\mu_0, l \in \mathbb{R}^+$ sono due costanti date)

$$\mu(t,p) = \mu_0\,\exp(-z^2/l^2)\,.$$

1. L'espressione euleriana della velocità è

$$\bar{\mathrm{v}}(t,p) := (\delta C)(t,p) = [\qquad\qquad]\,\bar{e}_x + [\qquad\qquad]\,\bar{e}_y + [\qquad\qquad]\,\bar{e}_z\,.$$

2. La derivata parziale rispetto al tempo della velocità è

$$(\partial_0\bar{\mathrm{v}})(t,p) = [\qquad\qquad]\,\bar{e}_x + [\qquad\qquad]\,\bar{e}_y + [\qquad\qquad]\,\bar{e}_z\,.$$

3. L'espressione euleriana dell'accelerazione è

$$\bar{\mathrm{a}}(t,p) := (\delta^2 C)(t,p) = (\delta\bar{\mathrm{v}})(t,p) = [\qquad\qquad]\bar{e}_x + [\qquad\qquad]\bar{e}_y + [\qquad\qquad]\bar{e}_z\,.$$

4. La matrice dell'operatore jacobiano è

$$(J^i_j)(s,t,p) := (\overset{\vee}{D}C)(s;t,p) = \begin{pmatrix} \qquad\qquad\qquad\qquad \\ \\ \\ \end{pmatrix}.$$

5. La matrice dell'operatore delle deformazioni lineari è

$$(\mathcal{D}^i_j)(s,t,p) = \begin{pmatrix} \qquad\qquad\qquad\qquad \\ \\ \\ \end{pmatrix}.$$

6. La matrice dell'operatore delle rotazioni è

$$(\mathcal{R}^i_j)(s;t,p) = \begin{pmatrix} \qquad\qquad\qquad\qquad \\ \\ \\ \end{pmatrix}.$$

7. Il determinante dell'operatore jacobiano è

$$\det(J^i_j)(s;t,p) = \det(\mathcal{D}^i_j)(s;t,p) = [\qquad\qquad]\,.$$

8. La matrice della derivata spaziale della velocità e della derivata totale temporale dell'operatore jacobiano è

$$(\overset{\vee}{D}\bar{\mathrm{v}})^i_j(t,p) = (\delta J^i_j)(t,p) = \begin{pmatrix} \qquad\qquad\qquad\qquad \\ \\ \\ \end{pmatrix}.$$

9. La matrice del tensore delle deformazioni infinitesime è

$$(\epsilon^i_j)(t,p) := \mathrm{Sim}(\overset{\vee}{D}\bar{\mathrm{v}}^i_j)(t,p) = \mathrm{Sim}(\delta J^i_j)(t,p) = \delta(\mathcal{D}^i_j)(t,p) = \begin{pmatrix} \qquad\qquad\qquad\qquad \\ \\ \\ \end{pmatrix}.$$

10. La matrice del tensore delle rotazioni infinitesime è

$$(\omega^i_j)(t,p) := \mathrm{Ant}(\overset{\vee}{D}\bar{\mathrm{v}}^i_j)(t,p) = \mathrm{Ant}(\delta J^i_j)(t,p) = \delta(\mathcal{R}^i_j)(t,p) = \begin{pmatrix} \qquad\qquad\qquad\qquad \\ \\ \\ \end{pmatrix}.$$

11. La divergenza della velocità è

$$(\operatorname{div}\bar{\mathrm{v}})(t,p) := \operatorname{tr}((\overset{\vee}{D}\bar{\mathrm{v}})^i_j)(t,p) = \operatorname{tr}(\epsilon^i_j)(t,p) = \delta(\det(J^i_j))(t,p) = \delta(\det(\mathcal{D}^i_j))(t,p) = [\qquad\qquad]\,.$$

12. La velocità angolare è

$$\bar{\Omega}(t,p) = \tfrac{1}{2}\,(\operatorname{rot}\bar{\mathrm{v}})(t,p) = [\qquad\qquad]\,\bar{e}_x + [\qquad\qquad]\,\bar{e}_y + [\qquad\qquad]\,\bar{e}_z\,.$$

13. Il confronto delle due formule seguenti esprimenti l'accelerazione dà edito positivo sì □ no □

$$\bar{\mathrm{a}} = \delta^2 C \qquad \text{ed} \qquad \bar{\mathrm{a}} = \partial_0\bar{\mathrm{v}} + \overset{\vee}{D}\bar{\mathrm{v}}(\bar{\mathrm{v}})\,.$$

14. Il moto è traslatorio *sì* □ *no* □, stazionario *sì* □ *no* □, irrotazionale *sì* □ *no* □, rigido *sì* □ *no* □ .

15. La derivata spaziale della densità di massa è

$$(\overset{\vee}{D}\mu)(t,p) = [\qquad\qquad]\,Dx + [\qquad\qquad]\,Dy + [\qquad\qquad]\,Dz\,.$$

16. La derivata spaziale della densità di massa lungo la velocità è

$$\big((\overset{\vee}{D}\mu)(\bar{\mathrm{v}})\big)(t,p) = [\qquad\qquad]\,.$$

17. La derivata parziale rispetto al tempo della densità di massa è

$$(\partial_0\mu)(t,p) = [\qquad\qquad]\,.$$

18. La derivata totale rispetto al tempo della densità di massa è

$$(\delta\mu)(t,p) = [\qquad\qquad]\,.$$

19. L'equazione di continuità è verificata? *sì* □ *no* □ .

2.2 Elasticità

2.2 Esercizio. 10 minuti
Consideriamo un continuo elastico ed isotropo (nell'approssimazione lineare) caratterizzato dalle costanti elastiche E e ν.
Consideriamo un tensore delle tensioni la cui matrice è ($a, b \in \mathbb{R}$ sono costanti date)

$$(\sigma_{ij}) = \begin{pmatrix} a\,z & b\,y & 0 \\ b\,y & a\,z & 0 \\ 0 & 0 & a\,z \end{pmatrix}.$$

1. La divergenza del tensore delle tensioni è

$$\operatorname{div} \bar{\sigma} = [\qquad\qquad]\,\bar{e}_x + [\qquad\qquad]\,\bar{e}_y + [\qquad\qquad]\,\bar{e}_z\,.$$

2. La matrice del tensore delle deformazioni infinitesime è (eseguire le semplificazioni evidenti)

$$(\epsilon_{ij}) = \begin{pmatrix} \qquad\qquad\qquad\qquad \\ \\ \end{pmatrix}.$$

3. Il tensore $\underline{\epsilon}$ soddisfa le condizioni di integrabilità dei tensori delle deformazioni infinitesime? *sì* ☐ *no* ☐ .
4. La densità di potenza delle tensioni è

$$\underline{\epsilon} \cdot \underline{\sigma} = [\qquad\qquad\qquad]\,.$$

5. Il tensore delle tensioni è isotropo? *sì* ☐ *no* ☐ .
6. Il tensore delle deformazioni infinitesime è isotropo? *sì* ☐ *no* ☐ .

2.3 Esercizio. 10 minuti
Consideriamo un continuo elastico ed isotropo (nell'approssimazione lineare) caratterizzato dalle costanti elastiche λ e μ.
Consideriamo un tensore delle deformazioni infinitesime la cui matrice è ($a, b \in \mathbb{R}$ sono costanti date)

$$(\epsilon_{ij}) = \begin{pmatrix} a\,x & 0 & b\,x \\ 0 & a\,y & 0 \\ b\,x & 0 & a\,z \end{pmatrix}.$$

2. Il tensore $\underline{\epsilon}$ soddisfa le condizioni di integrabilità dei tensori delle deformazioni infinitesime? *sì* ☐ *no* ☐ .
3. La matrice del tensore delle tensioni è (eseguire le semplificazioni evidenti)

$$(\sigma_{ij}) = \begin{pmatrix} \qquad\qquad\qquad\qquad \\ \\ \end{pmatrix}.$$

1. La divergenza del tensore delle tensioni è

$$\operatorname{div} \bar{\sigma} = [\qquad\qquad]\,\bar{e}_x + [\qquad\qquad]\,\bar{e}_y + [\qquad\qquad]\,\bar{e}_z\,.$$

4. La densità di potenza delle tensioni è

$$\underline{\epsilon} \cdot \underline{\sigma} = [\qquad\qquad\qquad]\,.$$

5. Il tensore delle tensioni è isotropo? *sì* ☐ *no* ☐ .
6. Il tensore delle deformazioni infinitesime è isotropo? *sì* ☐ *no* ☐ .