Appunti sul significato del rotore

Marco Modugno

Note per gli studenti
Versione: 2016-12-22 - 11:49.

Sommario

Facciamo vedere che il rotore $\operatorname{rot} \bar{v}$ di un campo vettoriale $\bar{v}$ può essere interpretato come il doppio della velocità angolare $\bar{\Omega}$ del moto rigido effettuato dagli "intornini infinitesimi" di un continuo che si muove con velocità $\bar{v}$.

Ulteriori spiegazioni e le espressioni in coordinate possono essere trovate in [1].

Indichiamo lo spazio affine delle posizioni con $\boldsymbol{P}$, lo spazio vettoriale associato dei vettori liberi con $\bar{\boldsymbol{P}}$ e lo spazio affine del tempo con $\boldsymbol{T}$.

1) Consideriamo un moto continuo

$$C : \boldsymbol{T} \times (\boldsymbol{T} \times \boldsymbol{P}) \to \boldsymbol{P} : (s; t, p) \mapsto C(s; t, p) ,$$

dove

- $p \in \boldsymbol{P}$ indica la posizione "iniziale" da cui parte una generica particella,
- $t \in \boldsymbol{T}$ indica l'istante "iniziale" in cui parte la particella che all'istante iniziale t si trova nella posizione iniziale p,
- $s \in \boldsymbol{T}$ l'istante "finale" in cui la particella, che all'istante iniziale t si trova nella posizione iniziale p, arriva alla posizione "finale",
- $C(s; t, p) \in \boldsymbol{P}$ la posizione "finale" in cui arriva all'istante finale s la particella, che all'istante iniziale t si trova nella posizione iniziale p.

2) Sia

$$\bar{v} := \delta C : \boldsymbol{P} \to \bar{\boldsymbol{P}} : (t, p) \mapsto \bar{v}(t, p)$$

il campo di *velocità* del moto continuo, dove δ indica la derivata parziale rispetto al tempo finale s, calcolata all'istante iniziale t.

Dunque, dal moto C ricaviamo la velocià $\bar{v} : \boldsymbol{T} \times \boldsymbol{P} \to \bar{\boldsymbol{P}}$.

Viceversa, dato un qualunque campo vettoriale $\bar{v} : \boldsymbol{T} \times \boldsymbol{P} \to \bar{\boldsymbol{P}}$, esiste, almeno localmente, un unico moto continuo C, il cui campo di velocità sia $\bar{v}$.

3) Sia

$$\hat{J} := \overset{\vee}{D} C : \boldsymbol{T} \times (\boldsymbol{T} \times \boldsymbol{P}) \to L(\bar{\boldsymbol{P}}, \bar{\boldsymbol{P}}) : (s; t, p) \mapsto \overset{\vee}{D} C(s; t, p)$$

l'operatore jacobiano del moto continuo, dove

- $\check{D}$ indica la derivata partiale rispetto alla posizione iniziale p.

L'operatore jacobiano $\check{D}C(s; t, p)$ descrive la trasformazione che subisce, tra l'istante iniziale t e l'istante finale s "l'intornino infinitesimo" del continuo che parte dalla posizione iniziale p all'istante iniziale t.

4) Si può dimostrare che l'operatore jacobiano si decompone univocamente nella composizione

$$\hat{J} = \hat{\mathcal{R}} \circ \hat{\mathcal{D}} ,$$

di un operatore simmetrico $\hat{\mathcal{D}}$ e di un operatore di rotazione $\hat{\mathcal{R}}$.

Corrispondentemente, "l'intornino infinitesimo" centrato nel punto iniziale p compie, tra l'istante iniziale t e l'istante finale s,

- una "trasformazione di deformazione" descritta dall'operatore $\hat{\mathcal{D}}(s; t, p) \in L(\bar{\boldsymbol{P}}, \bar{\boldsymbol{P}})$,
- una "trasformazione rigida" descritta dall'operatore $\hat{\mathcal{R}}(s; t, p) \in L(\bar{\boldsymbol{P}}, \bar{\boldsymbol{P}})$.

5) Possiamo calcolare

- la derivata parziale rispetto al tempo iniziale dell'operatore jacobiano

$$\delta\hat{J} : \boldsymbol{T} \times \boldsymbol{P} \to L(\bar{\boldsymbol{P}}, \bar{\boldsymbol{P}}) : (t, p) \mapsto (\delta\hat{J})(t, p)\,,$$

- la derivata parziale rispetto al tempo iniziale dell'operatore di deformazione

$$\delta\hat{\mathcal{D}} : \boldsymbol{T} \times \boldsymbol{P} \to L(\bar{\boldsymbol{P}}, \bar{\boldsymbol{P}}) : (t, p) \mapsto (\delta\hat{\mathcal{D}})(t, p)\,,$$

- la derivata parziale rispetto al tempo iniziale dell'operatore di rotazione

$$\delta\hat{\mathcal{R}} : \boldsymbol{T} \times \boldsymbol{P} \to L(\bar{\boldsymbol{P}}, \bar{\boldsymbol{P}}) : (t, p) \mapsto (\delta\hat{\mathcal{R}})(t, p)\,,$$

dove δ indica la derivata parziale rispetto al tempo finale s , calcolata all'istante iniziale t .

Si può dimostrare che
- $\delta\hat{\mathcal{D}}$ è un operatore simmetrico e quindi ha 6 componenti indipendenti,
- $\delta\hat{\mathcal{R}}$ è un operatore antisimmetrico e quindi ha 3 componenti indipendenti.

6) Per la regola di Leibniz sulla derivata di una composizione otteniamo l'uguaglianza

$$\delta\hat{J} = \delta\hat{\mathcal{D}} + \delta\hat{\mathcal{R}}\,.$$

Il significato fisico intuitivo di questa uguaglianza è che la trasformazione di ogni intornino infinitesimo del continuo, compiuta in un intervallo di tempo infinitesimo, si decompone univocamente in una deformazione descritta dall'operatore simmetrico $\delta\hat{\mathcal{D}}$ ed in una rotazione descritta dall'operatore antisimmetrico $\hat{\mathcal{R}}$.

7) Possiamo calcolare la derivata parziale rispetto alla posizione iniziale del campo di velocità

$$\check{D}\bar{v} : \boldsymbol{T} \times \boldsymbol{P} \to L(\bar{\boldsymbol{P}}, \bar{\boldsymbol{P}}) : (t, p) \mapsto (\check{D}\bar{v})(t, p)\,,$$

dove $\check{D}$ indica la derivata parziale rispetto alla posizione iniziale p .

8) Per il teorema di Schwarz sulle derivate seconde, otteniamo l'uguaglianza

$$\check{D}\bar{v} = \check{D}\delta C = \delta\check{D}C = \delta\hat{J}\,.$$

9) L'operatore $\check{D}v \in L(\bar{\boldsymbol{P}}, \bar{\boldsymbol{P}})$ si decompone univocamente nella somma di un operatore simmetrico e di un operatore antisimmetrico

$$\check{D}v = \hat{\epsilon} + \hat{\omega}\,.$$

Inoltre, le uguaglianze

$$\delta\hat{J} = \delta\hat{\mathcal{D}} + \delta\hat{\mathcal{R}} \qquad \text{e} \qquad \check{D}\bar{v} = \delta\hat{J}$$

implicano

$$\hat{\epsilon} = \delta\hat{\mathcal{D}} \qquad \text{e} \qquad \hat{\omega} = \delta\hat{\mathcal{R}} .$$

Quindi otteniamo l'uguaglianza

$$\check{D}v = \delta\hat{\mathcal{D}} + \delta\hat{\mathcal{R}} .$$

In altre parole, la derivata parziale del campo di velocità $\bar{v}$ rispetto alla posizione iniziale si decompone univocamente nella somma di un operatore simmetrico $\delta\hat{\mathcal{D}}$ e di un operatore antisimmetrico $\delta\hat{\mathcal{R}}$, che descrivono, rispettivamente la deformazione e la rotazione che subiscono gli intornini infinitesimi del continuo in un intervallo di tempo infinitesimo.

10) L'operatore antisimmetrico $\hat{\mathcal{R}}$ ha 3 componenti indipendenti e quindi può essere rappresentato univocamente da un campo vettoriale

$$\bar{\Omega} : \boldsymbol{P} \to \bar{\boldsymbol{P}} ,$$

caratterizzato dall'uguaglianza

$$\bar{\Omega} \times \bar{h} = \hat{\omega}(\bar{h}) , \qquad \text{per ogni} \qquad \bar{h} \in \bar{\boldsymbol{P}} .$$

Si può vedere che il campo vettoriale $\bar{\Omega}(t, p)$ risulta essere la velocità angolare all'istente $t \in \boldsymbol{T}$ del moto rigido eseguito dall'intornino infinitesimo centrato in $p \in \boldsymbol{P}$.

Dalle uguaglianze precedenti otteniamo (vedi anche [2])

$$\bar{\Omega} = \tfrac{1}{2} \operatorname{rot} \bar{v} := \tfrac{1}{2} * A\big(g^\flat(\check{D}\bar{v}\big) = \tfrac{1}{2} * \big(dg^\flat(\bar{v})\big) .$$

11) Dunque, il rotore $\operatorname{rot}\bar{v}$ di un campo vettoriale $\bar{v}$ può essere interpretato come il doppio della velocità angolare $\bar{\Omega}$ del moto rigido effettuato dagli intornini infinitesimi di un continuo che si muove con velocità $\bar{v}$.

12) Per esempio, consideriamo il campo vettoriale $\bar{v}$ della velocità di un moto rigido con velocità angolare $\bar{\Omega}$, definito mediante l'uguaglianza

$$\bar{v}(t, p) := \bar{v}_o(t) + \bar{\Omega}(t) \times \big(p - o(t)\big) ,$$

dove

- $o : \boldsymbol{T} \to \boldsymbol{P}$ è il moto di una particella pilota del moto rigido,
- $\bar{v}_o : \boldsymbol{T} \to \bar{\boldsymbol{P}}$ è la velocità della particella pilota,
- $\bar{\Omega} : \boldsymbol{T} \to \bar{\boldsymbol{P}}$ è la velocità angolare del moto rigido.

Si vede facilmente che vale l'uguaglianza

$$\operatorname{rot} \bar{v} = 2\,\bar{\Omega} .$$

Riferimenti bibliografici

[1] M. MODUGNO: *Introduzione alla meccanica dei sistemi continui*, Note per gli studenti, 2015 `www.dma.unifi.it/∼modugno`.

[2] M. MODUGNO: *Appunti sulla generalizzazione del rotore*, Note per gli studenti, 2016 `www.dma.unifi.it/∼modugno`.