Marco Modugno

ESEMPI ED ESERCIZI
sulla Meccanica dei Sistemi Continui

Per gli studenti dei Corsi di Laurea in
"Ingegneria per l'Ambiente ed il Territorio" ed "Ingegneria Edile"

Versione del 2012.10.19. - 14.02.

Marco Modugno
Dipartimento di Matematica Applicata
Università di Firenze
Via S. Marta 3, 50139 Firenze
email: marco.modugno@unifi.it
web: http://www.dma.unifi.it/~modugno

INDICE

CAPITOLO 1

GEOMETRIA DELLE MASSE

1.1 Esempio 1

Si consideri un sistema continuo piano costituito da un triangolo omogeneo isoscele (A, B, C), la cui base è (A, B).

Sia

$$\mu \in \mathbb{R}^+$$

la densità (superficiale) di massa e siano

$$|AB| = b \in \mathbb{R}^+ \qquad \text{e} \qquad |CM| = h \in \mathbb{R}^+$$

la lunghezza della base e la lunghezza dell'altezza, rispettivamente, dove M indica il punto medio della base (A, B).

Si determini il centro di massa P_0 del triangolo e si studi il tensore d'inerzia nei vari punti del piano del triangolo.

1.1.1 Area e massa

L'area del triangolo è

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\, h\, b\,.$$

La massa del triangolo è

$$m = \frac{1}{2}\, \mu\, h\, b\,.$$

1.1.2 Sistema di coordinate

Consideriamo un sistema di coordinate cartesiano, la cui origine o coincide con il punto M, con l'asse delle x nella direzione della base (A, B) e con l'asse delle y nella direzione dell'altezza (M, C) orientato nel verso $M \to C$.

1.1.3 Rapporti

La lunghezza h' dell'altezza nel punto della base di coordinata x è dato, per il teorema di Talete, dalla proporzione

$$\frac{h'}{h} = \frac{\frac{1}{2}\,b - |x|}{\frac{1}{2}\,b} \;,$$

che implica

$$h' = \frac{b - 2|x|}{b}\; h\,.$$

In particolare, per $x = 0$ abbiamo $h' = h$ e per $|x| = \frac{1}{2}\,b$ abbiamo $h' = 0$, come deve essere.

La lunghezza b' della base nel punto dell'altezza di coordinata y è dato, per il teorema di Talete, dalla proporzione

$$\frac{b'}{b} = \frac{h - y}{h} \;,$$

che implica

$$b' = \frac{h - y}{h}\; b\,.$$

In particolare, per $y = 0$ abbiamo $b' = b$ e per $y = h$ abbiamo $b' = 0$, come deve essere.

1.1.4 Centro di massa

Per la proprietà di convessità del centro di massa e per ragioni di simmetria, il centro di massa si trova in un punto interno del segmento MC.

Perciò, l'ascissa del centro di massa è

$$x_0 = 0\,.$$

Si otterrebbe lo stesso risultato con il calcolo esplicito (che, però, non è necessario)

$$\begin{aligned}
x_0 &= \frac{1}{m} \int_{-b/2}^{b/2} \mu\, h'\, x\, dx \\
&= \frac{1}{m} \int_{-b/2}^{b/2} \mu\, \frac{b - 2|x|}{b}\; h\, x\, dx \\
&= \frac{1}{m} \int_{-b/2}^{b/2} \mu\, h\, x\, dx + \frac{1}{m} \int_{-b/2}^{0} 2\,\mu\, \frac{h}{b}\; x^2\, dx - \frac{1}{m} \int_{0}^{b/2} 2\,\mu\, \frac{h}{b}\; x^2\, dx \\
&= \frac{1}{2}\,\frac{1}{m}\,\mu\, h x^2|_{-b/2}^{b/2} + \frac{2}{3}\,\frac{1}{m}\,\mu \frac{h}{b}\, x^3|_{-b/2}^{0} - \frac{2}{3}\,\frac{1}{m}\,\mu \frac{h}{b}\, x^3|_{0}^{b/2} \\
&= 0 + \frac{2}{3}\,\frac{1}{m}\,\mu \frac{h}{b}\, x^3|_{-b/2}^{0} + \frac{2}{3}\,\frac{1}{m}\,\mu \frac{h}{b}\, x^3|_{b/2}^{0} \\
&= 0\,,
\end{aligned}$$

come deve essere.

Inoltre, l'ordinata del centro di massa è data dalla formula

$$\begin{aligned}
I_x &= \frac{1}{m} \int_0^h \mu\, b'\, y\, dy \\
&= \frac{1}{m} \int_0^h \mu\, \frac{h-y}{h}\, b\, y\, dy \\
&= \frac{1}{m} \int_0^h \mu\, b\, y\, dy - \frac{1}{m} \int_0^h \mu\, \frac{b}{h}\, y^2\, dy \\
&= \frac{1}{2}\, \frac{1}{m}\, \mu\, b y^2 |_0^h - \frac{1}{3}\, \frac{1}{m}\, \mu \frac{b}{h}\, y^3 |_0^h \\
&= \frac{1}{2}\, \frac{1}{m}\, \mu\, b h^2 - \frac{1}{3}\, \frac{1}{m}\, \mu \frac{b}{h}\, h^3 \\
&= \frac{1}{2m}\, \mu\, b\, h\, (1 - \frac{2}{3}\,)\, h \\
&= 1\, (1 - \frac{2}{3}\,)\, h \\
&= \frac{1}{3}\, h\, .
\end{aligned}$$

come deve essere.

Si noti che il centro di massa è più vicino alla base (AB) che non al vertice C. È giusto che sia così , perché c'è più massa vicino alla base che non al vertice.

1.1.5 Momenti rispetto al punto medio della base

Calcoliamo i momenti d'inerzia e deviatori rispetto al punto medio della base, con riferimento alla base associata al sistema di coordinate scelto.

1) Il momento d'inerzia rispetto all'asse x è dato dalla formula

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} = I_x &= \int_0^h \mu\, b'\, y^2\, dy \\
&= \int_0^h \mu\, \frac{h-y}{h}\, b\, y^2\, dy \\
&= \int_0^h \mu\, b\, y^2\, dy - \int_0^h \mu\, \frac{b}{h}\, y^3\, dy \\
&= \frac{1}{3}\, \mu\, b y^3 |_0^h - \frac{1}{4}\, \mu \frac{b}{h}\, y^4 |_0^h \\
&= \frac{1}{3}\, \mu\, b h^3 - \frac{1}{4}\, \mu \frac{b}{h}\, h^4 \\
&= \frac{1}{2}\, \mu\, b\, h\, (\frac{2}{3}\, - \frac{1}{2}\,)\, h^2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= m\,(1-\frac{2}{3}\,)\,h^2 \\
&= \frac{1}{6}\,m\,h^2\,.
\end{aligned}
$$

Osserviamo che è giusto che I_x dipenda solo da h e non da b. Infatti, si immagini di deformare il triangolo contraendolo o espandendolo orizzontalmente, in modo da variare b, senza variare h e senza variare la massa m (ciò richiede, ovviamente, una variazione della densità superficiale). Allora, impostando il calcolo di I_x in modo analogo a quello precedente, si vede subito che l'espressione di b', in funzione di b, h, y non cambia (tenendo conto del teorema di Talete). D'altra parte, per ipotesi la massa m non è cambiata (pur essendo cambiato b) e b compare solo al prim'ordine e perciò è completamente "assorbito nella massa m.) Pertanto, il risultato finale non cambia.

Osserviamo anche che se considerassimo un triangolo qualunque (anche non isoscele), con la stessa base b e la stessa massa m (ciò richiede, ovviamente, una diversa densità superficiale), allora il momento d'inerzia I_x sarebbe lo stesso di quello della formula precedente. Questo fatto può essere facilmente dimostrato con considerazioni analoghe alle precedenti.

2) Il momento d'inerzia rispetto all'asse y è dato dalla formula

$$
\begin{aligned}
\sigma_{22} = I_y &= \int_{-b/2}^{b/2} \mu\,h'\,x^2\,dx \\
&= \int_{-b/2}^{b/2} \mu\,\frac{b-2|x|}{b}\;h\,x^2\,dx \\
&= \int_{-b/2}^{b/2} \mu\,h\,x^2\,dx + \int_{-b/2}^{0} 2\,\mu\,\frac{h}{b}\;x^3\,dx - \int_{0}^{b/2} 2\,\mu\,\frac{h}{b}\;x^3\,dx \\
&= \frac{1}{3}\,\mu\,hx^3|_{-b/2}^{b/2} + \frac{2}{4}\,\mu\frac{h}{b}\;x^4|_{-b/2}^{0} - \frac{2}{4}\,\mu\frac{h}{b}\;x^4|_{0}^{b/2} \\
&= \frac{1}{3}\,\frac{1}{8}\,\mu\,h(b^3+b^3) + \frac{1}{2}\,\frac{1}{16}\,\mu\frac{h}{b}\,(-b^4-b^4) \\
&= \frac{1}{3}\,\frac{1}{4}\,\mu\,hb^3 - \frac{1}{16}\,\mu\,h\,b^3 \\
&= \frac{1}{2}\,\mu\,b\,h\,\frac{1}{24}\;b^2 \\
&= \frac{1}{24}\;m\,b^2\,.
\end{aligned}
$$

Tenendo conto della proprietà additiva del momento d'inerzia, possiamo ottenere lo stesso risultato mediante la formula (più semplice)

$$
\sigma_{22} = I_y = 2\int_0^{b/2} \mu\,h'\,x^2\,dx
$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\int_0^{b/2} \mu \, \frac{b-2x}{b} \; h\, x^2\, dx \\
&= 2\int_0^{b/2} \mu\, h\, x^2\, dx - 2\int_0^{b/2} 2\,\mu\, \frac{h}{b}\; x^3\, dx \\
&= \frac{2}{3}\,\mu\, h x^3|_0^{b/2} - \frac{4}{4}\,\mu \frac{h}{b}\, x^4|_0^{b/2} \\
&= \frac{2}{3}\,\frac{1}{8}\,\mu\, h b^3 - \frac{1}{16}\,\mu \frac{h}{b}\, b^4 \\
&= \frac{1}{12}\,\mu \frac{h}{b}\, b^4 - \frac{1}{16}\,\mu \frac{h}{b}\, b^4 \\
&= \frac{1}{2}\,\mu\, b\, h\, \frac{1}{24}\; b^2 \\
&= \frac{1}{24}\; m\, b^2\,.
\end{aligned}
$$

Osserviamo che è giusto che I_y dipenda solo da b e non da h. Infatti, si immagini di deformare il triangolo contraendolo o espandendolo verticalmente, in modo da variare h, senza variare b e senza variare la massa m (ciò richiede, ovviamente, una variazione della densità superficiale ρ). Allora, impostando il calcolo di I_y in modo analogo a quello precedente, si vede subito che l'espressione di h', in funzione di b, h, x non cambia (tenendo conto del teorema di Talete). D'altra parte, per ipotesi la massa m non è cambiata (pur essendo cambiato h) ed h compare solo al prim'ordine e perciò è completamente "assorbito nella massa m. Pertanto, il risultato finale non cambia.

Osserviamo che, per quanto riguarda I_y, non valgono le considerazioni analoghe a quelle che avevamo fatto per I_x riguardo all'inavarianza rispetto alla forma del triangolo. Infatti, si può vedere facilmente che, cambiando la forma del triangolo con un criterio analogo a quello del caso 1), le distanza delle masse dall'asse y cambiano. In particolare, nel caso particolare in cui il triangolo diventasse rettangolo e l'altezza fosse uno dei cateti, allora il momento d'inerzia rispetto all'asse y sarebbe $I_y = \frac{1}{6}\, m\, b^2$ (per un calcolo analogo a quello di I_x). Chiaramente, questo valore di I_y è diverso da quello che abbiamo trovato nel caso isoscele.

3) Il momento d'inerzia rispetto all'asse z è dato, per il teorema di Pitagora, dalla formula

$$
\begin{aligned}
\sigma_{33} = I_z &= I_x + I_y \\
&= \frac{1}{6}\, m(h^2 + \frac{1}{4}\, b^2)\,.
\end{aligned}
$$

4) Il momento deviatorio rispetto agli assi x, y è nullo perché l'asse y è un asse di simmetria del sistema di masse (per ogni punto del sistema esiste un altro punto con la stessa coordinata y e con coordinata x opposta). Dunque, abbiamo

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} = D_{xy} = D_{yx} = 0\,.$$

Il calcolo esplicito (che non è necessario) darebbe

$$\begin{aligned}
D_{xy} &= -\int_{-b/2}^{0} \big(\int_{0}^{h'(x)} \mu\, x\, y\, dy\big)\, dx - \int_{0}^{b/2} \big(\int_{0}^{h'(x)} \mu\, x\, y\, dy\big)\, dx \\
&= -\int_{-b/2}^{0} \big(\int_{0}^{b+2x} \mu\, x\, y\, dy\big)\, dx - \int_{0}^{b/2} \big(\int_{0}^{b-2x} \mu\, x\, y\, dy\big)\, dx \\
&= -\int_{-b/2}^{0} \frac{1}{2}\, \mu\, x\, (b+2x)^2\, dx - \int_{0}^{b/2} \frac{1}{2}\, \mu\, x\, (b-2x)^2\, dx \\
&= -\frac{1}{2}\, \mu \int_{-b/2}^{0} x\, (b^2+4x^2+4bx)\, dx - \frac{1}{2}\, \mu \int_{0}^{b/2} x\, (b^2+4x^2-4bx)\, dx \\
&= \frac{1}{2}\, \mu\, (\frac{1}{2}\, b^2\, x^2 + \frac{4}{4}\, x^4 + \frac{4}{3}\, b\, x^3)|_0^{-b/2} - \frac{1}{2}\, \mu\, (\frac{1}{2}\, b^2\, x^2 + \frac{4}{4}\, x^4 - \frac{4}{3}\, b\, x^3)|_0^{b/2} \\
&= 0\,.
\end{aligned}$$

5) I momenti deviatori rispetto agli assi x, z ed y, z sono nulli perché la coordinata z di tutti i punti del sistema di masse è nulla. Dunque, abbiamo

$$\begin{aligned}
\sigma_{13} &= \sigma_{31} = D_{xz} = D_{zx} = 0 \\
\sigma_{23} &= \sigma_{32} = D_{yz} = D_{zy} = 0\,.
\end{aligned}$$

6) Dunque, i tre assi x, y, z passanti per M sono assi principali e la matrice del tensore d'inerzia nel punto M rispetto alla base $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ è

$$(\sigma_{ij})_M = \begin{pmatrix} I_x & D_{xy} & D_{xz} \\ D_{yx} & I_y & D_{yz} \\ D_{zx} & D_{zy} & I_z \end{pmatrix}_M = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}\, m\, h^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{24}\, m\, b^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6}\, m(h^2 + \frac{1}{4}\, b^2) \end{pmatrix}.$$

1.1.6 Momenti relativi ad altri versori

Il momento d'inerzia rispetto al polo M e ad un versore

$$\bar{u} = u^1\, \bar{e}_1 + u^2\, \bar{e}_2$$

è dato da

$$\begin{aligned}
I_M(\bar{u}) = \underset{\sim}{\sigma}_M(\bar{u}, \bar{u}) &= I_x\, (u^1)^2 + I_y\, (u^2)^2 = \\
&= \frac{1}{6}\, m\, h^2\, (u^1)^2 + \frac{1}{24}\, m\, b^2\, (u^2)^2\,.
\end{aligned}$$

Il momento deviatorio rispetto al polo M e a due versori ortogonali

$$\bar{u} = u^1\, \bar{e}_1 + u^2\, \bar{e}_2 \qquad \text{e} \qquad \bar{v} = v^1\, \bar{e}_1 + v^2\, \bar{e}_2$$

è dato da

$$D_M(\bar{u},\bar{v}) = \underset{\sim}{\sigma}_M(\bar{u},\bar{v}) = I_x\,u^1\,v^1 + I_y\,u^2\,v^2 = \\ = \frac{1}{6}\,m\,h^2\,u^1\,v^1 + \frac{1}{24}\,m\,b^2\,u^2\,v^2\,.$$

1.1.7 Teorema di Huygens

Ricordiamo il teorema di Huygens.

Consideriamo un sistema di masse (p_i, m_i) . Siano $o \in \boldsymbol{P}$ un polo qualunque e $p_0 \in \boldsymbol{P}$ il centro di massa del sistema. Allora, per ogni coppia di vettori $\bar{u},\bar{v} \in \bar{\boldsymbol{P}}$, abbiamo

$$\begin{aligned}
\underset{\sim}{\sigma}_o(\bar{u},\bar{v}) &= \sum_i m_i \Big[(p_i - o)^2\,\bar{u}\cdot\bar{v} - \big((p_i - o)\cdot\bar{u}\big)\,\big((p_i - o)\cdot\bar{v}\big)\Big] \\
&= \sum_i m_i \Big[\big((p_i - p_0) + (p_0 - o)\big)^2\,\bar{u}\cdot\bar{v} \\
&\qquad - \Big(\big((p_i - p_0) + (p_0 - o)\big)\cdot\bar{u}\Big)\Big(\big((p_i - p_0) + (p_0 - o)\big)\cdot\bar{v}\Big)\Big] \\
&= \sum_i m_i \Big[\big((p_i - p_0)^2 + (p_0 - o)^2 + 2\,(p_i - p_0)\cdot(p_0 - o)\big)\,\bar{u}\cdot\bar{v} \\
&\qquad - \big((p_i - p_0)\cdot\bar{u}\big)\big((p_i - p_0)\cdot\bar{v}\big) - \big((p_0 - o)\cdot\bar{u}\big)\big((p_0 - o)\cdot\bar{v}\big) \\
&\qquad - \big((p_i - p_0)\cdot\bar{u}\big)\big((p_0 - o)\cdot\bar{v}\big) - \big((p_0 - o)\cdot\bar{u}\big)\big((p_i - p_0)\cdot\bar{v}\big)\Big]\,,
\end{aligned}$$

che, tendendo conto dell'identità

$$\sum_i m_i\,(p_i - p_0) = 0\,,$$

dà

$$\begin{aligned}
\underset{\sim}{\sigma}_o(\bar{u},\bar{v}) &= \sum_i m_i \Big[\big((p_i - p_0)^2 + (p_0 - o)^2\big)\,\bar{u}\cdot\bar{v} \\
&\qquad - \big((p_i - p_0)\cdot\bar{u}\big)\big((p_i - p_0)\cdot\bar{v}\big) - \big((p_0 - o)\cdot\bar{u}\big)\big((p_0 - o)\cdot\bar{v}\big)\Big] \\
&= \sum_i m_i \Big[(p_i - p_0)^2\,\bar{u}\cdot\bar{v} - \big((p_i - p_0)\cdot\bar{u}\big)\big((p_i - p_0)\cdot\bar{v}\big)\Big] \\
&+ \sum_i m_i \Big[(p_0 - o)^2\,\bar{u}\cdot\bar{v} - \big((p_0 - o)\cdot\bar{u}\big)\big((p_0 - o)\cdot\bar{v}\big)\Big] \\
&= \underset{\sim}{\sigma}_{p_0}(\bar{u},\bar{v}) + m\,\Big[(p_0 - o)^2\,\bar{u}\cdot\bar{v} - \big((p_0 - o)\cdot\bar{u}\big)\big((p_0 - o)\cdot\bar{v}\big)\Big]\,.
\end{aligned}$$

In particolare, se $\bar{u} = \bar{v}$ è un versore, allora otteniamo

$$\underset{\sim}{\sigma}_o(\bar{u}, \bar{u}) = \underset{\sim}{\sigma}_{p_0}(\bar{u}, \bar{u}) + m \left[(p_0 - o)^2 - \big((p_0 - o) \cdot \bar{u}\big)^2\right]$$

e, se $\bar{u}, \bar{v}$ sono due versori ortogonali, allora otteniamo

$$\underset{\sim}{\sigma}_o(\bar{u}, \bar{v}) = \underset{\sim}{\sigma}_{p_0}(\bar{u}, \bar{v}) - m \big((p_0 - o) \cdot \bar{u}\big)\big((p_0 - o) \cdot \bar{v}\big) .$$

Dunque, il momento d'inerzia, rispetto ad un polo o ed al versore $\bar{u}$, è uguale al momento d'inerzia, rispetto al centro di massa p_0 ed al versore $\bar{u}$, più il momento d'inerzia di una massa m posta in p_0, rispetto al polo o ed al versore $\bar{u}$.

Analogamente, il momento deviatorio, rispetto ad un polo o ed ai versori ortogonali $\bar{u}, \bar{v}$, è uguale al momento deviatorio, rispetto al centro di massa p_0 ed ai versori ortogoanali $\bar{u}, \bar{v}$, più il momento deviatorio di una massa m posta in p_0, ed ai versori ortogoanali $\bar{u}, \bar{v}$.

Ovviamente, questi risultati si estendono facilmente ad un sistema continuo di masse.

1.1.8 Momenti rispetto al centro di massa

Tenendo conto del teorema di Huygens, la matrice del tensore d'inerzia rispetto al centro di massa p_0 ed alla base $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$, è

$$(\sigma_{ij})_{p_0} = \begin{pmatrix} I_x & D_{xy} & D_{xz} \\ D_{yx} & I_y & D_{yz} \\ D_{zx} & D_{zy} & I_z \end{pmatrix}_{p_0} = \begin{pmatrix} \frac{1}{18}\, m\, h^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{24}\, m\, b^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6}\, m(\frac{1}{3}\, h^2 + \frac{1}{4}\, b^2) \end{pmatrix} .$$

Dunque, la base $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ genera tre assi principali anche nel punto p_0.

1.1.9 Momenti rispetto ai vertici del triangolo

Ancora per il teorema di Huygens, la matrice del tensore d'inerzia rispetto al vertice C ed alla base $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$, è

$$(\sigma_{ij})_C = \begin{pmatrix} I_x & D_{xy} & D_{xz} \\ D_{yx} & I_y & D_{yz} \\ D_{zx} & D_{zy} & I_z \end{pmatrix}_C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\, m\, h^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{24}\, m\, b^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\, m(h^2 + \frac{1}{12}\, b^2) \end{pmatrix} .$$

Dunque, la base $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ genera tre assi principali anche nel punto C.

Per un controllo, possiamo ricalcolare il momento d'inerzia rispetto al vertice C ed alla retta x mediante un calcolo diretto. Infatti, tale momento d'inerzia è dato da

$$I_x = \int_0^h \mu\, \frac{b}{h}\, y^3\, dy = \frac{1}{4}\, \mu\, b\, h^3 = \frac{1}{2}\, m\, h^2 .$$

Ancora per il teorema di Huygens, la matrice del tensore d'inerzia rispetto al vertice A ed alla base $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$, è

$$(\sigma_{ij})_A = \begin{pmatrix} I_x & D_{xy} & D_{xz} \\ D_{yx} & I_y & D_{yz} \\ D_{zx} & D_{zy} & I_z \end{pmatrix}_A = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}\, m\, h^2 & -\frac{1}{6}\, m\, b\, h & 0 \\ -\frac{1}{6}\, m\, b\, h & \frac{7}{24}\, m\, b^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6}\, m(h^2 + \frac{7}{4}\, b^2) \end{pmatrix} .$$

Dunque, la base $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ non genera tre assi principali nel punto A .

Per un controllo, possiamo ricalcolare il momento d'inerzia rispetto al vertice A ed alla retta y mediante un calcolo diretto. Infatti, tale momento d'inerzia è dato da

$$I_y = \int_0^{b/2} 2\, \mu\, \frac{b}{h}\, x^3\, dx + \int_{b/2}^{b} 2\, \frac{h}{b}\, (b - x)\, x^2\, dx = \frac{7}{24}\, m\, b^2 .$$

Osserviamo che il determinante della matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{6}\, m\, h^2 & -\frac{1}{6}\, m\, b\, h \\ -\frac{1}{6}\, m\, b\, h & \frac{7}{24}\, m\, b^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{48}\, m^2\, b^2\, h^2$$

è positivo, come deve essere, dato che il tensore d'inerzia è definito positivo.

CAPITOLO 2

TENSORE DELLE TENSIONI

2.1 Esempio 1

Si consideri un sistema continuo, un istante $t \in \boldsymbol{T}$, punto del continuo $p \in \boldsymbol{P}$. Sia $\hat{\sigma} \in L(\bar{\boldsymbol{P}}, \bar{\boldsymbol{P}})$ il tensore delle tensioni all'istante t e nel punto p.

Ci si riferisca ad una base ortonormale $\mathcal{B} := (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3) \equiv (\bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{e}_z)$.

Supponiamo che gli sforzi relativi alle tre facce orientate ortogonali ai versori della base $\mathcal{B}$ siano

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}(\bar{e}_x) &= 2\bar{e}_x - \bar{e}_y \\ \hat{\sigma}(\bar{e}_y) &= -\bar{e}_x \\ \hat{\sigma}(\bar{e}_x) &= 5\bar{e}_z\,. \end{aligned}$$

Si studi il tensore delle tensioni.

2.1.1 Sforzi relativi alla base

Lo sforzo relativo alla faccia (y, z) ha una componente normale di trazione $\hat{\sigma}(\bar{e}_x)\cdot\bar{e}_x = 2$ ed uno sforzo di taglio $-\bar{e}_y$.

Lo sforzo relativo alla faccia (x, z) ha una componente normale nulla $\hat{\sigma}(\bar{e}_y) \cdot \bar{e}_y = 0$ ed uno sforzo di taglio $-\bar{e}_x$.

Lo sforzo relativo alla faccia (x, y) ha una componente normale di trazione $\hat{\sigma}(\bar{e}_z)\cdot\bar{e}_z = 5$ ed uno sforzo di taglio nullo. Dunque, la faccia (x, y) è principale.

2.1.2 Matrice del tensore delle tensioni rispetto alla base

La matrice del tensore delle tensioni rispetto alla base $\mathcal{B}$ si ottiene, secondo la regola generale valida per tutte le applicazioni lineari, ordinando per colonne le componenti degli sforzi relativi ai tre vettori della base. Dunque, otteniamo

$$(\sigma^i_j) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Tale matrice è simmetrica (come deve essere).

2.1.3 Autovalori ed autovettori

Il polinomio cartteristico della matrice (σ^i_j) è

$$\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \end{pmatrix} = (5-\lambda)(\lambda^2-2\lambda-1) = -\lambda^3+7\lambda^2-9\lambda-5\,.$$

D'altra parte, le ipotesi iniziali dicono immediatamente che l'asse generato da $\bar{e}_3$ è principale ed il suo autovalore è $\lambda_3 = 5$.

Dunque, gli altri due autovettori sono nel piano generato da $(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$. Perciò, per trovare gli altri due autovettori ed autovalori, possiamo limitarci a studiare la sottomatrice relativa a tale piano [1]

$$(\sigma^i_j) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\,.$$

Il polinomio caratteristico della matrice ridotta è

$$\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2-2\lambda-1\,.$$

Le sue radici sono

$$\lambda = \frac{2\pm\sqrt{4+4}}{2} = \frac{2\pm\sqrt{8}}{2} = 1\pm\sqrt{2}\,.$$

Gli autovettori $\bar{u}_1$ corrispondenti all'autovalore $\lambda_1 = 1+\sqrt{2}$ sono dati dalle soluzioni non nulle del sistema

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = (1+\sqrt{2})\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}\,,$$

cioè del sistema

$$\begin{aligned} (1-\sqrt{2})u_x &= u_y \\ (1+\sqrt{2})u_y &= -u_x \end{aligned}$$

(le due equazioni sono linearmente dipendendenti, come deve essere).

Dunque, gli autovettori $\bar{u}_1$ sono i vettori del tipo

$$\bar{u}_1 = u_x\bar{e}_x + (1-\sqrt{2})u_x\bar{e}_y\,, \qquad \text{con} \qquad u_x \neq 0\,.$$

Il corrispondente versore è

$$\operatorname{ver}\bar{u}_1 = \frac{\bar{e}_x + (1-\sqrt{2})\bar{e}_y}{4-2\sqrt{2}}\,.$$

[1] Ovviamente, se considerassimo la matrice completa, troveremmo gli stessi risultati con qualche calcolo inutile in più.

Gli autovettori $\bar{u}_2$ corrispondenti all'autovalore $\lambda_2 = 1 - \sqrt{2}$ sono dati dalle soluzioni non nulle del sistema

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = (1 - \sqrt{2}) \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} ,$$

cioè del sistema

$$(1 + \sqrt{2})u_x = u_y$$
$$(1 - \sqrt{2})u_y = -u_x$$

(le due equazioni sono linearmente dipendendenti, come deve essere).

Dunque, gli autovettori $\bar{u}_2$ sono i vettori del tipo

$$\bar{u}_2 = u_x\bar{e}_x + (1 + \sqrt{2})u_x\bar{e}_y , \qquad \text{con} \qquad u_x \neq 0 .$$

Il corrispondente versore è

$$\operatorname{ver} \bar{u}_2 = \frac{\bar{e}_x + (1 + \sqrt{2})\bar{e}_y}{4 + 2\sqrt{2}} .$$

I due assi principali sono ortogonali, come deve essere, dato che

$$\big(\bar{e}_x + (1 - \sqrt{2})\bar{e}_y\big) \cdot \big(\bar{e}_x + (1 + \sqrt{2})\bar{e}_y\big) = 0 .$$

La componente dello sforzo normale relativo alla faccia principale associata ad $\bar{u}_1$ è di trazione $\lambda_1 = 1 + \sqrt{2}$.

La componente dello sforzo normale relativo alla faccia principale associata ad $\bar{u}_2$ è di pressione $\lambda_2 = 1 - \sqrt{2}$.

Dato che i tre autovalori sono distinti, le facce principali sono esattamente tre ed ortogonali tra loro.

Le componenti ν degli sforzi normali relativi a tutte le possibili ∞^2 facce hanno un valore compreso nell'intervallo dato dagli autovalori minimo e massimo

$$1 - \sqrt{2} \leq \nu \leq 5 .$$

Nella base ortonormale degli autovettori $\mathcal{B}_a := (\operatorname{ver} \bar{u}_1, \operatorname{ver} \bar{u}_2, \bar{e}_3)$ la matrice di $\hat{\sigma}$ è diagonale[2]

$$(\sigma^i_j) = \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} .$$

[2] Anche se ci riferissimo alla base non normalizzata $(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{e}_3)$ otterremmo la stessa matrice.

2.1.4 Sforzi relativi ad una faccia generica

Le componenti dello sforzo relativo alla generica faccia orientata generata dal versore

$$\bar{n} = n^1 \bar{e}_1 + n^2 \bar{e}_2 + n^3 \bar{e}_3 \,, \qquad \text{con} \qquad (n^1)^2 + (n^2)^2 + (n^3)^2 = 1 \,,$$

sono

$$(\sigma^i_j)(n^j) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n^1 \\ n^2 \\ n^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2n^1 - n^2 \\ -n^1 \\ 5n^3 \end{pmatrix} .$$

Perciò, lo sforzo relativo a tale faccia è

$$\hat{\sigma}(\bar{n}) = (2n^1 - n^2)\, \bar{e}_1 - n^1 \, \bar{e}_2 + 5n^3 \, \bar{e}_3 \,.$$

La componente dello sforzo normale rispetto a tale faccia è

$$\nu = \begin{pmatrix} n^1 & n^2 & n^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2n^1 - n^2 \\ -n^1 \\ 5n^3 \end{pmatrix} = 2(n^1)^2 - 2n^1 n^2 + 5(n^3)^2 \,.$$

Perciò, lo sforzo normale rispetto a tale faccia è

$$\big(\hat{\sigma}(\bar{n})\big)^{\perp} = \big(2(n^1)^2 - 2n^1 n^2 + 5(n^3)^2\big)\, (n^1 \bar{e}_1 + n^2 \bar{e}_2 + n^3 \bar{e}_3) \,.$$

Inoltre, lo sforzo di taglio rispetto a tale faccia è

$$\begin{aligned} \big(\hat{\sigma}(\bar{n})\big)^{\parallel} &= \hat{\sigma}(\bar{n}) - \big(\hat{\sigma}(\bar{n})\big)^{\perp} \\ &= \big(2n^1 - n^2 - 2(n^1)^3 + 2(n^1)^2 n^2 + 5n^1 (n^3)^2\big)\, \bar{e}_1 \\ &+ \big(- n^1 - 2(n^1)^2 n^2 + 2n^1 (n^2)^2 - 5n^2 (n^3)^2\big)\, \bar{e}_2 \\ &+ \big(5n^3 - 2(n^1)^2 n^3 + 2n^1 n^2 n^3 - 5(n^3)^3\big)\, \bar{e}_3 \,. \end{aligned}$$

La componente dello sforzo normale rispetto a tale faccia pu anche essere espresso nel seguente modo

$$\nu = 5 - 3\,(n^1)^2 - 5\,(n^2)^2 - 2\,n^1\,n^2 \,,$$

eliminando la componente n^3 mediante l'identità $(n^1)^2 + (n^2)^2 + (n^3)^2 = 1$.

Allora, questa espressione permette di verificare facilmente che ν soddisfa la disuguaglianza

$$1 - \sqrt{2}\lambda_{\min} \le \nu \le \lambda_{\max} = 5 \,,$$

tenendo conto del fatto che $0 \le |n^1|, \, |n^2| \le 1$.

2.1.5 Sforzi normali nulli

Ci domandiamo ora se ci sono delle facce il cui sforzo normale è nullo.

In base ai risultati del precedente paragrafo, tali facce sono generate dai versori $\bar{n}$ tali che

$$\nu := 2(n^1)^2 - 2n^1n^2 + 5(n^3)^2 = 0 \qquad \text{con} \qquad (n^1)^2 + (n^2)^2 + (n^3)^2 = 1\,.$$

Dunque, tali facce sono date dalle soluzioni del precedente sistema di due equazioni (non lineari!).

Per ragioni di continuità, siamo sicuri che esistono soluzioni del precedente problema.

Infatti, abbiamo trovato almeno due facce la cui componente dello sforzo normale è positivo, la faccia generata da $\bar{u}_1$ e la faccia generata da $\bar{e}_3$, ed una faccia la cui componente dello sforzo normale è negativo, la faccia generata da $\bar{u}_2$. Pertanto, per ragioni di continuità, ci sarà almeno una faccia, la cui normale è intermendia tra $\bar{u}_1$ ed $\bar{u}_2$, ed almeno una faccia, la cui normale è intermendia tra $\bar{e}_3$ ed $\bar{u}_2$, il cui sforzo normale è nullo.

Cercando un versore $\bar{n}$ intermendio tra $\bar{u}_1$ ed $\bar{u}_2$, che sia soluzione del precedente sistema, troviamo

$$\bar{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\bar{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\,\bar{e}_2\,.$$

Effettivamente, la componente dello sforzo normale relativo alla faccia generata da tale $\bar{n}$ è

$$\nu = \frac{2}{2} - \frac{2}{2} = 0\,.$$

Cercando un versore $\bar{n}$ intermendio tra $\bar{e}_3$ ed $\bar{u}_2$, che sia soluzione del precedente sistema, troviamo

$$\bar{n} = \frac{5}{20 + 12\sqrt{2}}\,\big(\bar{e}_1 + (1+\sqrt{2})\bar{e}_2 + \frac{\sqrt{2}\sqrt[4]{2}}{\sqrt{5}}\,\bar{e}_3\big)\,.$$

Effettivamente, la componente dello sforzo normale relativo alla faccia generata da tale $\bar{n}$ è

$$\nu = (\frac{5}{20 + 12\sqrt{2}})^2\,(2 - 2(1+\sqrt{2}) + 5\frac{2\sqrt{2}}{5}) = 0\,.$$

2.1.6 Cambiamento di base

Consideriamo una nuova base ortonormale $\mathcal{B}' := (\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \bar{e}'_3)$.

Tale base è espressa, con riferimento alla precedente base ortonormale $\mathcal{B} := (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$, mediante una formula del tipo

$$\begin{aligned}
\bar{e}'_1 &= S'^1_1\,\bar{e}_1 + S'^2_1\,\bar{e}_2 + S'^3_1\,\bar{e}_3\\
\bar{e}'_2 &= S'^1_2\,\bar{e}_1 + S'^2_2\,\bar{e}_2 + S'^3_2\,\bar{e}_3\\
\bar{e}'_3 &= S'^1_3\,\bar{e}_1 + S'^2_3\,\bar{e}_2 + S'^3_3\,\bar{e}_3\,,
\end{aligned}$$

dove la matrice $S'^{i}_{\;j}$ è ortogonale e quindi è invertibile e soddisfa l'uguaglianza

$$(S^{h}_{k}) := (S'^{i}_{\;j})^{-1} = (S'^{i}_{\;j})^{t}\,.$$

Allora, secondo le regole generali del cambiamento di base, la matrice del tensore delle tensioni nella nuova base $\mathcal{B}'$ è

$$\begin{aligned}
(\sigma'^{i}_{\;j}) &= (\sigma'_{ij}) \\
&= \big(\sigma(\bar{e}'_j)\big)\cdot \bar{e}'_i \\
&= \big(\sigma(\sum_k S'^{k}_{\;j}\,\bar{e}_k)\big)\cdot (\sum_h S'^{k}_{\;i}\,\bar{e}_h) \\
&= \sum_{h,k} S'^{k}_{\;j} S'^{h}_{\;i}\,\big(\sigma(\bar{e}_k\big)\cdot \bar{e}_h \\
&= \sum_{h,k} S'^{k}_{\;j} S'^{h}_{\;i}\,\sigma_{hk} \\
&= \sum_{h,k} S'^{k}_{\;j} S'^{h}_{\;i}\,\sigma^{h}_{k} \\
&= \sum_{h,k} S^{i}_{h}\,\sigma^{h}_{k} S'^{k}_{\;j}\,.
\end{aligned}$$

Per semplicità, limitiamoci a considerare la nuova base $\mathcal{B}'$ ottenuta mediante una rotazione dell'angolo ϕ attorno all'asse $\bar{e}_3$.

Consideriamo dunque la matrice ortogonale

$$(S'^{i}_{\;j}) = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\,,$$

la cui inversa è

$$(S^{h}_{k}) := (S'^{i}_{\;j})^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\,,$$

e la nuova base $\mathcal{B}' := (\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \bar{e}'_3)$ data da

$$\begin{aligned}
\bar{e}'_1 &= \cos\phi\,\bar{e}_1 + \sin\phi\,\bar{e}_2 \\
\bar{e}'_2 &= -\sin\phi\,\bar{e}_1 + \cos\phi\,\bar{e}_2 \\
\bar{e}'_3 &= \bar{e}_3\,.
\end{aligned}$$

Quindi, abbiamo

$$
\begin{aligned}
({\sigma'}^i_{\ j}) &= \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 2\cos^2\phi + \sin 2\phi & \sin 2\phi - \cos 2\phi & 0 \\ \sin 2\phi - \cos 2\phi & 2\sin^2\phi - \sin 2\phi & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Verifichiamo l'invarianza degli "invarianti al cambiamento di base, considerando le tre basi

$$\mathcal{B} = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)\,, \qquad \mathcal{B}_a = (\mathrm{ver}\,\bar{u}_1, \mathrm{ver}\,\bar{u}_2, \bar{e}_3)\,, \qquad \mathcal{B}' = (\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \bar{e}'_3)\,.$$

Inoltre, verifichiamo che gli "invarianti coincidono con i coefficienti del polinomio caratteristico (completo) di $\hat{\sigma}$

$$
\begin{aligned}
P(\lambda) &= a_3\,\lambda^3 + a_2\,\lambda^2 + a_1\,\lambda^1 + a_0\,\lambda^0 \\
&= -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 9\lambda - 5\,.
\end{aligned}
$$

Nei tre casi, il primo invariante, la "traccia di $\hat{\sigma}$, è

$$
\begin{aligned}
\mathrm{tr}\,\hat{\sigma} &= \sum_i \sigma^i_i \ = 2 + 0 + 5 && = 7 \\
&= \sum_i \lambda_i \ = 1 + \sqrt{2} + 1 - \sqrt{2} + 5 && = 7 \\
&= \sum_i {\sigma'}^i_i = 2(\sin^2\phi + \cos^2\phi) + \sin 2\phi - \sin 2\phi + 5 && = 7 \\
&= a_2 && = 7\,.
\end{aligned}
$$

Nei tre casi, il secondo invariante di $\hat{\sigma}$ è

$$
\begin{aligned}
\Delta_2 &= \det\begin{pmatrix} \sigma^1_1 & \sigma^1_2 \\ \sigma^2_1 & \sigma^2_2 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} \sigma^1_1 & \sigma^1_3 \\ \sigma^3_1 & \sigma^3_3 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} \sigma^2_2 & \sigma^2_3 \\ \sigma^3_2 & \sigma^3_3 \end{pmatrix} = -1 + 10 + 0 && = 9 \\
&= \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 = (1+\sqrt{2})\,(1-\sqrt{2}) + (1+\sqrt{2})\,5 + (1-\sqrt{2})\,5 && = 9 \\
&= \det\begin{pmatrix} {\sigma'}^1_1 & {\sigma'}^1_2 \\ {\sigma'}^2_1 & {\sigma'}^2_2 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} {\sigma'}^1_1 & {\sigma'}^1_3 \\ {\sigma'}^3_1 & {\sigma'}^3_3 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} {\sigma'}^2_2 & {\sigma'}^2_3 \\ {\sigma'}^3_2 & {\sigma'}^3_3 \end{pmatrix} = -1 + 5 + 5 && = 9 \\
&= -a_1 && = 9\,.
\end{aligned}
$$

Nei tre casi, il terzo invariante, il “determinante di $\hat{\sigma}$, è

$$\begin{aligned}\det\hat{\sigma} &= \det(\sigma^i_i) &&= 5(-1) &&= -5\\ &= \lambda_1\lambda_2\lambda_3 &&= (1+\sqrt{2})\,(1-\sqrt{2})\,5 &&= -5\\ &= \det({\sigma'}^i_i) &&= (-1)5 &&= -5\\ &= a_0 &&&&= -5\,.\end{aligned}$$

CAPITOLO 3

CINEMATICA

3.1 Velocità e grandezze derivate

Ci si riferisca ad un sistema di coordinate cartesiano (x, y, z), il cui centro è il punto $o \in \boldsymbol{P}$, ed alla base ortonormale associata $\mathcal{B} := (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3) \equiv (\bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{e}_z)$.

Consideriamo un continuo la cui velocità sia, in forma euleriana,

$$\bar{\mathrm{v}} = \frac{1}{\tau}\, e^{-t/\tau}\big((x+y)\,\bar{e}_x + (y-x)\,\bar{e}_y + z\,\bar{e}_z\big)\,,$$

dove $\tau \in \mathrm{I\!R}^+$ è una costante che ha le dimensioni di un tempo.

Calcoliamo le principali grandezze cinematiche derivate da tale velocità.

3.1.1 Quadrato della velocità

Il prodotto scalare della velocità per sé stessa è

$$\bar{\mathrm{v}}^2 := \bar{\mathrm{v}} \cdot \bar{\mathrm{v}} = \frac{1}{\tau^2}\, e^{-2t/\tau}(2\,x^2 + 2\,y^2 + z^2)\,.$$

3.1.2 Derivata parziale della velocità rispetto al tempo

La derivata parziale della velocità rispetto al tempo è

$$\partial_0 \bar{\mathrm{v}} := \partial_t \bar{\mathrm{v}} = -\frac{1}{\tau^2}\, e^{-t/\tau}\big((x+y)\,\bar{e}_x + (y-x)\,\bar{e}_y + z\,\bar{e}_z\big)\,.$$

Dunque, il moto non è stazionario, perché $\partial_0 \bar{\mathrm{v}} \neq 0$.

3.1.3 Derivata parziale della velocità rispetto allo spazio

La derivata parziale della velocità rispetto allo spazio è

$$\overset{\vee}{D}\bar{\mathrm{v}} = \frac{1}{\tau}\, e^{-t/\tau}\big((Dx + Dy) \otimes \bar{e}_x + (Dy - Dx) \otimes \bar{e}_y + Dz \otimes \bar{e}_z\big)\,,$$

ossia, in forma matriciale,

$$(\partial_j \mathrm{v}^i) = \frac{1}{\tau}\, e^{-t/\tau} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Dunque, il moto non è traslatorio, perché $\overset{\vee}{D}\bar{\mathrm{v}} \neq \mathrm{id}$.

3.1.4 Accelerazione

L'accelerazione, ossia la derivata totale rispetto al tempo della velocità è data dalla formula

$$\bar{\mathrm{a}} = \partial_0 \bar{\mathrm{v}} + \overset{\vee}{D}\bar{\mathrm{v}}(\bar{\mathrm{v}}) .$$

D'altra parte, abbiamo

$$\begin{aligned} \overset{\vee}{D}\bar{\mathrm{v}}(\bar{\mathrm{v}}) &= \frac{1}{\tau^2}\, e^{-2t/\tau} \big((Dx + Dy) \otimes \bar{e}_x + (Dy - Dx) \otimes \bar{e}_y + Dz \otimes \bar{e}_z\big) \\ &\qquad \big((x+y)\,\bar{e}_x + (y-x)\,\bar{e}_y + z\,\bar{e}_z\big) \\ &= \frac{1}{\tau^2}\, e^{-2t/\tau} (2\,y\,\bar{e}_x - 2\,x\,\bar{e}_y + z\,\bar{e}_z) , \end{aligned}$$

ossia, in forma matriciale,

$$(\partial_j \mathrm{v}^i)(\mathrm{v}^j) = \frac{1}{\tau^2}\, e^{-2t/\tau} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x+y \\ y-x \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{\tau^2}\, e^{-2t/\tau} \begin{pmatrix} 2\,y \\ -2\,x \\ z \end{pmatrix} .$$

Pertanto, otteniamo

$$\bar{\mathrm{a}} = -\frac{1}{\tau^2}\, e^{-t/\tau} \big((x+y)\,\bar{e}_x + (y-x)\,\bar{e}_y + z\,\bar{e}_z\big) + \frac{1}{\tau^2}\, e^{-2t/\tau} (2\,y\,\bar{e}_x - 2\,x\,\bar{e}_y + z\,\bar{e}_z) .$$

3.1.5 Tensore delle deformazioni infinitesime

Il tensore delle deformazioni infinitesime è dato dalla formula

$$\underline{\epsilon} = \tfrac{1}{2}\,(\partial_i \mathrm{v}_j + \partial_j \mathrm{v}_i)\, Dx^i \otimes Dx^j ,$$

ossia, in componenti, dalla formula

$$\epsilon_{ij} = \tfrac{1}{2}\,(\partial_i \mathrm{v}_j + \partial_j \mathrm{v}_i) .$$

Pertanto, otteniamo

$$\underline{\epsilon} = \frac{1}{\tau}\, e^{-t/\tau} \big(Dx \otimes Dx + Dy \otimes Dy + Dz \otimes Dz\big) ,$$

ossia, in forma matriciale,

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{\tau}\, e^{-t/\tau} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ,$$

ossia, in componenti,

$$\epsilon_{11} = \frac{1}{\tau}\, e^{-t/\tau} , \qquad \epsilon_{22} = \frac{1}{\tau}\, e^{-t/\tau} , \qquad \epsilon_{33} = \frac{1}{\tau}\, e^{-t/\tau} ,$$
$$\epsilon_{12} = \epsilon_{21} = \epsilon_{23} = \epsilon_{32} = \epsilon_{13} = \epsilon_{31} = 0 .$$

Dunque, il tensore delle deformazioni infinitesime è isotropo. Le tre componenti del tensore delle deformazioni infinitesime sono positive. Pertanto, il continuo si dilata uniformemente in tutte le direzioni. Però, il valore delle tre componenti diminuisce esponenzialmente nel tempo e quindi la dilatazione rallenta esponenzialmente nel tempo.

3.1.6 Divergenza della velocità

La divergenza della velocità è data dalla formula

$$\operatorname{div} \bar{\mathrm{v}} = \operatorname{tr} \overset{\vee}{D} \bar{\mathrm{v}} = \operatorname{tr} \hat{\epsilon} = \sum_i \partial_i \mathrm{v}^i .$$

Pertanto, otteniamo

$$\operatorname{div} \bar{\mathrm{v}} = \frac{3}{\tau}\, e^{-t/\tau} .$$

La divergenza è positiva. Dunque, durante il continuo si dilata. Però, il valore della divergenza diminuisce esponenzialmente nel tempo e quindi la dilatazione rallenta esponenzialmente nel tempo.

3.1.7 Tensore delle rotazioni infinitesime

Il tensore delle rotazioni infinitesime è dato dalla formula

$$\underset{\sim}{\omega} = \tfrac{1}{2}\, (\partial_i \mathrm{v}_j - \partial_j \mathrm{v}_i)\, Dx^i \otimes Dx^j ,$$

ossia, in componenti, dalla formula

$$\omega_{ij} = \tfrac{1}{2}\, (\partial_i \mathrm{v}_j - \partial_j \mathrm{v}_i) .$$

Pertanto, otteniamo

$$\underset{\sim}{\omega} = \frac{1}{\tau}\, e^{-t/\tau} \big(- Dx \otimes Dy + Dy \otimes Dx \big) ,$$

ossia, in forma matriciale,

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{\tau}\, e^{-t/\tau} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ,$$

ossia, in componenti,

$$\omega_{12} = -\omega_{21} = -1\,,$$
$$\omega_{11} = \omega_{22} = \omega_{33} = 0\,, \qquad \omega_{23} = \omega_{32} = \omega_{13} = \omega_{31} = 0\,.$$

3.1.8 Velocità angolare

La velocità angolare è data dalla formula

$$\bar{\Omega} = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{rot}\,\bar{\nu}\,,$$

ossia, in componenti, dalla formula

$$\begin{aligned} \Omega^1 &= \omega_{23} = \tfrac{1}{2}\,(\partial_2 \nu_3 - \partial_3 \nu_2)\,, \\ \Omega^2 &= \omega_{31} = \tfrac{1}{2}\,(\partial_3 \nu_1 - \partial_1 \nu_3)\,, \\ \Omega^3 &= \omega_{12} = \tfrac{1}{2}\,(\partial_1 \nu_2 - \partial_2 \nu_1)\,. \end{aligned}$$

Pertanto, otteniamo

$$\begin{aligned} \bar{\Omega} &= \frac{1}{2\,\tau}\, e^{-t/\tau} \det \begin{pmatrix} \bar{e}_x & \bar{e}_y & \bar{e}_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ x+y & y-x & z \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{\tau}\, e^{-t/\tau}\, \bar{e}_z\,. \end{aligned}$$

Dunque, il continuo ruota intorno all'asse delle z. Inoltre, il modulo della velocità angolare diminuisce esponenzialmente nel tempo.

3.1.9 Descrizione qualitativa del moto

Il moto ha una componente di espansione isotropa ed una componente di rotazione attorno all'asse delle z. Entrambe le componenti diminuiscono esponenzialmente nel tempo.

3.2 Equazione di continuità

Supponiamo inoltre che la densità di massa sia, in forma euleriana,

$$\mu = \mu_0\, \frac{r_0^3}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = \mu_0\, \frac{r_0^3}{r^3}\,,$$

dove $\mu_0 \in \mathrm{I\!R}^+$ è una costante che ha le dimensioni di una densità di massa ed $r_0 \in \mathrm{I\!R}^+$ è una costante che ha le dimensioni di una lunghezza.

Dunque, la densità di massa decresce radialmente con una legge inversamente proporzionale al cubo della distanza dal centro delle coordinate o.

Inoltre, in ogni posizione fissata, la densità di massa non varia nel tempo.

Si noti che la densità di massa è singolare (tende all'infinito) in o.

Perciò, questo punto va escluso dalle nostre considerazioni.

Calcoliamo le derivate di tale densità di massa e verifichiamo l'equazione di continuità.

3.2.1 Derivata parziale rispetto al tempo della densità di massa

La derivata parziale rispetto al tempo della densità di massa è nulla

$$\partial_0 \mu = \partial_t \mu = 0 \,.$$

3.2.2 Derivata parziale rispetto allo spazio della densità di massa

La derivata parziale rispetto allo spazio della densità di massa è

$$\overset{\vee}{D}\mu = -3\, \mu_0\, r_0^3\, (x^2 + y^2 + z^2)^{-5/2}\, (x\, Dx + y\, Dy + z\, Dz) \,.$$

3.2.3 Derivata totale rispetto al tempo della densità di massa

La derivata totale rispetto al tempo della densità di massa è

$$\begin{aligned} \delta\mu &= \partial_0 \mu + \overset{\vee}{D}\mu(\bar{\mathrm{v}}) \\ &= \overset{\vee}{D}\mu(\bar{\mathrm{v}}) \,. \end{aligned}$$

Pertanto, otteniamo

$$\begin{aligned} \delta\mu &= -3\, \frac{1}{\tau}\, \mu_0\, r_0^3\, (x^2 + y^2 + z^2)^{-5/2}\, (x^2 + y^2 + z^2)\, e^{-t/\tau} \\ &= -3\, \frac{1}{\tau}\, \mu_0\, r_0^3\, (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}\, e^{-t/\tau} \\ &= -3 \frac{1}{\tau}\, \mu\, e^{-t/\tau} \,. \end{aligned}$$

3.2.4 Verifica dell'equazione di continuità

L'equazione di continuità, in forma lagrangiana,

$$\delta\mu + \mu \operatorname{div} \bar{\mathrm{v}} = 0$$

è verificata.

Infatti, abbiamo

$$\begin{aligned} \delta\mu &= -3\frac{1}{\tau}\,\mu\, e^{-t/\tau} \\ \mu \operatorname{div} \bar{\mathrm{v}} &= 3\frac{1}{\tau}\,\mu\, e^{-t/\tau} \,. \end{aligned}$$

Considerando l'equazione di continuità in forma euleriana,

$$\partial_0\mu + \operatorname{div}(\mu\,\bar{\mathrm{v}}) = 0\,,$$

la precedente verifica dell'equazione di continuità e luguaglianza $\partial_0\mu = 0$ danno

$$\operatorname{div}(\mu\,\bar{\mathrm{v}}) = \overset{\vee}{D}\mu(\bar{\mathrm{v}}) + \mu \operatorname{div} \bar{\mathrm{v}} = 0\,.$$

Osserviamo che la componente rotatoria del moto non contribuisce al bilancio dell'equazione di continuità.

3.2.5 Verifica dell'equazione di continuità in forma integrale

Possiamo fare anche una verifica dell'equazione di continuità in forma integrale.

A tale scopo, consideriamo due superfici sferiche S_1 ed S_2 con centro in o e raggio, rispettivamente, r_1 ed r_2, con $r_2 > r_1$. Sia $V_{(12)}$ la corona sferica delimitata dalle due sfere. Le due superfici sferiche S_1 ed S_2 costituiscono il bordo della corona sferica $V_{(12)}$. Orientiamo tale bordo con la normale uscente; perciò, S_2 è orientata secondo la normale $\bar{n}_2$ uscente da o ed S_1 è orientata secondo la normale $\bar{n}_1$ rivolta verso o.

Per l'equazione di continuità, in forma euleriana, e per il teorema di Gauss, abbiamo

$$-\int_{V_{(12)}} \partial_0\mu\, d\mathcal{V} = \int_{V_{(12)}} \operatorname{div}(\mu\,\bar{\mathrm{v}})\, d\mathcal{V} = \int_{S_2} \mu\,\bar{\mathrm{v}}\cdot\bar{n}_2\, d\mathcal{S} + \int_{S_1} \mu\,\bar{\mathrm{v}}\cdot\bar{n}_1\, d\mathcal{S}\,.$$

Questa uguaglianza di bilancio esprime la conservazione della massa. Infatti, l'integrale di volume

$$I_{V_{(12)}} := \int_{V_{(12)}} \operatorname{div}(\mu\,\bar{\mathrm{v}})\, d\mathcal{V}$$

esprime la velocità di diminuizione della massa totale nel volume $V_{(12)}$, mentre l'integrale di superficie

$$I_{S_2} + I_{S_1} := \int_{S_2} \mu\,\bar{\mathrm{v}}\cdot\bar{n}_2\, d\mathcal{S} + \int_{S_1} \mu\,\bar{\mathrm{v}}\cdot\bar{n}_1\, d\mathcal{S}$$

esprime il flusso uscente di massa per unità di tempo.

Nel nostro caso, abbiamo

$$\operatorname{div}(\mu\,\bar{\mathrm{v}}) = 0\,,$$

per cui otteniamo

$$I_{V_{(12)}} = 0\,,$$

ossia la massa totale del volume $V_{(12)}$ è costante nel tempo (questo era anche evidente per il fatto che $\partial_0\mu = 0$).

D'altra parte, abbiamo anche

$$\begin{aligned} I_{S_2} &= \mu_0\,\frac{r_0^3}{r_2^2}\,\frac{1}{\tau}\;e^{-t/\tau}\int_{S_2} d\mathcal{S} \\ &= \mu_0\,\frac{r_0^3}{r_2^2}\,\frac{1}{\tau}\;e^{-t/\tau}\,4\,\pi\,r_2^2 \\ &= \mu_0\,r_0^3\frac{1}{\tau}\;e^{-t/\tau}\,4\,\pi \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} I_{S_1} &= -\mu_0\,\frac{r_0^3}{r_1^2}\,\frac{1}{\tau}\;e^{-t/\tau}\int_{S_2} d\mathcal{S} \\ &= -\mu_0\,\frac{r_0^3}{r_1^2}\,\frac{1}{\tau}\;e^{-t/\tau}\,4\,\pi\,r_1^2 \\ &= -\mu_0\,r_0^3\frac{1}{\tau}\;e^{-t/\tau}\,4\,\pi\,. \end{aligned}$$

Pertanto, otteniamo

$$I_{S_2} + I_{S_1} = 0\,,$$

ossia la massa uscente per unità di tempo dalla superficie S_2 è compensata dalla massa entrante per unità di tempo dalla superficie S_1 .

Dunque, il bilancio è soddisfatto.

Facciamo infine un'osservazione sottile, ma importante.

Se si tentasse di verificare il bilancio di conservazione della massa considerando la sfera V_2 con centro o e bordo S_2 , si otterrebbero dei risultati contraddittori.

Infatti, il flusso uscente sulla superficie S_2 è ben definito e positivo. Questo farebbe supporre che la massa totale nel volume V_2 diminuisse nel tempo, mentre sappiamo che è costante in ogni volume che escluda il punto singolare o .

La contraddizione apparente è dovuta al fatto che il calcolo dell'integrale di volume su tutta la sfera V_2 non è legittimo, perché V_2 contiene il punto singolare dove la densità di massa non è definita (tende all'infinito).

In effetti, tutto avviene come se nel punto singolare o ci fosse una pompa di diametro infinitesimo che immette una quantità finita di massa per unità di tempo, permettendo così di soddisfare il bilancio di conservazione. Questo è suggerito dal fatto che per ogni superficie sferica S_1 , c'è un flusso totale di massa che esce da o , di valore costante rispetto al raggio r_1 .

CAPITOLO 4

SISTEMI ELASTICI

4.1 Elasticità lineare isotropa

Consideriamo un continuo elastico isotropo e limitiamoci all'approssimazione lineare della legge costitutiva.

Ci si riferisca ad un sistema di coordinate cartesiano (x, y, z) ed alla base ortonormale associata $\mathcal{B} := (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3) \equiv (\bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{e}_z)$.

Supponiamo che il tensore delle deformazioni infinitesime sia

$$\underline{\epsilon} = \frac{1}{\tau} \left(Dx \otimes Dx + Dy \otimes Dy + \tfrac{1}{2}\, Dx \otimes Dy + \tfrac{1}{2}\, Dy \otimes Dx \right),$$

ossia, in forma matriciale,

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{\tau} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ossia, in componenti,

$$\epsilon_{11} = \frac{1}{\tau}\,, \qquad \epsilon_{22} = \frac{1}{\tau}\,, \qquad \epsilon_{12} = \epsilon_{21} = \frac{1}{2\tau}$$
$$\epsilon_{33} = 0\,, \qquad \epsilon_{23} = \epsilon_{32} = \epsilon_{13} = \epsilon_{31} = 0\,.$$

Il tensore delle deformazioni infinitesime verifica la condizione di integrabilità

$$\partial_{hk}\epsilon_{ij} + \partial_{ij}\epsilon_{hk} = \partial_{hj}\epsilon_{ik} + \partial_{ik}\epsilon_{hj}\,.$$

Infatti, nel nostro caso, tutte le componenti del tensore delle deformazioni infinitesime sono costanti.

La traccia del tensore delle deformazioni infinitesime è

$$\operatorname{tr}\hat{\epsilon} = \frac{2}{\tau}\,.$$

4.1.1 Tensore delle tensioni

Il tensore delle tensioni è dato dalla legge costitutiva

$$\underline{\sigma} = 2\,\mu\,\underline{\epsilon} + \lambda\ \mathrm{tr}\,\hat{\epsilon}\,\underline{g}\,.$$

Pertanto, otteniamo

$$\begin{aligned}\underline{\sigma} &= \frac{2\,\mu}{\tau}\big(Dx\otimes Dx + Dy\otimes Dy + \tfrac{1}{2}\,Dx\otimes Dy + \tfrac{1}{2}\,Dy\otimes Dx\big)\\ &\quad + \frac{2\,\lambda}{\tau}\big(Dx\otimes Dx + Dy\otimes Dy + Dz\otimes Dz\big)\,,\end{aligned}$$

ossia, in forma matriciale,

$$\sigma_{ij} = \frac{2}{\tau}\begin{pmatrix}\lambda+\mu & \mu/2 & 0\\ \mu/2 & \lambda+\mu & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}\,,$$

ossia, in componenti,

$$\epsilon_{11} = \frac{2\,(\lambda+\mu)}{\tau}\,,\qquad \epsilon_{22} = \frac{2\,(\lambda+\mu)}{\tau}\,,\qquad \epsilon_{33} = \frac{2\,\lambda}{\tau}\,,\qquad \epsilon_{12} = \epsilon_{21} = \frac{\mu}{\tau}$$
$$\epsilon_{23} = \epsilon_{32} = \epsilon_{13} = \epsilon_{31} = 0\,.$$

4.1.2 Densità di potenza delle tensioni

La densità di potenza delle tensioni è data dalla formula

$$w = \underline{\sigma}\cdot\underline{\epsilon} = \sum_{ij}\sigma_{ij}\,\epsilon_{ij}\,.$$

Pertanto, otteniamo

$$w = \frac{1}{\tau^2}\,(4\,\lambda + 5\,\mu)\,.$$