MARCO MODUGNO

Esercizi tipici d'esame con discussione

Appunti per gli studenti
del Corso di Laurea in
"Ingegneria per l'Ambiente, le Risorse ed il Territorio
Versione parziale e provvisoria del 2014.08.27. - 18.45.

INDICE

INTRODUZIONE

Queste dispense sono dedicate allo svolgimento ed alla discussione di esercizi tipici d'esame.

Le discussioni sono molto dettagliate ed occupano molte pagine esplicative. Però, la lunghezza di queste spiegazioni non deve trarre in inganno. Se lo studente conosce le nozioni di base essenziali ed ha capito la metodologia di questi esercizi tipici, i calcoli necessari per risolvere esercizi analoghi assegnati all'esame sono piuttosto semplici e bastano pochi minuti per eseguirli e fare i necessari controlli.

Usualmente, il testo degli esercizi proposti all'esame non richiede esplicitamente le verifiche incrociate ed interpretazioni intuitive che sono svolti in queste dispense. Però, è molto opportuno che in sede di esame lo studente esegua di propria iniziativa analoghe verifiche incrociate ed interpretazioni intuitive.

CAPITOLO 1

SFORZI

1.1 Dati dell'esercizio

Consideriamo, ad un certo istante t ed in una certa posizione p, un tensore delle tensioni $\hat{\sigma}$, di cui siano noti i tre autovalori (ma non siano specificati i corrispondenti assi principali).

Consideriamo i seguenti casi distinti:

A) gli autovalori sono

$$\lambda_1 = 1\,, \qquad \lambda_2 = -2\,, \qquad \lambda_3 = 0\,,$$

B) gli autovalori sono

$$\lambda_1 = 1\,, \qquad \lambda_2 = 2\,, \qquad \lambda_3 = 0\,,$$

C) gli autovalori sono

$$\lambda_1 = 2\,, \qquad \lambda_2 = 2\,, \qquad \lambda_3 = 3\,,$$

D) gli autovalori sono

$$\lambda_1 = 2\,, \qquad \lambda_2 = 2\,, \qquad \lambda_3 = 2\,.$$

1.2 Domande e risposte

1.2.1 Conteggio delle facce con sforzo tangenziale nullo

Sappiamo che per il punto p passano infinite facce, parametrizzate da 2 parametri indipendenti (i 2 coseni direttori). Vogliamo sapere per quante di queste infinite facce lo sforzo tangenziale è nullo. In altre parole, vogliamo sapere quante sono le facce principali passanti per il punto p, o, equivalentemente, quanti sono gli assi principali passanti per il punto p.

La risposta a questa domanda è data dalla seguente clausola del teorema spettrale.

- a) Se i 3 autovalori sono distinti, allora esistono solo 3 assi principali tra loro ortogonali.
- b) Se, 2 autovalori sono uguali tra loro e l'altro è diverso da questi due, allora abbiamo i seguenti assi principali:
  - l'asse principale relativo all'autovalore diverso dagli altri due e
  - tutti gli infiniti assi principali ortogonali al precedente asse principale.
- c) Se i 3 autovalori sono uguali, allora tutti gli assi sono principali.

Pertanto, gli assi principali passanti per p sono:
- nel caso A), solo 3 tra loro ortogonali,
- nel caso B), solo 3 tra loro ortogonali,
- nel caso C), un asse (relativo all'autovalore λ_3) e tutti gli altri infiniti assi (relativi all'autovalore $\lambda_1 = \lambda_2$) ortogonali al precedente (parametrizzati da un parametro),
- nel caso D), tutti gli infiniti assi (parametrizzati da 2 parametri indipendenti).

1.2.2 Conteggio delle facce con sforzo normale nullo

Sappiamo che per il punto p passano infinite facce, parametrizzate da 2 parametri indipendenti (2 coseni direttori). Vogliamo sapere per quante di queste infinite facce lo sforzo normale è nullo.

Per trovarle tutte, occorre trovare tutti i versori $\bar{n}$, ossia tutti vettori $\bar{n}$ tali che

$$\bar{n} \cdot \bar{n} = 1\,,$$

per i quali

$$\big(\hat{\sigma}(\bar{n})\big) \cdot \bar{n} = 0\,.$$

Riferendoci alla base ortonormale degli autovettori di $\hat{\sigma}$, abbiamo

$$\bar{n} \cdot \bar{n} = (n^1)^2 + (n^2)^2 + (n^3)^2\,,$$

$$\begin{pmatrix} \big(\hat{\sigma}(\bar{n})\big)^1 \\ \big(\hat{\sigma}(\bar{n})\big)^2 \\ \big(\hat{\sigma}(\bar{n})\big)^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n^1 \\ n^2 \\ n^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1\, n^1 \\ \lambda_2\, n^2 \\ \lambda_3\, n^3 \end{pmatrix},$$

$$\big(\hat{\sigma}(\bar{n})\big) \cdot \bar{n} = \lambda_1\,(n^1)^2 + \lambda_2\,(n^2)^2 + \lambda_3\,(n^3)^3\,.$$

Dunque, per risolvere il nostro problema, occorre risolvere il sistema

$$\begin{gathered} (n^1)^2 + (n^2)^2 + (n^3)^2 = 1\,, \\ \lambda_1\,(n^1)^2 + \lambda_2\,(n^2)^2 + \lambda_3\,(n^3)^3 = 0\,, \end{gathered}$$

la cui incognita è la terna di numeri reali $(n^1\,,\, n^2\,,\, n^3)$.

Naturalmente, questo non è un sistema lineare, perciò non può essere risolto con i metodi dei sistemi lineari. Conviene utilizzare un metodo per sostituzione.

Nel caso particolare in cui $\hat{\sigma}$ abbia un autovalore nullo, possiamo trovare immediatamente una soluzione particolare del precedente sistema. Infatti, se $\pm\bar{n}$ è l'autovettore di modulo unitario corrispondente a tale autovalore, allora si vede facilmente che tale versore soddisfa il precedente sistema e quindi la corrispondente faccia principale ha sforzo normale nullo. Questo risultato è in accordo con il fatto che ciascun autovalore di $\hat{\sigma}$ è uguale alla componente dello sforzo normale della faccia principale corrispondente a tale autovalore.

Ma noi siamo interessati a trovare tutte le soluzioni del precedente sistema, sia che $\hat{\sigma}$ abbia un autovalore nullo, sia che $\hat{\sigma}$ non abbia nessun autovalore nullo.

Dunque, cerchiamo le soluzioni di questo sistema nei quattro casi considerati nel presente esercizio.

Caso A). Il sistema diventa

$$\begin{aligned} (n^1)^2 + (n^2)^2 + (n^3)^2 &= 1\,, \\ (n^1)^2 - 2\,(n^2)^2 &= 0\,. \end{aligned}$$

Con il metodo di sostituzione troviamo

$$\begin{aligned} n^1 &= \pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\,\sqrt{1-(n^3)^2} \\ n^2 &= \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\,\sqrt{1-(n^3)^2} \end{aligned}$$

$$0 \le \|n^3\| \le 1\,.$$

Dunque, le soluzioni sono infinite, parametrizzate da 1 parametro, ossia dal parametro n^3.

In particolare, verifichiamo che la faccia principale corrispondente all'autovalore $\lambda_3 = 0$, avendo sforzo normale nullo, soddisfi il precedente sistema. Infatti, questa faccia è caratterizzata dal versore $\bar{n}$ con

$$n^1 = 0\,, \qquad n^2 = 0\,, \qquad n^3 = \pm 1\,,$$

e si vede subito che questa è una soluzione del sistema.

In particolare, abbiamo altre due soluzioni interessanti:

$$\begin{aligned} n^1 &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\,, \qquad n^2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\,, \qquad n^3 = 0\,, \\ n^1 &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\,, \qquad n^2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}\,, \qquad n^3 = 0\,. \end{aligned}$$

Più in generale, possiamo dimostrare, con un ragionamento analogo, quanto segue.

Supponiamo che un autovalore λ_1 sia positivo, un autovalore λ_2 sia negativo e l'altro autovalore λ_3 abbia un valore qualunque. Siano $\bar{u}_1$ e $\bar{u}_2$ autovettori degli autovalori λ_1 e λ_2.

Allora esistono almeno due facce con sforzo normale nullo, il cui versore normale giace sul piano generato dai due autovettori $\bar{u}_1$ e $\bar{u}_2$.

Caso B). Il sistema diventa

$$\begin{aligned} (n^1)^2 + (n^2)^2 + (n^3)^2 &= 1\,, \\ (n^1)^2 + 2\,(n^2)^2 &= 0\,. \end{aligned}$$

Il primo membro della seconda equazione è la somma di numeri positivi o nulli, perciò essa ha l'unica soluzione

$$n^1 = 0\,, \qquad n^2 = 0\,.$$

Perciò, l'unica soluzione del sistema è

$$n^1 = 0\,, \qquad n^2 = 0\,, \qquad n^3 = \pm 1.$$

Questa unica soluzione corrisponde proprio alla faccia principale con autovalore $\lambda_3 = 0$.

Caso C). Il sistema diventa

$$\begin{aligned} (n^1)^2 + (n^2)^2 + (n^3)^2 &= 1\,, \\ 2\,(n^1)^2 + 2\,(n^2)^2 + 3\,(n^3)^2 &= 0\,. \end{aligned}$$

Il primo membro della seconda equazione è la somma di numeri positivi o nulli, perciò essa ha l'unica soluzione

$$n^1 = 0\,, \qquad n^2 = 0\,, \qquad n^3 = 0\,.$$

Ma questa soluzione non soddisfa la prima equazione.

Dunque, il sistema non ha nessuna soluzione. In altre parole, non esiste nessuna faccia il cui sforzo normale sia nullo.

Più in generale, possiamo dimostrare, con un ragionamento analogo, quanto segue.

Supponiamo che i tre autovalori siano tutti positivi o tutti negativi. Allora, non esiste nessuna faccia con sforzo normale nullo.

Caso D). Anche in questo caso vale il ragionamento precedente.

Il sistema diventa

$$\begin{aligned} (n^1)^2 + (n^2)^2 + (n^3)^2 &= 1\,, \\ 2\,(n^1)^2 + 2\,(n^2)^2 + 2\,(n^3)^2 &= 0\,. \end{aligned}$$

Il primo membro della seconda equazione è la somma di numeri positivi o nulli, perciò essa ha l'unica soluzione

$$n^1 = 0\,, \qquad n^2 = 0\,, \qquad n^3 = 0\,.$$

Ma questa soluzione non soddisfa la prima equazione.

Dunque, il sistema non ha nessuna soluzione. In altre parole, non esiste nessuna faccia il cui sforzo normale sia nullo.

CAPITOLO 2

TENSORE DELLE TENSIONI

2.1 Dati dell'esercizio

La matrice del tensore delle tensioni $\hat{\sigma}$, in una base ortonormale $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3) \equiv (\bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{e}_z)$, è

$$\begin{pmatrix} \sigma^1_1 & \sigma^1_2 & \sigma^1_3 \\ \sigma^2_1 & \sigma^2_2 & \sigma^2_3 \\ \sigma^3_1 & \sigma^3_2 & \sigma^3_3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \sigma^x_x & \sigma^x_y & \sigma^x_z \\ \sigma^y_x & \sigma^y_y & \sigma^y_z \\ \sigma^z_x & \sigma^z_y & \sigma^z_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} .$$

2.2 Domande e risposte

2.2.1 Analisi delle facce coordinate

Analiziamo innanzitutto gli sforzi relativi alle tre facce determinate dalle coordinate scelte.

1. Le componenti lungo $\bar{e}_x$, $\bar{e}_y$, $\bar{e}_z$ dello sforzo relativo alla faccia yz (ortogonale all'asse x) sono, rispettivamente, $\sigma^x_x = 0$, $\sigma^y_x = 0$, $\sigma^z_x = 0$.
2. Le componenti lungo $\bar{e}_x$, $\bar{e}_y$, $\bar{e}_z$ dello sforzo relativo alla faccia xz (ortogonale all'asse y) sono, rispettivamente, $\sigma^x_y = 0$, $\sigma^y_y = 0$, $\sigma^z_y = 1$.
3. Le componenti lungo $\bar{e}_x$, $\bar{e}_y$, $\bar{e}_z$ dello sforzo relativo alla faccia xy (ortogonale all'asse z) sono, rispettivamente, $\sigma^x_z = 0$, $\sigma^y_z = 1$, $\sigma^z_z = 1/\sqrt{2}$.

Vediamo poi se qualcuna delle tre facce determinate dalle coordinate scelte sia principale.

1. La faccia yz (ortogonale all'asse x) è principale perché la prima colonna ha la seconda e la terza componente entrambe nulle (ossia lo sforzo tangenziale è nullo). Inoltre, la componente delle sforzo normale relativo a questa faccia è 0 , perché la prima colonna ha la prima componente nulla.
2. La faccia xz (ortogonale all'asse y) non è principale perché la seconda colonna non ha la prima e la terza componente entrambe nulle (ossia lo sforzo tangenziale non è nullo).
3. La faccia xy (ortogonale all'asse z) non è principale perché la terza colonna non ha la prima e la seconda componente entrambe nulle (ossia lo sforzo tangenziale non è nullo).

2.2.2 Autovalori ed autovettori

Finora abbiamo analizzato solo gli sforzi relativi alle tre facce determinate dalle coordinate scelte. Analiziamo ora tutte le infinite facce (caratterizzate da due parametri indipendenti).

Cerchiamo dunque tutte le facce principali ed i relativi sforzi normali. In altre parole, cerchiamo gli autovettori e gli autovalori della matrice (σ^i_j).

a) Abbiamo già visto che l'asse x è un asse principale e che il relativo autovalore è nullo. Dunque, abbiamo già trovato un primo autovettore $\bar{u}_x = \pm\bar{e}_x$ ed il relativo autovalore $\lambda_x = 0$.

Si badi bene che il fatto che questo autovalore sia nullo non contraddice in alcun modo la teoria degli autovalori ed autovettori (... contariamente a quanto pensano taluni studenti).

b) Per il teorema spettrale sappiamo che gli altri due assi principali sono ortogonali all'asse x, dunque appartengono al piano yz. Allora, per semplicità di calcolo, possiamo limitarci a trovare gli autovettori e gli autovalori della matrice (σ^i_j) ristretta al piano yz, cioè della matrice

$$\begin{pmatrix} \sigma^2_2 & \sigma^2_3 \\ \sigma^3_2 & \sigma^3_3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \sigma^y_y & \sigma^y_z \\ \sigma^z_y & \sigma^z_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico di questa matrice è

$$\det \begin{pmatrix} 0-\lambda & 1 \\ 1 & 1/\sqrt{2}-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - (1/\sqrt{2})\,\lambda - 1\,.$$

Le radici dell'equazione caratteristica

$$\lambda^2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\,\lambda - 1 = 0$$

sono

$$\lambda = \frac{(1/\sqrt{2}) \pm \sqrt{(1/2)+4}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2\sqrt{2}}$$

cioè

$$\lambda_+ = \sqrt{2} \qquad \text{e} \qquad \lambda_- = -\frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

Per controllo, verifichiamo le seguenti uguaglianze

$$\begin{aligned} \lambda_+^2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\,\lambda_+ - 1 &= (\sqrt{2})^2 - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} - 1 \qquad = 0\,, \\ \lambda_-^2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\,\lambda_- - 1 &= (\frac{1}{\sqrt{2}})^2 + (\frac{1}{\sqrt{2}})^2 - 1 = 0\,. \end{aligned}$$

c) Per comodità di scrittura, ordiniamo in ordine crescente i tre autovalori così trovati:

$$\lambda_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\,, \qquad \lambda_2 = 0\,, \qquad \lambda_3 = \sqrt{2}\,,$$

e chiamiamo $\bar{u}_1$, $\bar{u}_2$, $\bar{u}_3$, i relativi autovettori normalizzati.

Già sappiamo che

$$\bar{u}_2 = \pm \bar{e}_x\,.$$

Dobbiamo dunque trovare $\bar{u}_1$ e $\bar{u}_3$.

d) Per trovare $\bar{u}_1$, cerchiamo le soluzioni (v^i) del sistema

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v^2 \\ v^3 \end{pmatrix}\,,$$

ossia del sistema

$$\begin{aligned} v^3 &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\, v^2 \\ v^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\, v^3 &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\, v^3\,. \end{aligned}$$

Sappiamo a priori che queste due equazioni sono linearmente dipendenti (perché λ_1 è una soluzione dell'equazione caratteristica). Quindi, possiamo limitarci a trovare le soluzioni della prima equazione. Una soluzione $\bar{v}$ è data da

$$v^2 = 1\,, \qquad v^3 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

Tutte le altre soluzioni sono proporzionali a questa.

Pertanto, l'autovettore normalizzato $\bar{u}_1$ (con i due possibili segni) è dato da

$$\bar{u}_1 = \pm \bar{v}/\|\bar{v}\| = \pm\big(\bar{e}_y - \frac{1}{\sqrt{2}}\,\bar{e}_z\big)\Big/\sqrt{\frac{3}{2}} = \pm\big(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\,\bar{e}_y - \frac{1}{\sqrt{3}}\,\bar{e}_z\big)\,.$$

e) Per trovare $\bar{u}_3$, cerchiamo le soluzioni (v^i) del sistema

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} v^2 \\ v^3 \end{pmatrix}\,,$$

ossia del sistema

$$\begin{aligned} v^3 &= \sqrt{2}\, v^2 \\ v^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\, v^3 &= \sqrt{2}\, v^3\,. \end{aligned}$$

Sappiamo a priori che queste due equazioni sono linearmente dipendenti (perché λ_3 è una soluzione dell'equazione caratteristica). Quindi, possiamo limitarci a trovare le soluzioni della prima equazione. Una soluzione $\bar{v}$ è data da

$$v^2 = 1\,, \qquad v^3 = \sqrt{2}\,.$$

Tutte le altre soluzioni sono proporzionali a questa.
Pertanto, l'autovettore normalizzato $\bar{u}_3$ (con i due possibili segni) è dato da

$$\bar{u}_3 = \pm\bar{v}/\|\bar{v}\| = \pm(\bar{e}_y + \sqrt{2}\,\bar{e}_z)/\sqrt{3} = \pm\big(\frac{1}{\sqrt{3}}\,\bar{e}_y + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\,\bar{e}_z\big)\,.$$

f) Per controllo, possiamo verificare che i vettori $\bar{u}_1$ e $\bar{u}_3$ precedentemente trovati soddisfano effettivamente l'equazione degli autovettori relativamente ai rispettivi autovalori.

g) Inoltre, per controllo, possiamo verificare che i vettori $\bar{u}_1$ e $\bar{u}_3$ precedentemente trovati sono tra loro ortogonali.
Infatti, abbiamo

$$\bar{u}_1 \cdot \bar{u}_3 = \big(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\,\bar{e}_y - \frac{1}{\sqrt{3}}\,\bar{e}_z\big) \cdot \big(\frac{1}{\sqrt{3}}\,\bar{e}_y + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\,\bar{e}_z\big) = 0\,.$$

2.2.3 Sforzi normali massimi e minimi

Sappiamo che la massima e la minima componente degli sforzi normali relativi a tutte le infinite facce (caratterizzate da due parametri indipendenti) coincidono con il massimo ed il minimo autovalore.

Pertanto, la massima componente in valore assoluto dello sforzo normale di pressione, relativa a tutte le infinite facce, è

$$\phi = |\lambda_1| = -\frac{1}{\sqrt{2}}| = \frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

Inoltre, la massima componente dello sforzo normale di trazione, relativa a tutte le infinite facce, è

$$\phi = \lambda_3 = \sqrt{2}\,.$$

Chiaramente, la massima componente in valore assoluto dello sforzo normale di pressione è relativa alla faccia ortogonale all'autovettore $\bar{u}_1$ e la massima componente dello sforzo normale di trazione è relativa alla faccia ortogonale all'autovettore $\bar{u}_3$

2.2.4 Sforzi totali, normali e tangenziali

A) Sappiamo che lo sforzo

$$\bar{F} = F^1\,\bar{e}_1 + F^2\,\bar{e}_2 + F^3\,\bar{e}_3 = F^x\,\bar{e}_x + F^y\,\bar{e}_y + F^z\,\bar{e}_z$$

relativo alla faccia orientata caratterizzata dal versore

$$\bar{n} = n^1\,\bar{e}_1 + n^2\,\bar{e}_2 + n^3\,\bar{e}_3 = n^x\,\bar{e}_x + n^y\,\bar{e}_y + n^z\,\bar{e}_z$$

è dato dalla formula

$$F^i = \sum_j \sigma^i_j\, n^j\,,$$

ossia dalla formula

$$\begin{pmatrix} F^x \\ F^y \\ F^z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma^x_x & \sigma^x_y & \sigma^x_z \\ \sigma^y_x & \sigma^y_y & \sigma^y_z \\ \sigma^z_x & \sigma^z_y & \sigma^z_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n^x \\ n^y \\ n^z \end{pmatrix}.$$

B) Inoltre, lo sforzo normale relativo a tale faccia è dato dalla formula

$$\bar{F}^\perp = (\bar{F}\cdot\bar{n})\,\bar{n} = \nu\,\bar{n}\,,$$

ossia dalla formula

$$\bar{F}^\perp = \nu\,(\sum_i n^i\,\bar{e}_i)\,,$$

dove

$$\nu := \bar{F}\cdot\bar{n} = \sum_j F^j\,n^j$$

è la componente dello sforzo normale.

C) Pertanto, lo sforzo tangenziale relativo a tale faccia è dato dalla formula

$$\bar{F}^\parallel = \bar{F} - \bar{F}^\perp\,,$$

ossia dalla formula

$$\bar{F}^\parallel = \sum_i (F^i - \nu\,n^i)\,\bar{e}_i\,.$$

Esempio
Per esempio, calcoliamo lo sforzo relativo alla faccia ortogonale al vettore $\bar{v} := \bar{e}_y + \bar{e}_z$.
Il versore di tale vettore è

$$\bar{n} = \bar{v}/\|\bar{v}\| = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(\bar{e}_y + \bar{e}_z)\,.$$

Ribadiamo il fatto che è necessario normalizzare il vettore $\bar{v}$ per eseguire calcoli fisicamente corretti.

a) Lo sforzo relativo a tale faccia è dato dalla formula

$$\begin{pmatrix} F^x \\ F^y \\ F^z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ (1+\sqrt{2})/2 \end{pmatrix},$$

ossia dalla formula

$$\bar{F} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\bar{e}_y + \frac{1+\sqrt{2}}{2}\,\bar{e}_z\,.$$

b) Allora, la componente dello sforzo normale relativo a tale faccia è dato da

$$\nu = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ (1+\sqrt{2})/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} + \frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1+2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$$

e lo sforzo normale relativo a tale faccia è dato da

$$\bar{F}^{\perp} = \frac{1+2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\,(\bar{e}_y + \bar{e}_z) = \frac{1+2\sqrt{2}}{4}\,(\bar{e}_y + \bar{e}_z)\,.$$

c) Quindi, lo sforzo tangenziale relativo a tale faccia è dato dalla formula

$$\bar{F}^{\parallel} = -\frac{1}{4}\,\bar{e}_y + \frac{1}{4}\,\bar{e}_z\,.$$

d) Per controllo, facciamo le seguenti verifiche

$$\bar{F}^{\parallel} \cdot \bar{n} = \frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{2}}(-1+1) = 0\,,$$

$$\bar{F}^{\parallel} + \bar{F}^{\perp} = (\frac{1+2\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{4})\,\bar{e}_y + (\frac{1+2\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{4})\,\bar{e}_z = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\bar{e}_y + \frac{1+\sqrt{2}}{2}\,\bar{e}_z = \bar{F}\,.$$

CAPITOLO 3

CINEMATICA

Questo esercizio coinvolge molte nozioni importanti della cinematica dei continui e dell'equazione di continuità. L'equazione di continuità è discussa in due esempi distinti.

3.1 Dati dell'esercizio

1) Consideriamo un moto continuo C, la cui espressione in coordinate cartesiane è

$$\begin{aligned}
C^x(s,t;p) &= \exp(\frac{s-t}{\tau})\big(x(p)\,\cos\omega(s-t) - z(p)\,\sin\omega(s-t)\big)\,,\\
C^y(s,t;p) &= y(p) + L\,\big(\sin\alpha s - \sin\alpha t\big)\,,\\
C^z(s,t;p) &= \exp(\frac{s-t}{\tau})\big(x(p)\,\sin\omega(s-t) + z(p)\,\cos\omega(s-t)\big)\,,
\end{aligned}$$

dove τ, ω, α, $L \in \mathbb{R}$ sono costanti date.

Le costanti τ, ω, α hanno dimensione T^{-1} e la costante L ha dimensione L.

2) Consideriamo inoltre una densità di massa, in due casi distinti:

A) una densità di massa, la cui espressione euleriana in coordinate cartesiane è

$$\mu(t,p) = \mu_0\,\exp(-\frac{2\,t}{\tau})\,,$$

dove $\mu_0 \in \mathbb{R}^+$ è un' ulteriore costante data,

B) una densità di massa, la cui espressione euleriana in coordinate cartesiane è

$$\mu(t,p) = \mu_0\,\exp(-\frac{x(p)^2 + z(p)^2}{l^2})\,,$$

dove μ_0, $l \in \mathbb{R}^+$ sono ulteriori costanti date.

La costante μ_0 ha dimensione $\mathsf{L}^{-3}\mathsf{M}$ e la costante l ha dimensione L.

3.2 Analisi qualitativa del moto.

Prima, di proporre domande specifiche sulle grandezze generate dal moto, è opportuno farne un'analisi qualitativa che stimoli l'intuizione fisica e favorisca le successive verifiche.

Il moto C può essere decomposto in tre moti parziali più semplici:

- un moto C_{rot} di rotazione rigida uniforme attorno all'asse y ,

- un moto C_{def} di deformazione irrotazionale con espansione esponenziale lungo gli assi x e z ,

- un moto C_{tra} di traslazione con oscillazione di tipo sinusoidale lungo l'asse y .

Le espressioni in coordinate cartesiane di questi tre moti parziali sono

$$\begin{aligned}
C^x_{\mathrm{rot}}(s,t;p) &= \big(x(p)\,\cos\omega(s-t) - z(p)\,\sin\omega(s-t)\big)\,,\\
C^y_{\mathrm{rot}}(s,t;p) &= y(p)\,,\\
C^z_{\mathrm{rot}}(s,t;p) &= \big(x(p)\,\sin\omega(s-t) + z(p)\,\cos\omega(s-t)\big)\,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C^x_{\mathrm{def}}(s,t;p) &= \exp(\frac{s-t}{\tau}\,)\,x(p)\,,\\
C^y_{\mathrm{def}}(s,t;p) &= y(p)\,,\\
C^z_{\mathrm{def}}(s,t;p) &= \exp(\frac{s-t}{\tau}\,)\,z(p)\,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C^x(s,t;p) &= x(p)\,,\\
C^y(s,t;p) &= y(p) + L\,\big(\sin\alpha s - \sin\alpha t\big)\,,\\
C^z(s,t;p) &= z(p)\,.
\end{aligned}$$

In effetti, possiamo verificare facilmente che vale l'uguaglianza

$$C(s;t,p) = C\Big(s;t,C_{tra}\big(s;t,C_{\mathrm{def}}(s;t,C_{\mathrm{rot}}(s;t,p))\big)\Big)\,.$$

In altre parole, per ottenere la posizione all'istante finale s di una particella che parte dalla posizione iniziale p all'istante iniziale t , secondo il moto C , possiamo procedere in tre tappe come segue:

a) partiamo dalle posizione iniziale p all'istante iniziale t e raggiungiamo la posizione finale $C_{\mathrm{rot}}(s;t,p)$ all'istante finale s , secondo il moto C_{rot} ;

b) ripartiamo dalle nuova posizione iniziale $C_{\mathrm{rot}}(s;t,p)$ all'istante iniziale t e raggiungiamo la nuova posizione finale $C_{\mathrm{def}}\big(s;t,C_{\mathrm{rot}}(s;t,p)\big)$ all'istante finale s , secondo il moto C_{def} ;

c) ripartiamo dalle nuova posizione iniziale $C_{\mathrm{def}}\big(s;t,C_{\mathrm{rot}}(s;t,p)\big)$ all'istante iniziale t e raggiungiamo la nuova posizione finale $C\Big(s;t,C_{tra}\big(s;t,C_{\mathrm{def}}(s;t,C_{\mathrm{rot}}(s;t,p))\big)\Big)$ all'istante finale s , secondo il moto C_{def} ;

d) quest'ultima posizione finale coincide con quella che raggiungeremmo direttamente secondo il moto C .

Questi tre moti parziali non interferiscono tra loro, nel senso che possono essere composti in qualunque ordine (non solo con quello che abbiamo seguito quì sopra). Questa circostanza semplifica molto l'analisi qualitativa.

Possiamo anche verificare facilmente che il moto C è ben definito, in quanto soddisfa le necessarie identità di congruenza

$$C(t;t,p)=p \qquad \text{e} \qquad C\big(r;s,C(s;t,p)\big)=C(r;t,p)\,.$$

3.3 Domande e risposte

3.3.1 Espressione euleriana della velocità

Innanzitutto, si scrive la velocità in forma lagrangiana, calcolando la derivata prima delle tre componenti del moto rispetto al tempo finale s :

$$\begin{aligned}
(D_1C)(s;t,p) &= \frac{\partial C^x}{\partial s}(s;t,p)\,\bar e_x+\frac{\partial C^y}{\partial s}(s;t,p)\,\bar e_y+\frac{\partial C^z}{\partial s}(s;t,p)\,\bar e_z\\
&= \Big(\frac{1}{\tau}\ \exp(\frac{s-t}{\tau})\big(x(p)\ \cos\omega(s-t)-z(p)\ \sin\omega(s-t)\big)\\
&\quad+\exp(\frac{s-t}{\tau})\big(-\omega\,x(p)\ \sin\omega(s-t)-\omega z(p)\ \cos\omega(s-t)\big)\Big)\,\bar e_x\\
&\quad+(\alpha\,L\cos\alpha s)\,\bar e_y\\
&\quad+\Big(\frac{1}{\tau}\ \exp(\frac{s-t}{\tau})\big(x(p)\ \sin\omega(s-t)+z(p)\ \cos\omega(s-t)\big)\\
&\quad+\exp(\frac{s-t}{\tau})\big(\omega\,x(p)\ \cos\omega(s-t)-\omega\,z(p)\ \sin\omega(s-t)\big)\Big)\,\bar e_z\,.
\end{aligned}$$

Infine, si ottiene l'espressione euleriana ponendo $s=t$:

$$\begin{aligned}
\bar{\mathsf v}(t,p) &= (\delta C)(t,p)\\
&= \big(\frac{1}{\tau}\ x(p)-\omega\,z(p)\big)\,\bar e_x+(\alpha\,L\ \cos\alpha t)\,\bar e_y+\big(\frac{1}{\tau}\ z(p)+\omega\,x(p)\big)\,\bar e_z\,.
\end{aligned}$$

È opportuno verificare che le componenti di $\bar{\mathsf v}$ abbiano dimensione $\mathsf{T}^{-1}\,\mathsf{L}$.

Si noti che le tre componenti parziali $\bar{\mathsf v}_{\mathrm{rot}}$ e $\bar{\mathsf v}_{\mathrm{d}ef}$ della velocità risultano costanti rispetto al tempo t, mentre la componente parziale $\bar{\mathsf v}_{\mathrm{tr}a}$ della velocità risulta costante rispetto alla posizione p.

Possiamo comprendere intuitivamente l'espressione della velocità mediante la sua relazione con i tre moti parziali in cui abbiamo decomposto il moto C.

Infatti, si vede facilmente che la velocità è la somma delle tre velocità relative ai tre moti parziali C_{rot}, $C_{\mathrm{d}ef}$ e $C_{\mathrm{tr}a}$:

$$\bar{\mathsf v}=\bar{\mathsf v}_{\mathrm{rot}}+\bar{\mathsf v}_{\mathrm{d}ef}+\bar{\mathsf v}_{\mathrm{tr}a}\,,$$

dove

$$
\begin{aligned}
\bar{\mathfrak{v}}_{\mathrm{rot}}(t,p) &= \omega\,\big(-z(p)\,\bar{e}_x + x(p)\,\bar{e}_z\big)\,,\\
\bar{\mathfrak{v}}_{\mathrm{d}ef}(t,p) &= \frac{1}{\tau}\,\big(x(p)\,\bar{e}_x + z(p)\,\bar{e}_z\big)\,,\\
\bar{\mathfrak{v}}_{\mathrm{t}ra}(t,p) &= \alpha\,L\,\cos\alpha t\,\bar{e}_y\,.
\end{aligned}
$$

3.3.2 Espressione euleriana dell'accelerazione

Innanzitutto, si scrive l'accelerazione in forma lagrangiana, calcolando la derivata seconda delle tre componenti del moto rispetto al tempo finale s, ossia calcolando la derivata prima della velocità in forma lagrangiana rispetto al tempo finale s :

$$
\begin{aligned}
(D_1^2 C)(s;t,p) &= \frac{\partial^2 C^x}{\partial s^2}(s;t,p)\,\bar{e}_x + \frac{\partial^2 C^y}{\partial s^2}(s;t,p)\,\bar{e}_y + \frac{\partial^2 C^z}{\partial s^2}(s;t,p)\,\bar{e}_z\\
&= \Big(\frac{1}{\tau^2}\,\exp(\frac{s-t}{\tau})\big(x(p)\,\cos\omega(s-t) - z(p)\,\sin\omega(s-t)\big)\\
&+ \frac{1}{\tau}\,\exp(\frac{s-t}{\tau})\big(-\omega\,x(p)\,\sin\omega(s-t) - \omega\,z(p)\,\cos\omega(s-t)\big)\\
&+ \frac{1}{\tau}\,\exp(\frac{s-t}{\tau})\big(-\omega\,x(p)\,\sin\omega(s-t) - \omega\,z(p)\,\cos\omega(s-t)\big)\\
&+ \exp(\frac{s-t}{\tau})\big(-\omega^2\,x(p)\,\cos\omega(s-t) + \omega^2 z(p)\,\sin\omega(s-t)\big)\Big)\,\bar{e}_x\\
&- (\alpha^2\,L\,\sin\alpha s)\,\bar{e}_y\\
&+ \Big(\frac{1}{\tau^2}\,\exp(\frac{s-t}{\tau})\big(x(p)\,\sin\omega(s-t) + z(p)\,\cos\omega(s-t)\big)\\
&= \frac{1}{\tau^2}\,\exp(\frac{s-t}{\tau})\big(x(p)\,\sin\omega(s-t) + z(p)\,\cos\omega(s-t)\big)\\
&+ \frac{1}{\tau}\,\exp(\frac{s-t}{\tau})\big(\omega\,x(p)\,\cos\omega(s-t) - \omega\,z(p)\,\sin\omega(s-t)\big)\\
&+ \frac{1}{\tau}\,\exp(\frac{s-t}{\tau})\big(\omega\,x(p)\,\cos\omega(s-t) - \omega\,z(p)\,\sin\omega(s-t)\big)\\
&+ \exp(\frac{s-t}{\tau})\big(-\omega^2\,x(p)\,\sin\omega(s-t) - \omega^2\,z(p)\,\cos\omega(s-t)\big)\Big)\,\bar{e}_z\,.
\end{aligned}
$$

Infine, si ottiene l'espressione euleriana ponendo $s=t$:

$$
\begin{aligned}
\bar{\mathfrak{a}}(t,p) = (\delta^2 C)(t,p) &= (\delta\bar{\mathfrak{v}})(t,p)\\
&= \big(\frac{1}{\tau^2}\,x(p) - 2\,\frac{\omega}{\tau}\,z(p) - \omega^2 x(p)\big)\,\bar{e}_x\\
&- (L\,\alpha^2\sin\alpha t)\,\bar{e}_y
\end{aligned}
$$

$$+ \big(\frac{1}{\tau^2}\, z(p) + 2\frac{\omega}{\tau}\, x(p) - \omega^2 z(p)\big)\, \bar{e}_z \,.$$

Si noti che le tre componenti parziali $\bar{\mathfrak{a}}_{rot}$, $\bar{\mathfrak{v}}_{def}$ e $\bar{\mathfrak{a}}_{rotdef}$ dell'accelerazione risultano costanti rispetto al tempo t, mentre la componente parziale $\bar{\mathfrak{a}}_{tra}$ dell'accelerazione risulta costante rispetto alla posizione p.

È opportuno verificare che le componenti di $\bar{\mathfrak{a}}$ abbiano dimensione $\mathsf{T}^{-2}\,\mathsf{L}$.

Possiamo comprendere intuitivamente l'espressione dell'accelerazione mediante la sua relazione con i tre moti parziali in cui abbiamo decomposto il moto C.

Infatti, si vede facilmente che l'accelerazione è la somma delle tre accelerazioni relative ai tre moti parziali C_{rot}, C_{def} e C_{tra}, più una quarta componente mista relativa ai due moti parziali C_{rot} e C_{def} :

$$\bar{\mathfrak{a}} = \bar{\mathfrak{a}}_{rot} + \bar{\mathfrak{a}}_{def} + \bar{\mathfrak{a}}_{tra} + \bar{\mathfrak{a}}_{rotdef} \,,$$

dove

$$\begin{aligned}
\bar{\mathfrak{a}}_{rot}(t,p) &= -\omega^2 \big(x(p)\,\bar{e}_x + z(p)\,\bar{e}_z\big)\,, \\
\bar{\mathfrak{a}}_{def}(t,p) &= \frac{1}{\tau^2}\,\big(x(p)\,\bar{e}_x + z(p)\,\bar{e}_z\big)\,, \\
\bar{\mathfrak{a}}_{tra}(t,p) &= -\alpha^2\, L\, \sin\alpha t\,\bar{e}_y\,, \\
\bar{\mathfrak{a}}_{rotdef}(t,p) &= 2\,\frac{\omega}{\tau}\,\big(-z(p)\bar{e}_x + x(p)\,\bar{e}_z\big)\,.
\end{aligned}$$

Come metodo alternativo, si può anche calcolare l'accelerazione partendo dall'espressione euleriana della velocità, mediante la formula

$$\bar{\mathfrak{a}} = \delta\bar{\mathfrak{v}} = \partial_0\bar{\mathfrak{v}} + \overset{\vee}{D}\bar{\mathfrak{v}}(\bar{\mathfrak{v}})\,.$$

Per controllo, potremmo verificare questa ugaglianza dopo aver calcolato $\partial_0\bar{\mathfrak{v}}$ e $\overset{\vee}{D}\bar{\mathfrak{v}}(t,p)$, (vedi punto 13).

3.3.3 Operatore jacobiano

Naturalmente, si calcola questa matrice solo in forma lagrangiana, perché la sua espressione euleriana è la matrice identità e questo è vero per tutti i moti continui. Pertanto, la matrice jacobiana in forma euleriana non contiene nessuna informazione sul moto specifico.

Dunque, si scrive la matrice jacobiana calcolando le derivate parziali delle componenti del moto C rispetto alle coordinate spaziali x , y e z :

$$(J^i_j)(s;t,p) = (\overset{\vee}{D}C)(s;t,p) =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial C^x}{\partial x} & \frac{\partial C^x}{\partial y} & \frac{\partial C^x}{\partial z} \\ \frac{\partial C^y}{\partial x} & \frac{\partial C^y}{\partial y} & \frac{\partial C^y}{\partial z} \\ \frac{\partial C^z}{\partial x} & \frac{\partial C^z}{\partial y} & \frac{\partial C^z}{\partial z} \end{pmatrix} (s;t,p)$$

$$= \begin{pmatrix} \exp(\frac{s-t}{\tau}) \cos\omega(s-t) & 0 & -\exp(\frac{s-t}{\tau}) \sin\omega(s-t) \\ 0 & 1 & 0 \\ \exp(\frac{s-t}{\tau}) \sin\omega(s-t) & 0 & \exp(\frac{s-t}{\tau}) \cos\omega(s-t) \end{pmatrix} .$$

Si noti che questa matrice dipende dal tempo iniziale t e dal tempo finale s , ma di fatto è costante rispetto alla posizione iniziale p ; questa è una proprietà specifica di questo moto continuo. Quindi, per questo moto continuo, possiamo scrivere l'espressione semplificata

$$(J^i_j)(s;t) = (\overset{\vee}{D}C)(s;t) \,.$$

Possiamo verificare le seguenti identità (che sono una conseguenza diretta delle condizioni di congruenza del moto):

$$(\widehat{J})(t;t) = (\widehat{\mathrm{id}}) \,, \qquad (\widehat{J})(r;s) \circ (\widehat{J})(s;t) = (\widehat{J})(r;t) \,,$$
$$\big((\widehat{J})(s;t)\big)^{-1} = (\widehat{J})(t;s) \,.$$

Nel caso generale, per scrivere la composizione di matrici nella seconda identità e l'inversione della matrice nella terza identità occorre tener conto in modo opportuno anche della posizione iniziale; ma in questo caso abbiamo formule più semplici perché la matrice jacobiana è costante rispetto alla posizione iniziale.

È opportuno verificare che le componenti della matrice $(\widehat{J})$ siano adimensionali.

Possiamo interpretare fisicamente l'operatore jacobiano come segue:

a) si considerino due particelle all'istante iniziale t , le quali occupano rispettivamente la posizione iniziale p e la posizione iniziale $p + \bar{h}$;

b) allora, l'operatore jacobiano $\widehat{J}(s;t,p)$ trasforma il vettore di separazione iniziale $\bar{h}$ delle due particelle all'istante iniziale t nel vettore di separazione finale $\widehat{J}(s;t,p)(\bar{h})$ all'istante finale s (secondo la trasformazione dovuta all'approssimazione lineare del moto C).

Dopo aver risposto alla domanda successiva potremo analizzare l'operatore jacobiano mediante i moti parziali di deformazione C_{def} , di rotazione C_{rot} e di traslazione C_{tra} .

3.3.4 Operatore delle deformazioni lineari ed operatore delle rotazioni

Il metodo generale per calcolare queste matrici $\widehat{\mathcal{D}}(s;t,p)$ e $\widehat{\mathcal{R}}(s;t,p)$ consisterebbe nelle sguenti tappe:

a) innanzitutto, occorrerebbe calcolare il tensore delle deformazioni finite

$$\underset{\sim}{\mathcal{G}}(s;t,p) = g\big(\widehat{J}(s;t,p)\,,\ \widehat{J}(s;t,p)\big)\,;$$

b) poi, occorrerebbe calcolare gli autovalori e gli autovettori dell'operatore lineare $\widehat{\mathcal{G}}(s;t,p)$; gli autovalori saranno tre numeri positivi, perché $\underset{\sim}{\mathcal{G}}(s;t,p)$ è definito positivo;

c) allora, si potrebbe ottenere la matrice di $\widehat{\mathcal{D}}(s;t,p)$ nella base degli autovettori di $\widehat{\mathcal{G}}(s;t,p)$ scrivendo la matrice diagonale costituita dalle radici quadrate degli autovalori di $\widehat{\mathcal{G}}(s;t,p)$;

d) per calcolare poi la matrice di $\widehat{\mathcal{D}}(s;t,p)$ nella base originale $(\bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{e}_z)$ occorrerebbe fare un cambiamento di base; qQuesto calcolo concluderebbe la risposta alla prima domanda;

e) poi, occorrerebbe calcolare la matrice inversa $\widehat{\mathcal{D}}^{-1}(s;t,p)$; questa potrebbe essere ottenuta facilmente nella base degli autovalori di $\widehat{\mathcal{G}}(s;t,p)$ prendendo la matrice diagonale costituita dagli inversi degli autovalori di $\widehat{\mathcal{G}}(s;t,p)$;

f) per calcolare poi la matrice di $\widehat{\mathcal{D}}^{-1}(s;t,p)$ nella base originale $(\bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{e}_z)$ occorrerebbe fare un cambiamento di base;

g) infine, otterremmo la matrice di $\widehat{\mathcal{R}}(s;t,p)$ mediante la formula

$$\widehat{\mathcal{R}}(s;t,p) = \widehat{J}(s;t,p) \circ \widehat{\mathcal{D}}^{-1}(s;t,p)\,.$$

Come si vede, tutto questo calcolo, pur non essendo molto difficile, sarebbe però piuttosto lungo.

Nei compiti d'esame difficilmente sarà richiesto di effettuare un calcolo così lungo, ma saranno assegnati esercizi con domande che richiedano un calcolo abbastanza veloce.

In effetti, per il moto continuo C , in seguito all'analisi qualitativa che abbiamo effettuato all'inizio, si vede facilmente quanto segue:

a) la matrice dell'operatore jacobiano del moto parziale C_{def} è

$$(J_{\mathrm{def}})^i_j(s;t,p) = \begin{pmatrix} \exp(\frac{s-t}{\tau}) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \exp(\frac{s-t}{\tau}) \end{pmatrix},$$

b) la matrice dell'operatore jacobiano del moto parziale $C_{\rm rot}$ è

$$(J_{\rm rot})^i_j(s;t,p) = \begin{pmatrix} \cos\omega(s-t) & 0 & -\sin\omega(s-t) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\omega(s-t) & 0 & \cos\omega(s-t) \end{pmatrix},$$

c) la matrice dell'operatore jacobiano del moto parziale C_{tra} è

$$(J_{tra})^i_j(s;t,p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

d) il prodotto righe per colonne delle precedenti matrici jacobiane dei tre moti parziali coincide con la matrice jacobiana del moto C,

$$(\widehat{J}) = (\widehat{J}_{tra})\,(\widehat{J}_{\rm rot})\,(\widehat{J}_{{\rm d}ef}),$$

e) inoltre,
- l'operatore $(\widehat{J}_{{\rm d}ef})$ è simmetrico e definito positivo,
- l'operatore $(\widehat{J}_{\rm rot})$ è ortogonale,
- l'operatore $(\widehat{J}_{tra})$ è l'identità.

Allora, dato che l'operatore $\widehat{J}$ si decompone in uno ed in solo modo come prodotto

$$\widehat{J} = \widehat{\mathcal{R}} \circ \widehat{\mathcal{D}},$$

dove $\widehat{\mathcal{D}}$ è un operatore simmetrico e definito positivo e $\widehat{\mathcal{R}}$ è un operatore ortogonale, ne deduciamo che

$$\widehat{\mathcal{D}} = \widehat{J}_{{\rm d}ef} \qquad \text{e} \qquad \widehat{\mathcal{R}} = \widehat{J}_{\rm rot}.$$

Dunque, in definitiva, abbiamo dimostrato che la matrice di $\widehat{\mathcal{D}}(s;t,p)$ è

$$(\mathcal{D}^i_j)(s;t,p) = \begin{pmatrix} \exp(\frac{s-t}{\tau}) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \exp(\frac{s-t}{\tau}) \end{pmatrix}.$$

e che la matrice di $\widehat{\mathcal{R}}(s;t,p)$ è

$$(\mathcal{R}^i_j)(s;t,p) = \begin{pmatrix} \cos\omega(s-t) & 0 & -\sin\omega(s-t) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\omega(s-t) & 0 & \cos\omega(s-t) \end{pmatrix}.$$

Si noti che queste matrici dipendono dal tempo iniziale t e dal tempo finale s, ma di fatto sono costanti rispetto alla posizione iniziale p; questa è una proprietà specifica di questo moto continuo ed è una conseguenza del fatto che la matrice jacobiana non dipende dalla posizione iniziale.

La relazione che abbiamo quì analizzato tra l'operatore $\widehat{\mathcal{D}}$ del moto C e lo jacobiano $\widehat{J}_{\mathrm{def}}$ del moto parziale C_{def} e tra l'operatore $\widehat{\mathcal{R}}$ del moto C e lo jacobiano $\widehat{J}_{\mathrm{rot}}$ del moto parziale C_{rot} illustrano il significato fisico degli operatori $\widehat{\mathcal{D}}$ e $\widehat{\mathcal{R}}$.

3.3.5 Determinante dell'operatore jacobiano

Il determinante dell'operatore jacobiano è

$$\det(J^i_j)(s;t,p) = \exp(2\,\frac{s-t}{\tau}\,).$$

Per controllo, è opportuno verificare che questa funzione abbia valori positivi.

Inoltre, è opportuno verificare che

$$\det(J^i_j)(s;t,p) = \det(\mathcal{D}^i_j)(s;t,p) \qquad \text{e} \qquad \det(\mathcal{R}^i_j)(s;t,p) = 1\,.$$

Queste identità derivano dalle proprietà algebriche di $\widehat{\mathcal{D}}(s;t,p)$ e di $\widehat{\mathcal{R}}(s;t,p)$.

È opportuno verificare che $\det(\widehat{J})$ sia adimensionale.

Possiamo interpretare fisicamente il determinante dello jacobiano come segue:

a) il determinante $\det \widehat{J}(s;t,p)$ esprime il rapporto tra il volume infinitesimo trasformato al tempo finale s ed il volume infinitesimo iniziale al tempo iniziale t per una particella che occupa la posizione iniziale p (secondo la trasformazione dovuta all'approssimazione lineare del moto C),

b) la variazione di volume tra l'istante iniziale e l'istante finale dipende solo dalla componente di deformazione C_{def} del moto e non dalle componenti di rotazione C_{rot} e di traslazione C_{tra}, che lasciano il volume invariato.

3.3.6 Derivata temporale dello jacobiano e derivata spaziale della velocità

a) Calcoliamo la matrice della derivata totale rispetto al tempo dell'operatore jacobiano, espressa in forma euleriana, ossia la matrice di $(\delta\widehat{J})(t,p)$.

Innanzitutto, si scrive la matrice $(D_1 J^i_j)(s;t,p)$ in forma lagrangiana, calcolando la derivata parziale della matrice $(J^i_j)(s;t,p)$ rispetto al tempo finale s :

$$(D_1 J^i_j)(s;t,p) = \big(\frac{\partial J^i_j}{\partial s}\big)(s;t,p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial J^x_x}{\partial s} & \frac{\partial J^x_y}{\partial s} & \frac{\partial J^x_z}{\partial s} \\ \frac{\partial J^y_x}{\partial s} & \frac{\partial J^y_y}{\partial s} & \frac{\partial J^y_z}{\partial s} \\ \frac{\partial J^z_x}{\partial s} & \frac{\partial J^z_y}{\partial s} & \frac{\partial J^z_z}{\partial s} \end{pmatrix}(s;t,p) =$$

$$\begin{pmatrix} e^{\frac{s-t}{\tau}}\,\big(\frac{1}{\tau}\,\cos\omega(s-t) - \omega\,\sin\omega(s-t)\big) & 0 & -e^{\frac{s-t}{\tau}}\,\big(\frac{1}{\tau}\,\sin\omega(s-t) + \omega\,\cos\omega(s-t)\big) \\ 0 & 0 & 0 \\ e^{\frac{s-t}{\tau}}\,\big(\frac{1}{\tau}\,\sin\omega(s-t) + \omega\,\cos\omega(s-t)\big) & 0 & e^{\frac{s-t}{\tau}}\,\big(\frac{1}{\tau}\,\cos\omega(s-t) - \omega\,\sin\omega(s-t)\big) \end{pmatrix}$$

Poi, si ottiene l'espressione euleriana, ponendo $s = t$,

$$(\delta J^i_j)(t,p) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\tau} & 0 & -\omega \\ 0 & 0 & 0 \\ \omega & 0 & \frac{1}{\tau} \end{pmatrix} .$$

Di fatto, questa matrice non dipende né dal tempo iniziale t , né dalla posizione iniziale p , ossia è costante.

È opportuno verificare che le componenti della matrice $(\delta\widehat{J})$ abbiano dimensione T^{-1} .

L'operatore $\delta\widehat{J}$ descrive la velocità di variazione del vettore di separazione tra le particelle (nell'approssimazione lineare del moto).

b) Calcoliamo la matrice della derivata parziale spaziale della velocità euleriana, ossia la matrice di $(\overset{\vee}{D}\bar{\mathrm{v}})(t,p)$.

Si scrive la matrice $(\overset{\vee}{D}\bar{\mathrm{v}}^i_j)(t,p)$ direttamente in forma euleriana, calcolando le derivate parziali delle componenti di $\bar{\mathrm{v}}(t,p)$ rispetto alle coordinate spaziali x , y e z :

$$(\overset{\vee}{D}\bar{\mathrm{v}})^i_j(t,p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathrm{v}^x}{\partial x} & \frac{\partial \mathrm{v}^x}{\partial y} & \frac{\partial \mathrm{v}^x}{\partial y} \\ \frac{\partial \mathrm{v}^y}{\partial x} & \frac{\partial \mathrm{v}^y}{\partial y} & \frac{\partial \mathrm{v}^y}{\partial y} \\ \frac{\partial \mathrm{v}^z}{\partial x} & \frac{\partial \mathrm{v}^z}{\partial y} & \frac{\partial \mathrm{v}^z}{\partial y} \end{pmatrix}(t,p) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\tau} & 0 & -\omega \\ 0 & 0 & 0 \\ \omega & 0 & \frac{1}{\tau} \end{pmatrix} .$$

Di fatto, questa matrice non dipende né dal tempo iniziale t , né dalla posizione iniziale p , ossia è costante.

È opportuno verificare che le componenti della matrice $(\overset{\vee}{D}\bar{\mathbf{v}})$ abbiano dimensione T^{-1}.

Osserviamo che, secondo le nostre convenzioni, la matrice $(\overset{\vee}{D}\bar{\mathbf{v}})^i_j$ dell'operatore linerare $\overset{\vee}{D}\bar{\mathbf{v}}$ e la matrice $(\overset{\vee}{D}\underline{\mathbf{v}})_{ij}$ della forma bilineare associata $\overset{\vee}{D}\underline{\mathbf{v}}$ sono

$$(\overset{\vee}{D}\bar{\mathbf{v}})^i_j = (\frac{\partial \mathbf{v}^i}{\partial x^j}) \qquad \text{e} \qquad (\overset{\vee}{D}\underline{\mathbf{v}})_{ij} = (\frac{\partial \mathbf{v}_j}{\partial x^i}) .$$

Infatti, secondo le nostre convenzioni, l'indice in alto e l'indice in basso di $(\overset{\vee}{D}\bar{\mathbf{v}})^i_j$ si riferiscono, nell'ordine, alla componente della velocità di cui si calcola la derivata parziale ed alla coordinata rispetto alla quale si calcola la derivata parziale; invece, il primo ed il secondo indice di $(\overset{\vee}{D}\underline{\mathbf{v}})_{ij}$ si riferiscono, nell'ordine, alla coordinata rispetto a cui si calcola la derivata parziale ed alla componente della velocità di cui si calcola la derivata parziale.

Quindi, se conveniamo che gli indici i e j della matrice $(\overset{\vee}{D}\bar{\mathbf{v}})^i_j$ e gli indici i e j della matrice $(\overset{\vee}{D}\underline{\mathbf{v}})_{ij}$ indichino, rispettivamente, le righe e le colonne, allora le due matrici sono l'una la trasposta dell'altra.

La matrice $(\overset{\vee}{D}\bar{\mathbf{v}})^i_j$ descrive la derivata spaziale delle componenti della velocità lungo gli assi x, y e z.

c) Sappiamo che le due matrici $(\delta J^i_j)(t,p)$ e $(\overset{\vee}{D}\bar{\mathbf{v}}^i_j)(t,p)$ sono uguali per il teorema di Schwarz:

$$\delta \widehat{J} \equiv \delta \overset{\vee}{D} C = \overset{\vee}{D} \delta C \equiv \overset{\vee}{D}\bar{\mathbf{v}} .$$

Per controllo, verifichiamo immediatamente che le matrici trovate in a) e b) sono effettivamente uguali.

3.3.7 Tensore delle deformazioni infinitesime

a) Si scrive la matrice del tensore delle deformazioni infinitesime simmetrizzando la matrice $(\overset{\vee}{D}\bar{\mathbf{v}})^i_j(t,p)$:

$$(\epsilon^i_j)(t,p) =$$

$$= \frac{1}{2}\,(\frac{\partial \mathbf{v}^i}{\partial x^j} + \frac{\partial \mathbf{v}^j}{\partial x^i})(t,p) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{v}^x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{v}^x}{\partial x} & \frac{\partial \mathbf{v}^x}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{v}^y}{\partial x} & \frac{\partial \mathbf{v}^x}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{v}^z}{\partial x} \\ \frac{\partial \mathbf{v}^y}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{v}^x}{\partial y} & \frac{\partial \mathbf{v}^y}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{v}^y}{\partial y} & \frac{\partial \mathbf{v}^y}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{v}^z}{\partial y} \\ \frac{\partial \mathbf{v}^z}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{v}^x}{\partial z} & \frac{\partial \mathbf{v}^z}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{v}^y}{\partial z} & \frac{\partial \mathbf{v}^z}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{v}^z}{\partial z} \end{pmatrix}(t,p)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\tau} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\tau} \end{pmatrix} .$$

Di fatto, questa matrice non dipende né dal tempo iniziale t, né dalla posizione iniziale p, ossia è costante.

È opportuno verificare che le componenti della matrice (ϵ^i_j) abbiano dimensione T^{-1}.

b) Possiamo anche calcolare la matrice $(\delta\mathcal{D}^i_j)(t,p)$.

Innanzitutto, si scrive la matrice $(D_1\mathcal{D}^i_j)(s;t,p)$ in forma lagrangiana, calcolando la derivata parziale della matrice $(\mathcal{D}^i_j)(s;t,p)$ rispetto al tempo finale s :

$$(D_1\mathcal{D}^i_j)(s,t,p) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\tau}\exp(\frac{s-t}{\tau}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\tau}\exp(\frac{s-t}{\tau}) \end{pmatrix}.$$

Di fatto, questa matrice non dipende dalla posizione iniziale p.

Poi, si ottiene l'espressione euleriana di questa matrice ponendo $s = t$:

$$(\delta\mathcal{D}^i_j)(t,p) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\tau} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\tau} \end{pmatrix}.$$

Di fatto, questa matrice non dipende né dal tempo iniziale t, né dalla posizione iniziale p, ossia è costante.

È opportuno verificare che le componenti della matrice $(\delta\widehat{\mathcal{D}})$ abbiano dimensione T^{-1}.

Si vede facilmente che solo la componente di deformazione C_{def} del moto C contribuisce a questo tensore.

L'operatore $\delta\widehat{\mathcal{D}}$ descrive la velocità di variazione rispetto al tempo dell'operatore di deformazione lineare, seguendo il moto di una particella.

c) Infine, verifichiamo che le matrici trovate in a) ed in b) coincidano, in accordo alle identità:

$$\widehat{\epsilon} = \mathrm{Sim}(\overset{\vee}{D}\bar{\mathbf{v}}) = \mathrm{Sim}(\delta\widehat{J}) = \delta\widehat{\mathcal{D}}.$$

3.3.8 Tensore delle rotazioni infinitesime

a) Si scrive la matrice del tensore delle rotazioni infinitesime antisimmetrizzando la matrice $(\overset{\vee}{D}\bar{\mathbf{v}})^i_j(t,p)$:

$$(\omega^i_j)(t,p) =$$

$$= \frac{1}{2}\,(\frac{\partial \mathrm{v}^i}{\partial x^j} - \frac{\partial \mathrm{v}^j}{\partial x^i})(t,p) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{\partial \mathrm{v}^x}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{v}^x}{\partial x} & \frac{\partial \mathrm{v}^x}{\partial y} - \frac{\partial \mathrm{v}^y}{\partial x} & \frac{\partial \mathrm{v}^x}{\partial z} - \frac{\partial \mathrm{v}^z}{\partial x} \\ \frac{\partial \mathrm{v}^y}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{v}^x}{\partial y} & \frac{\partial \mathrm{v}^y}{\partial y} - \frac{\partial \mathrm{v}^y}{\partial y} & \frac{\partial \mathrm{v}^y}{\partial z} - \frac{\partial \mathrm{v}^z}{\partial y} \\ \frac{\partial \mathrm{v}^z}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{v}^x}{\partial z} & \frac{\partial \mathrm{v}^z}{\partial y} - \frac{\partial \mathrm{v}^y}{\partial z} & \frac{\partial \mathrm{v}^z}{\partial z} - \frac{\partial \mathrm{v}^z}{\partial z} \end{pmatrix}(t,p)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\omega \\ 0 & 0 & 0 \\ \omega & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Di fatto, questa matrice non dipende né dal tempo iniziale t, né dalla posizione iniziale p, ossia è costante.

È opportuno verificare che le componenti della matrice $(\widehat{\omega})$ abbiano dimensione T^{-1}.

Osserviamo che, secondo le nostre convenzioni, le matrici dell'operatore linerare (ω^i_j) e della forma bilineare (ω_{ij}) associata sono

$$(\omega^i_j) = \tfrac{1}{2}\,(\frac{\partial \mathrm{v}^i}{\partial x^j} - \frac{\partial \mathrm{v}^j}{\partial x^i}) \qquad \text{e} \qquad (\omega_{ij}) = \tfrac{1}{2}\,(\frac{\partial \mathrm{v}_j}{\partial x^i} - \frac{\partial \mathrm{v}_i}{\partial x^j}).$$

Quindi, se conveniamo che gli indici i e j della matrice (ω^i_j) e gli indici i e j della matrice (ω_{ij}) indichino, rispettivamente, le righe e le colonne, allora le due matrici sono l'una la trasposta dell'altra.

b) Possiamo anche calcolare la matrice $(\delta\mathcal{R}^i_j)(t,p)$.

Innanzitutto, si scrive la matrice $(D_1\mathcal{R}^i_j)(s;t,p)$ in forma lagrangiana, calcolando la derivata parziale della matrice $(\mathcal{R}^i_j)(s;t,p)$ rispetto al tempo finale s :

$$(D_1\mathcal{R}^i_j)(s,t,p) = \begin{pmatrix} -\omega\,\sin\omega(s-t) & 0 & -\omega\,\cos\omega(s-t) \\ 0 & 0 & 0 \\ \omega\,\cos\omega(s-t) & 0 & -\omega\,\sin\omega(s-t) \end{pmatrix}.$$

Di fatto, questa matrice non dipende dalla posizione iniziale p.

Poi, si ottiene l'espressione euleriana di questa matrice ponendo $s=t$:

$$(\delta\mathcal{R}^i_j)(t,p) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\omega \\ 0 & 0 & 0 \\ \omega & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Di fatto, questa matrice non dipende né dal tempo iniziale t, né dalla posizione iniziale p, ossia è costante.

È opportuno verificare che le componenti della matrice $(\delta\widehat{\mathcal{R}})$ abbiano dimensione T^{-1}.

Si vede facilmente che solo la componente di rotazione C_{rot} del moto C contribuisce a questo tensore.

L'operatore $\delta\widehat{\mathcal{R}}$ descrive la velocità di variazione rispetto al tempo dell'operatore di rotazione, seguendo il moto di una particella.

c) Infine, verifichiamo immediatamente che le matrici trovate in a) ed in b) coincidano, in accordo alle identità:

$$\widehat{\omega} = \operatorname{Ant}(\overset{\vee}{D}\bar{v}) = \operatorname{Ant}(\delta\widehat{J}) = \delta\widehat{\mathcal{R}}\,.$$

3.3.9 Divergenza della velocità

a) Si scrive la divergenza della velocità (in forma euleriana) sommando le derivate parziali delle componenti della velocità rispetto alle coordinate spaziali omonime:

$$\begin{aligned}(\operatorname{div}\bar{v})(t,p) &= (\frac{\partial v^x}{\partial x} + \frac{\partial v^y}{\partial y} + \frac{\partial v^z}{\partial z})(t,p)\\ &= \frac{2}{\tau}\,.\end{aligned}$$

Di fatto, questa funzione non dipende né dal tempo iniziale t, né dalla posizione iniziale p, ossia è costante.

È opportuno verificare che la divergenza della velocità abbia dimensione T^{-1}.

Si vede facilmente che solo la componente di deformazione C_{def} del moto C contribuisce a questa funzione.

b) Possiamo anche calcolare la traccia del tensore delle deformazioni infinitesime, sommando gli elementi diagonali:

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}\widehat{\epsilon} &= \epsilon^1_1 + \epsilon^2_2 + \epsilon^3_3\\ &= \frac{2}{\tau}\,.\end{aligned}$$

Di fatto, questa funzione non dipende né dal tempo iniziale t, né dalla posizione iniziale p, ossia è costante.

Si vede facilmente che solo la componente di deformazione C_{def} del moto C contribuisce a questa funzione.

Tenendo conto del significato fisico del tensore delle deformazioni infinitesime, la traccia del tensore delle deformazioni infinitesime esprime fisicamente la somma della velocità di variazione delle lunghezze infinitesime al variare del tempo nelle tre direzioni degli assi coordinati per ciascuna particella.

c) Possiamo anche calcolare la derivata totale rispetto al tempo del determinante dell'operatore jacobiano.

Innanzitutto, si scrive la funzione $(D_1 \det(J^i_j))(s;t,p)$ in forma lagrangiana, calcolando la derivata del determinante dell'operatore jacobiano rispetto al tempo finale s :

$$(D_1 \det(J^i_j))(s;t,p) = \frac{2}{\tau} \exp(2 \, \frac{s-t}{\tau}) \,.$$

Infine, si ottiene l'espressione euleriana ponendo $s = t$:

$$\delta \det(J^i_j)(t,p) = \frac{2}{\tau} \;.$$

Di fatto, questa funzione non dipende né dal tempo iniziale t, né dalla posizione iniziale p, ossia è costante.

È opportuno verificare che la derivata totale rispetto al tempo del determinante dell'operatore jacobiano abbia dimensione T^{-1}.

Si vede facilmente che solo la componente di deformazione C_{def} del moto C contribuisce a questa funzione.

La derivata totale rispetto al tempo del determinante dell'operatore jacobiano esprime fisicamente la velocità di variazione del rapporto tra il volume finale ed il volume iniziale, seguendo il moto di una particella.

d) Infine, possiamo verificare che le tre funzioni calcolate nei tre punti precedenti coincidono, in accordo all'identità:

$$\operatorname{div} \bar{\mathrm{v}} = \operatorname{tr}(\overset{\vee}{D}\bar{\mathrm{v}}) = \operatorname{tr} \widehat{\epsilon} = \delta \det \widehat{J} = \delta \det \widehat{\mathcal{D}} \,.$$

Questa identità mostra la relazione tra i vari aspetti del significato fisico della divergenza della velocità. Scriviamo la velocità angolare calcolando un mezzo del rotore della velocità in forma euleriana, mediante il determinante formale, sviluppandolo secondo la prima riga:

$$\begin{aligned}
\bar{\Omega}(t,p) = \tfrac{1}{2}\,(\operatorname{rot}\bar{\mathrm{v}})(t,p) &= \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} \bar{e}_x & \bar{e}_y & \bar{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \mathrm{v}^x & \mathrm{v}^y & \mathrm{v}^z \end{pmatrix} (t,p) \\
= \tfrac{1}{2}\big((\frac{\partial \mathrm{v}^z}{\partial y} - \frac{\partial \mathrm{v}^y}{\partial z})\,\bar{e}_x &- (\frac{\partial \mathrm{v}^z}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{v}^x}{\partial z})\,\bar{e}_y + (\frac{\partial \mathrm{v}^y}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{v}^x}{\partial y})\,\bar{e}_x\big) \\
&= 0\,\bar{e}_x - \omega\,\bar{e}_y + 0\,\bar{e}_z \\
&= -\omega\,\bar{e}_y \,.
\end{aligned}$$

Di fatto, questo vettore non dipende né dal tempo iniziale t, né dalla posizione iniziale p, ossia è costante.

È opportuno verificare che la velocità angolare abbia dimensione T^{-1}.

Si vede facilmente che solo la componente di rotazione C_{rot} del moto C contribuisce a questo vettore.

La velocità angolare così trovata è in accordo con il fatto che C è un moto la cui componente di rotazione C_{rot} è una rotazione rigida uniforme intorno all'asse delle y. Scriviamo la derivata parziale rispetto al tempo della velocità (in forma euleriana) calcolando la derivata parziale della velocità in forma euleriana rispetto al tempo t :

$$\begin{aligned}(\partial_0\bar{v})(t,p) &= \frac{\partial v^x}{\partial t}(t,p)\,\bar{e}_x + \frac{\partial v^y}{\partial t}(t,p)\,\bar{e}_y + \frac{\partial v^z}{\partial t}(t,p)\,\bar{e}_z \\ &= 0\,\bar{e}_x - \alpha^2 L\,\sin\alpha t\,\bar{e}_y + 0\,\bar{e}_z \\ &= -\alpha^2 L\,\sin\alpha t\,\bar{e}_y\,.\end{aligned}$$

Di fatto, questo vettore dipende solo dal tempo t (con una legge di tipo sinusoidale) ed è costante rispetto alla posizione p.

Si vede facilmente che solo la componente di traslazione C_{tra} del moto C contribuisce a questo vettore.

Dunque, se ci mettiamo in una posizione fissa p ed osserviamo come varia nel tempo la velocità delle particelle che via via raggiungono tale posizione p ai vari istanti, troviamo che le componenti della velocità lungo gli assi x e z sono costanti nel tempo, mentre la componente della velocità lungo l'asse y varia con una legge sinusoidale.

Inoltre, questo risultato è lo stesso in tutte le posizioni p.

Come abbiamo detto, la velocità così osservata in istanti diversi nella stessa posizione è relativa alle diverse particelle che raggiungono tale posizione ad istanti diversi (conformemente ad un'osservazione di tipo euleriano).

Invece, la velocità di una stessa particella, dopo che ha lasciato la posizione p, varia, allo scorrere del tempo, con un'altra legge (che corrisponde ad un'osservazione di tipo lagrangiano).

3.3.10 Accelerazione calcolata con il metodo euleriano

Ora, siamo in grado di calcolare l'accelerazione con un metodo alternativo, partendo dalla velocità in forma euleriana, invece che in forma lagrangiana (come avevamo fatto nel punto 2).

Infatti possiamo applicare la formula

$$\bar{a} = \partial_0\bar{v} + \overset{\vee}{D}\bar{v}(\bar{v})\,.$$

Dunque, abbiamo

$$\begin{pmatrix} a^x \\ a^y \\ a^z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v^x}{\partial t} \\ \frac{\partial v^y}{\partial t} \\ \frac{\partial v^z}{\partial t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial v^x}{\partial x} & \frac{\partial v^x}{\partial y} & \frac{\partial v^x}{\partial z} \\ \frac{\partial v^y}{\partial x} & \frac{\partial v^y}{\partial y} & \frac{\partial v^y}{\partial z} \\ \frac{\partial v^z}{\partial x} & \frac{\partial v^z}{\partial y} & \frac{\partial v^z}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^x \\ v^y \\ v^z \end{pmatrix},$$

cioè

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{a}^x \\ \mathfrak{a}^y \\ \mathfrak{a}^z \end{pmatrix}(t,p) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\alpha^2\, L \sin\alpha t \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{\tau} & 0 & -\omega \\ 0 & 0 & 0 \\ \omega & 0 & \frac{1}{\tau} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\tau}\, x(p) - \omega\, z(p) \\ \alpha\, L\, \cos\alpha t \\ \frac{1}{\tau}\, z(p) + \omega\, x(p) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\tau^2}\, x(p) - 2\,\frac{1}{\tau}\,\omega\, z(p) - \omega^2\, x(p) \\ -\alpha^2\, L \sin\alpha t \\ \frac{1}{\tau^2}\, z(p) + 2\,\frac{1}{\tau}\,\omega\, x(p) - \omega^2\, z(p) \end{pmatrix}.$$

Come si vede, tale risultato coincide con quello trovato al punto 2).

Secondo il metodo usato quì sopra, per calcolare l'accelerazione di una particella non basta calcolare la derivata parziale della velocità rispetto al tempo in una posizione fissata, ma occorre aggiungere la variazione della velocità da una posizione all'altra nella direzione della velocità stessa.

3.3.11 Proprietà del moto

a) Il moto non è *traslatorio* perché l'operatore jacobiano non è l'identità.

Infatti, il vettore di separazione tra coppie di particelle dipende effettivamente dal tempo.

Sono responsabili di questo fatto la componente di deformazione C_{def} e la componente di rotazione C_{rot} del moto C.

b) Il moto C non è *stazionario* perché la velocità in forma euleriana dipende dal tempo. Equivalentemente, il moto non è *stazionario* perché l'espressione del moto non dipende dalla differenza $s - t$, ma da s e t separatamente.

Infatti, la velocità delle particelle che toccano una certa posizione dipende dal tempo e lo spostamento di una particella non dipende solo dalla posizione iniziale e dal tempo trascorso, ma anche (separatamente) dal tempo iniziale.

È responsabile di questo fatto la componente di traslazione C_{tra} del moto C.

c) Il moto C non è *irrotazionale*, perché l'operatore di rotazione $\widehat{\mathcal{R}}$ non è l'identità.

Equivalentemente, il moto C non è *irrotazionale*, perché il tensore delle rotazioni infinitesime $\widehat{\omega}$ e quindi la velocità angolare Ω non sono nulli.

È responsabile di questo fatto la componente di rotazione C_{rot} del moto C.

d) Il moto C non è *rigido*, perché l'operatore di deformazione lineare $\widehat{\mathcal{D}}$ non è l'identità.

Equivalentemente, il moto C non è *rigido*, perché il tensore delle deformazioni infinitesime $\widehat{\epsilon}$ non è nullo.

È responsabile di questo fatto la componente di deformazione C_{def} del moto C.

e) Il moto C è *affine* perché l'operatore jacobiano $\widehat{J}$ è costante rispetto alla posizione iniziale p. Conseguentemente, anche l'operatore delle rotazioni $\widehat{\mathcal{R}}$, l'operatore delle deformazioni lineari $\widehat{\mathcal{D}}$, l'operatore delle rotazioni infinitesime $\widehat{\omega}$, la velocità angolare $\bar{\Omega}$ e l'operatore delle deformazioni infinitesime $\widehat{\epsilon}$ sono costanti rispetto alla posizione iniziale p.

Questo fatto significa che il vettore di separazione tra le particelle varia solo al variare del tempo iniziale t e del tempo finale s, ma non della posizione iniziale p.

3.3.12 Derivata spaziale della densità di massa

La derivata spaziale della densità di massa è la 1–forma differenziale, le cui componenti sono le derivate parziali della densità di massa rispetto alle coordinate spaziali x, y e z :

$$(\overset{\vee}{D}\mu)(t,p) = \frac{\partial \mu}{\partial x}(t,p)\, Dx + \frac{\partial \mu}{\partial y}(t,p)\, Dy + \frac{\partial \mu}{\partial z}(t,p)\, Dz\,.$$

Perciò, abbiamo i seguenti risultati.
Caso A). Abbiamo

$$\overset{\vee}{D}\mu = 0\,.$$

Caso B). Abbiamo

$$\begin{aligned}\overset{\vee}{D}\mu(t,p) &= -\,2\,\frac{x(p)}{l^2}\;\mu_0\;\exp(-\frac{(x(p)^2+z(p)^2}{l^2})\, Dx - 2\,\frac{z(p)}{l^2}\;\mu_0\;\exp(-\frac{(x(p)^2+z(p)^2}{l^2})\, Dz \\ &= -\,2\,\frac{\mu}{l^2}\big(x(p)\, Dx + z(p)\, Dz\big)\,.\end{aligned}$$

È opportuno verificare che le componenti della forma $\overset{\vee}{D}\mu$ abbiano dimensione $\mathsf{L}^{-4}\,\mathsf{M}$.

Dunque, ad un istante fissato, nel caso A) la densità di massa è la stessa per tutte le particelle, mentre, nel caso B) varia nelle direzioni degli assi x e z con una legge di prorzionalità rispetto a tali coordinate.

3.3.13 Derivata parziale rispetto al tempo della densità di massa

La derivata parziale rispetto al tempo della densità di massa è la funzione

$$(\partial_0\mu)(t,p) = \frac{\partial \mu}{\partial t}(t,p)\,.$$

Perciò, abbiamo i seguenti risultati.
Caso A). Abbiamo

$$\partial_0\mu(t,p) = -\frac{2}{\tau}\,\mu(t,p)\,.$$

Caso B). Abbiamo
$$\partial_0\mu(t,p) = 0\,.$$

È opportuno verificare che la funzione $\partial_0\mu$ abbia dimensione $\mathsf{T}^{-1}\,\mathsf{L}^{-3}\,\mathsf{M}$.

Dunque, in una posizione fissata, nel caso A) la densità di massa varia rispetto al tempo con una legge di proporzionalità rispetto alla densità di massa stessa, mentre, nel caso B) non varia rispetto al tempo.

3.3.14 Derivata totale rispetto al tempo della densità di massa

La derivata totale rispetto al tempo della densità di massa partendo dalla sua espressione euleriana è data dalla formula
$$\delta\mu \equiv \frac{d\mu}{dt} = \partial_0\mu + \overset{\vee}{D}\mu(\bar{v}) \equiv \frac{\partial\mu}{\partial t} + \overset{\vee}{D}\mu(\bar{v})\,.$$

Abbiamo già calcolato la derivata parziale rispetto al tempo $\partial_0\mu$. Occorre dunque calcolare
$$\begin{aligned}\overset{\vee}{D}\mu(\bar{v}) &= \big(\frac{\partial\mu}{\partial x}\,Dx + \frac{\partial\mu}{\partial y}\,Dy + \frac{\partial\mu}{\partial z}\,Dz\big)(v^x\,\bar{e}_x + v^y\,\bar{e}_y + v^z\,\bar{e}_z)\\ &= \frac{\partial\mu}{\partial x}\,v^x + \frac{\partial\mu}{\partial y}\,v^y + \frac{\partial\mu}{\partial z}\,v^z\,.\end{aligned}$$

Perciò, abbiamo i seguenti risultati.

Caso A). Abbiamo
$$\overset{\vee}{D}\mu(\bar{v}) = 0\,.$$

Caso B). Abbiamo
$$\begin{aligned}\big(\overset{\vee}{D}\mu(\bar{v})\big)(t,p) &= \big(-\frac{2}{\tau\,l^2}\,x^2(p) - \frac{2\,\omega}{l^2}\,x(p)\,z(p) - \frac{2}{\tau\,l^2}\,z^2(p) + \frac{2\,\omega}{l^2}\,x(p)\,z(p)\big)\,\mu(t,p)\\ &= -\frac{2}{\tau\,l^2}\,\big(x(p)^2 + z(p)^2\big)\,\mu(t,p)\,.\end{aligned}$$

Dunque, alla fine, otteniamo i seguenti valori.

Caso A). Abbiamo
$$\delta\mu(t,p) = -\frac{2}{\tau}\,\mu(t,p)\,.$$

Caso B). Abbiamo
$$\delta\mu(t,p) = -\frac{2}{\tau\,l^2}\,\big(x(p)^2 + z(p)^2\big)\,\mu(t,p)\,.$$

È opportuno verificare che la funzione $\delta\mu$ abbia dimensione $\mathsf{T}^{-1}\,\mathsf{L}^{-3}\,\mathsf{M}$.

Dunque,

- nel caso A), la derivata rispetto al tempo della densità di massa, seguendo il moto di una particella, è proporzionale alla densità di massa stessa,

- nel caso B), a derivata rispetto al tempo della densità di massa, seguendo il moto di una particella, è proporzionale alla densità di massa stessa ed al quadrato della distanza della particella dall'asse z .

3.3.15 Equazione di continuità

Dobbiamo verificare l'equazione di continuità

$$\delta\mu + \mu \, \mathrm{div}\, \bar{\mathsf{v}} = 0 \, .$$

Tenendo conto dei valori già calcolati di $\delta\mu$ e $\mathrm{div}\, \bar{\mathsf{v}}$, otteniamo i seguenti risultati.

Caso A). Abbiamo

$$\delta\mu + \mu \, \mathrm{div}\, \bar{\mathsf{v}} = -\frac{2}{\tau} \, \mu + \mu \, \frac{2}{\tau} \; = 0 \, .$$

Caso B). Abbiamo

$$\delta\mu + \mu \, \mathrm{div}\, \bar{\mathsf{v}} = -\frac{2}{\tau \, l^2} \, (x^2 + z^2) \, \mu + \mu \, \frac{2}{\tau} \; .$$

Pertanto, nel caso A), l'equazione di continuità è verificata e, nel caso B), l'equazione di continuità non è verificata.

È opportuno verificare che la funzione $\delta\mu + \mu \, \mathrm{div}\, \bar{\mathsf{v}}$ abbia dimensione $\mathsf{T}^{-1} \, \mathsf{L}^{-3} \, \mathsf{M}$.

Dato che la conservazione della massa è un fatto fisico sempre verificato, il precedente risultato dice che la densità di massa assegnata in questo esercizio è fisicamente plausibile nel caso A), ma non è fisicamente plausibile nel caso B).