Appunti sulla generalizzazione del rotore

Marco Modugno

Note per gli studenti
Versione: 2016-12-20 - 15:28.

Sommario

Il concetto usuale di rotore, $\operatorname{rot} F$ di un campo vettoriale F, è definito in uno spazio affine euclideo di dimensione 3. È ben noto che l'annullarsi del rotore, $\operatorname{rot} F$ di un campo vettoriale F, è condizione necessaria e sufficiente affinché tale campo vettoriale F sia localmente il gradiente di un potenziale, $F = \operatorname{grad} U$.

È quindi naturale domandarsi se è possibile generalizzare il concetto di rotore in uno spazio affine euclideo di dimensione diversa da 3, in modo che continui a valere la precedente proprietà.

La risposta è positiva: è possibile generalizzare il concetto di rotore in uno spazio affine euclideo di dimensione $n \geq 2$. Anzi, senza nessuna difficoltà, tale generalizzazione vale per ogni varietà riemanniana (spazio curvo) di dimensione $n \geq 2$.

Il rotore, così generalizzato, $\operatorname{rot} F$, risulta essere un "tensore antisimmetrico" di grado $r = n - 2$, quindi rappresentato da una matrice antisimmetrica con r indici. In particolare, se $n = 3$, abbiamo $r = 1$, quindi $\operatorname{rot} F$ è un campo vettoriale; se $n = 2$, abbiamo $r = 0$, quindi $\operatorname{rot} F$ è uno scalare.

Per comprendere questi appunti, lo studente dovrebbe conoscere il concetto di tensore e di spazio vettoriale duale. In assenza di tali concetti, lo studente può farsi un'idea approssimativa degli sviluppi qui esposti.

1 Tensori e tensori antisimmetrici

Ricordiamo la notazione essenziale dei tensori (vedi, per esempio, [10]).

Dato uno spazio vettoriale $\boldsymbol{V}$, denotiamo con

$$\otimes^r \boldsymbol{V} \qquad \text{e} \qquad \Lambda^r \boldsymbol{V} \subset \otimes^r \boldsymbol{V}$$

il prodotto tensoriale di grado r di $\boldsymbol{V}$ ed il suo sottospazio dei tensori antisimmetrici di grado r .

Inoltre, dati r vettori $v_1, \dots, v_r \in \boldsymbol{V}$, denotiamo il loro prodotto tensoriale con

$$v_1 \otimes \dots \otimes v_r \,, \tag{1}$$

il loro prodotto esterno (ossia prodotto tensoriale antisimmetrico) con

$$v_1 \wedge \dots \wedge v_r := \sum_\sigma \epsilon(\sigma)\, v_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes v_{\sigma(r)} \,, \tag{2}$$

dove la somma è estesa alle permutazioni σ di $(1, \dots, r)$ ed $\epsilon(\sigma)$ indica il segno della permutazione σ .

2 Varietà differenziabile

Ricordiamo la notazione essenziale delle varietà differenziabili (vedi, per esempio, [10, 3, 5]).

Consideriamo una varietà differenziabile $\boldsymbol{M}$ di dimensione $n \geq 2$. In particolare, $\boldsymbol{M}$ può essere uno spazio affine o uno spazio vettoriale.

Indichiamo un sistema di coordinate (locale), eventualmente curvilineo, con

$$(x^i) \equiv (x^1, \dots, x^n) : \boldsymbol{M} \to \mathrm{I\!R}^n ,$$

e, corrispondentemente, le curve coordinate (locali) con

$$x_i : \mathrm{I\!R} \times \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{M} .$$

Indichiamo lo spazio tangente di $\boldsymbol{M}$ ed il suo duale con $T\boldsymbol{M}$ e $T^*\boldsymbol{M}$.

In particolare,

1) se $\boldsymbol{M}$ è uno spazio affine $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{A}$, associato allo spazio vettoriale $\boldsymbol{V}$, allora, abbiamo

$$T\boldsymbol{M} = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{V} \qquad \text{e} \qquad T^*\boldsymbol{M} = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{V}^* ;$$

2) se $\boldsymbol{M}$ è uno spazio vettoriale $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{V}$, allora, abbiamo

$$T\boldsymbol{M} = \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{V} \qquad \text{e} \qquad T^*\boldsymbol{M} = \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{V}^* .$$

I campi dei vettori tangenti alle curve coordinate

$$\partial x_i : \boldsymbol{M} \to T\boldsymbol{M}$$

costituiscono una base (locale) dei campi vettoriali $X : \boldsymbol{M} \to T\boldsymbol{M}$ ed i differenziali delle funzioni coordinate

$$dx^i : \boldsymbol{M} \to T^*\boldsymbol{M}$$

costituiscono una base (locale) delle forme differenziali $\alpha : \boldsymbol{M} \to T^*\boldsymbol{M}$.

2.1 Definizione. Il *differenziale esterno* di 1–forma $\alpha : \boldsymbol{M} \to T^*\boldsymbol{M}$ è definito come la 2–forma esterna (cioè il tensore antisimmetrico del 2-ndo ordine)

$$d\alpha : \boldsymbol{M} \to \Lambda^2 T^*\boldsymbol{M} \subset \otimes^2 T^*\boldsymbol{M} ,$$

la cui espressione in coordinate è

$$\begin{aligned} d\alpha &= \sum_{i,j} \partial_i \alpha_j \, dx^i \wedge dx^j \\ &= \sum_{i,j} \partial_i \alpha_j \, \tfrac{1}{2} \, (dx^i \otimes dx^j - dx^j \otimes dx^i) \, . \square \end{aligned}$$

Si può dimostrare facilmente che la precedente espressione in coordinate è invariante rispetto ad un cambio di coordinate.

3 Forme esatte su una varietà differenziabile

Ricordiamo il concetto di forma esatta (vedi, per esempio, [5]).

3.1 Definizione. Una 1–forma $\alpha : \boldsymbol{M} \to T^*\boldsymbol{M}$ è detta *localmente esatta* se esiste localmente una funzione $f : \boldsymbol{M} \to \mathbb{R}$, tale che localmente valga l'uguaglianza

$$\alpha = df\,,$$

cioè, in coordinate,

$$\alpha_i = \partial_i f\,. \square$$

3.2 Lemma. [Poincaré] Una 1–forma $\alpha : \boldsymbol{M} \to T^*\boldsymbol{M}$ è localmente esatta se e solo se

$$d\alpha = 0\,,$$

ossia se e solo se, in coordinate,

$$\partial_i \alpha_j = \partial_j \alpha_i\,.$$

DIMOSTRAZIONE. Per la dimostrazione, vedi, per esempio, [5]). QED

4 Varietà riemanniane

Ricordiamo il conectto di varietà riemanniana e discutiamo alcuni oggetti geometrici che possono essere ricavati dalla metrica (vedi, per esempio, [1, 2, 3, 4, 8, 9, 12]).

Supponiamo ora che la varietà differenziabile $\boldsymbol{M}$ sia *riemanniana*, cioè dotata di una metrica definita positiva

$$g : \boldsymbol{M} \to T^*\boldsymbol{M} \otimes T^*\boldsymbol{M} ,$$

la cui espressione in coordinate è

$$g = \sum_{ij} g_{ij}\, dx^i \otimes dx^j .$$

In particolare, $\boldsymbol{M}$ può essere uno spazio affine euclideo o uno spazio vettoriale euclideo. Nel caso particolare di un sistema di coordinate cartesiano abbiamo

$$g_{ij} = \delta_{ij} .$$

La metrica g induce alcuni oggetti di nostro interesse.

1) Innanzitutto introduciamo gli *isomorfismi musicali*.

4.1 Proposizione. La metrica g induce un isomorfismo lineare (tra 1–forme e vettori)

$$g^\flat : T\boldsymbol{M} \to T^*\boldsymbol{M} ,$$

dato da

$$\big(g^\flat(Y)\big)(X) = g(Y, X) , \qquad \text{per ogni} \qquad X, Y : \boldsymbol{M} \to T\boldsymbol{M} .$$

L'espressione in coordinate di tale isomorfismo è

$$\big(g^\flat(Y)\big)_i = \sum_{ij} g_{ij}\, Y^j .$$

L'inverso dell'isomorfismo $g^\flat : T\boldsymbol{M} \to T^*\boldsymbol{M}$ è l'isomorfismo

$$g^\sharp : T^*\boldsymbol{M} \to T\boldsymbol{M} ,$$

la cui espressione in coordinate è

$$\big(g^\sharp(\alpha)\big)^i = \sum_{ij} g^{ij}\, \alpha_j ,$$

dove abbiamo posto

$$(g^{ij}) := (g_{ij})^{-1} . \square$$

Nel caso particolare di un sistema di coordinate cartesiano abbiamo

$$\big(g^\flat(Y)\big)_i = Y^i \qquad \text{e} \qquad \big(g^\sharp(\alpha)\big)^i = \alpha_j \,.$$

2) Poi, supponiamo che la varietà sia orientabile e scegliamo una delle due orientazioni. In tal caso, introduciamo la *forma volume* ed il *volume duale*.

4.2 Proposizione. La metrica g e la scelta dell'orientazione positiva inducono una *forma volume*

$$\eta : \boldsymbol{M} \to \Lambda^n T^* \boldsymbol{M} \,,$$

caratterizzata, in ogni punto $p \in \boldsymbol{M}$, dalla proprietà

$$\eta(b_1, \dots, b_n) = 1 \,,$$

per una qualunque base ortonormale orientata positivamente

$$(b_1, \dots, b_n) : \boldsymbol{M} \to (T\boldsymbol{M})^n \,.$$

L'espressione in coordinate di η è

$$\eta = \sqrt{\det(g_{ij})}\, dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \,.$$

Il volume duale di tale forma volume è il tensore antisimmetrico

$$\bar\eta : \boldsymbol{M} \to \Lambda^n T\boldsymbol{M} \,,$$

caratterizato dalla proprietà

$$\eta\,(\bar\eta) = 1 \,.$$

L'espressione in coordinate di $\bar\eta$ è

$$\bar\eta = \frac{1}{\sqrt{\det(g_{ij})}}\, \partial x_1 \wedge \dots \wedge \partial x_n \,. \square$$

Nel caso particolare di un sistema di coordinate cartesiano abbiamo

$$\eta = dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \qquad \text{e} \qquad \bar\eta = \partial x_1 \wedge \dots \wedge \partial x_n \,.$$

3) Successivamente, introduciamo *l'isomorfismo* $\star$.

4.3 Proposizione. Il volume vettoriale $\bar\eta$ induce l'isomorfismo lineare

$$\star : \Lambda^p T^* \boldsymbol{M} \to \Lambda^{n-p} T\boldsymbol{M} : \alpha := \bar\eta(\alpha) \,,$$

la cui espressione in coordinate è

$$\alpha = \alpha_{i_1 \dots i_p}\, dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \mapsto$$
$$\mapsto \frac{1}{\sqrt{\det(g_{ij})}}\, (-1)^{i_1 - 1} \dots (-1)^{i_p - p}\, \alpha_{i_1 \dots i_p}\, \partial x_1 \wedge \dots \wedge \widehat{\partial x}_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{\partial x}_{i_p} \wedge \dots \wedge \partial x_n\,,$$

dove il simbolo $\widehat{\ }$ significa "omesso". $\square$

4.4 Esempio. Nel caso particolare in cui $n = 3$ e $p = 2$, otteniamo

$$\begin{aligned}\star(\alpha_{ij}\, dx^i \wedge dx^j) &= 2 \star (\alpha_{12}\, dx^1 \wedge dx^2 + \alpha_{13}\, dx^1 \wedge dx^3 + \alpha_{23}\, dx^2 \wedge dx^3) \\ &= 2 \frac{1}{\sqrt{\det(g_{ij})}}\, (\alpha_{12}\, \partial x_3 - \alpha_{13}\, \partial x_2 + \alpha_{23}\, \partial x_1) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\det(g_{ij})}} \sum_{ijh} \epsilon^{ijh}\, \alpha_{ij}\, \partial x_h\,,\end{aligned}$$

dove

$$\epsilon^{ijh} = \begin{cases} 1 & \text{se } (i,j,h) \quad \text{è una permutazione pari} \\ -1 & \text{se } (i,j,h) \quad \text{è una permutazione dispari} \\ 0 & \text{se } (i,j,h) \quad \text{non è una permutazione}\,.\ \square \end{cases}$$

4.5 Esempio. Nel caso particolare in cui $n = 3$ ed α è il differenziale esterno di una 1–forma β, otteniamo

$$\begin{aligned}\star\alpha &= \star(\alpha_{ij}\, dx^i \wedge dx^j) \\ &= \star(\partial_i \beta_j\, dx^i \wedge dx^j) \\ &= \star\big((\partial_1\beta_2 - \partial_2\beta_1)\, dx^1 \wedge dx^2 + (\partial_1\beta_3 - \partial_3\beta_1)\, dx^1 \wedge dx^3 + (\partial_2\beta_3 - \partial_3\beta_2)\, dx^2 \wedge dx^3\big) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\det(g_{ij})}}\, \big(((\partial_1\beta_2 - \partial_2\beta_1)\, \partial x_3 - (\partial_1\beta_3 - \partial_3\beta_1)\, \partial x_2 + (\partial_2\beta_3 - \partial_3\beta_2)\, \partial x_1\big) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\det(g_{ij})}}\, \Big(\sum_{ijh} \epsilon^{ijh}\, \partial_i\beta_j\, \partial x_h\Big)\,.\end{aligned}$$

Possiamo anche scrivere simbolicamente

$$\star d\beta = \det \begin{pmatrix} \partial x_1 & \partial x_2 & \partial x_3 \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{pmatrix}\,.\ \square$$

4) Introduciamo il *gradiente di una funzione.*

4.6 Definizione. Definiamo il *gradiente* di una funzione $f : \boldsymbol{M} \to \mathbb{R}$ come il campo vettoriale

$$\operatorname{grad} f := g^\sharp(df) : \boldsymbol{M} \to T\boldsymbol{M} \,,$$

la cui espressione in coordinate è

$$\operatorname{grad} f = \sum_{ij} g^{ij}\, \partial_i f \, \partial x_j \,. \square$$

Dalla definizione, segue immediatamente che grad f è ortogonale alle superfici di livello della funzione, che è rivolto verso i valori crescenti della funzione e che il suo modulo è dato dalla derivata parziale della funzione nella direzione ortogonale alle superfici di livello.

Nel caso particolare di un sistema di coordinate cartesiano otteniamo la formula usuale

$$\operatorname{grad} f = \partial_i f \, \partial x_i \,.$$

5 Campi vettoriali conservativi

Discutiamo l'equivalenza dei concetti di forma esatta e di campo vettoriale conservativo.

5.1 Nota. Una forma $\alpha : \boldsymbol{M} \to T^*\boldsymbol{M}$ è il differenziale di una funzione $f : \boldsymbol{M} \to \mathbb{R}$ se e solo se

$$g^\sharp(\alpha) = \operatorname{grad} f\,.$$

Pertanto, diciamo che un campo vettoriale $X : \boldsymbol{M} \to T\boldsymbol{M}$ è *conservativo* se e solo se è il gradiente di una funzione $f : \boldsymbol{M} \to \mathbb{R}$, cioè se e solo se

$$X = \operatorname{grad} f\,.$$

DIMOSTRAZIONE. L'affermazione segue immediatamente dalla Definizione 3.1 e dal fatto che $g^\sharp : T^*\boldsymbol{M} \to T\boldsymbol{M}$ è un isomorfismo lineare. QED

6 Rotore generalizzato su una varietà riemanniana

Introduciamo infine il rotore generalizzato di un campo vettoriale.

Se volessimo partire dalla usuale definizione di rotore in coordinate cartesiane, sarebbe ben difficile generalizzare questo concetto per una dimensione maggiore di 3. Invece, la generalizzazione è molto facile se partiamo dalla definizione che fa uso dell'espressione covariante del campo vettoriale iniziale, del differenziale esterno e della contrazione con la forma volume (vedi, per esempio, [10]).

6.1 Definizione. Definiamo il *rotore (generalizzato)* di un campo vettoriale

$$X : \boldsymbol{M} \to T\boldsymbol{M}$$

come il tensore antisimmetrico di grado $n-2$

$$\operatorname{rot} X := \star\left(d(g^\flat(X)\right) : \boldsymbol{M} \to \Lambda^{n-1} T^* \boldsymbol{M}\,,$$

la cui espressione in coordinate è

$$\operatorname{rot} X = \frac{1}{\sqrt{\det(g_{ij})}}\,(-1)^{i+j-1}\,\partial_i X_j\,\partial x_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{\partial x}_i \wedge \ldots \wedge \widehat{\partial x}_j \wedge \ldots \wedge \partial x_n\,,$$

dove abbiamo posto

$$X_j := \sum_{jh} g_{jh} X^h$$

e dove il simbolo $\widehat{\ }$ indica omissione di un fattore. $\square$

6.2 Nota. Per ogni $n \geq 2$, vale l'equivalenza

$$\operatorname{rot} X = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \partial_i X_j = \partial_j X_i\,.$$

DIMOSTRAZIONE. L'equivalenza delle due uguaglianze segue subito dalla loro espressione in coordinate. QED

6.3 Osservazione. È importare notare che la precedente uguaglianza

$$\partial_i X_j = \partial_j X_i$$

è scritta con le componenti covarianti X_i di X e non con le componenti controvarianti X^i.

Naturalmente, se usiamo un sistema di coordinate cartesiano, non è necessario distinguere le componenti covarianti dalle componenti controvarianti. $\square$

6.4 Esempio. Nel caso particolare in cui $n = 2$, otteniamo l'usuale rotore scalare

$$\operatorname{rot} X : \boldsymbol{M} \to \mathbb{R}$$

e l'usuale espressione in coordinate

$$\operatorname{rot} X = \frac{1}{\sqrt{\det(g_{ij})}} \big(\sum_{ijh} \epsilon^{ij} \, \partial_i X_j \big) = \frac{1}{\sqrt{\det(g_{ij})}} (\partial_1 X_2 - \partial_2 X_1) \,,$$

dove

$$X_1 := \sum_{1h} g_{1h} \, X^h \,, \qquad X_2 := \sum_{2h} g_{2h} \, X^h \,.$$

Quindi, abbiamo $\operatorname{rot} X = 0$ se e solo se

$$\partial_2 X_3 = \partial_3 X_2 \,, \qquad \partial_1 X_3 = \partial_3 X_1 \,, \qquad \partial_1 X_2 = \partial_2 X_1 \,. \square$$

6.5 Esempio. Nel caso particolare in cui $n = 3$, otteniamo l'usuale rotore vettoriale

$$\operatorname{rot} X : \boldsymbol{M} \to T\boldsymbol{M}$$

e l'usuale espressione in coordinate

$$\operatorname{rot} X = \frac{1}{\sqrt{\det(g_{ij})}} \big(\sum_{ijh} \epsilon^{ijh} \, \partial_i X_j \, \partial x_h \big) \,,$$

cioè

$$\operatorname{rot} X = \det \begin{pmatrix} \partial x_1 & \partial x_2 & \partial x_3 \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ X_1 & X_2 & X_3 \end{pmatrix} \,,$$

dove

$$X_1 := \sum_{1h} g_{1h} \, X^h \,, \qquad X_2 := \sum_{2h} g_{2h} \, X^h \,, \qquad X_3 := \sum_{3h} g_{1h} \, X^h \,.$$

Quindi, abbiamo $\operatorname{rot} X = 0$ se e solo se

$$\partial_2 X_3 = \partial_3 X_2 \,, \qquad \partial_1 X_3 = \partial_3 X_1 \,, \qquad \partial_1 X_2 = \partial_2 X_1 \,. \square$$

6.6 Esempio. Nel caso particolare in cui $n = 4$, otteniamo

$$\operatorname{rot} X : \boldsymbol{M} \to \Lambda^2 T\boldsymbol{M}$$

e l'espressione in coordinate

$$\operatorname{rot} X = \frac{1}{\sqrt{\det(g_{ij})}} \big(\sum_{ijh} \epsilon^{ijhk} \, \partial_i X_j \, \partial x_h \wedge \partial x_k \big) \,,$$

dove

$$X_1 := \sum_{1h} g_{1h} \, X^h \,, \quad X_2 := \sum_{2h} g_{2h} \, X^h \,, \quad X_3 := \sum_{3h} g_{1h} \, X^h \,, \quad X_4 := \sum_{4h} g_{1h} \, X^h \,.$$

Quindi, abbiamo $\operatorname{rot} X = 0$ se e solo se

$$\begin{aligned} \partial_2 X_3 &= \partial_3 X_2\,, \qquad & \partial_1 X_3 &= \partial_3 X_1\,, \qquad & \partial_1 X_2 &= \partial_2 X_1\,, \\ \partial_1 X_4 &= \partial_4 X_1\,, \qquad & \partial_2 X_4 &= \partial_4 X_2\,, \qquad & \partial_3 X_4 &= \partial_4 X_2\,. \square \end{aligned}$$

Possiamo dunque riformulare il Lemma di Poincaré in termini di campi vettoriali e rotore generalizzato.

6.7 Proposizione. Un campo vettoriale $X : \boldsymbol{M} \to T\boldsymbol{M}$ è localmente il gradiente di una funzione $f : \boldsymbol{M} \to \mathbb{R}$ se e solo se il suo rotore generalizzato è nullo, cioè se e solo se

$$\operatorname{rot} X = 0\,.$$

L'espressione in coordinate della condizione $\operatorname{rot} X = 0$ è

$$\partial_i X_j = \partial_j X_i\,,$$

qualunque sia la dimensione della varietà $n \geq 2$.

Dimostrazione. Dato che $g^\flat$ e $g^\sharp$ sono isomorfismi mutuamente inversi, abbiamo

$$X = \operatorname{grad} f \qquad \Leftrightarrow \qquad g^\flat(X) = df\,.$$

Inoltre, dato che $\star$ è un isomorfismo, abbiamo

$$d\big(g^\flat(X)\big) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \operatorname{rot} X = 0\,.$$

Pertanto, la Proposizione segue immediatamente dal Lemma di Poincaré. $\square$

6.8 Osservazione. Usualmente, in fisica, si rappresentano le forze come campi vettoriali e, conseguentemente, si usano molto i concetti di gradiente e di rotore.

Però, tutta la materia qui trattata sarebbe molto più semplice e naturale se si descrivessero le forze come forme e, conseguentemente, si usasse il differenziale esterno di forme al posto del gradiente e del rotore.

In questo contesto di forme si comprenderebbe anche meglio la legge di moto e la sua relazione con l'equazione di Lagrange. $\square$

Riferimenti bibliografici

[1] R. Abraham, J. E. Marsden: Foundations of mechanics, Addison-Wensley Publishing Company, 2nd edit. 1978.

[2] M.P. do Carmo: *Riemannian geometry*, Birkhäuser, Boston, 1993.

[3] Y. Choquet–Bruhat, C. deWitt-Morette: *Analysis, manifolds and physics*, revised edition, North-Holland, Amsterdam, 1982.

[4] S. Gallot, D. Hulin, J. Lafontaine: *Riemannian geometry*, Springer–Verlag, Berlin, 1990.

[5] C. Godbillon: Géométrie différentielle et mécanique analytique, Hermann, Paris, 1969.

[6] W. Greub: *Linear Algebra*, fourth edition, Springer–Verlag, New York, 1981.

[7] W. Greub: *Multilinear Algebra*, second edition, Springer–Verlag, New York, 1978.

[8] S. Kobayashi, K. Nomizu: *Foundations of differential geometry*, Vol. 1, Interscience Publishers, New York, 1963.

[9] S. Kobayashi, K. Nomizu: *Foundations of differential geometry*, Vol. 2, Interscience Publishers, New York, 1969.

[10] M. Modugno: *Introduzione alla meccanica dei sistemi continui*, Note per gli studenti, 2015 `www.dma.unifi.it/~modugno`.

[11] Pham Mau Quan: *Introduction a la géométrie des variétés différentiables*, Dunod, Paris, 1969.

[12] E. Tonti, E. Nuzzo: Gradiente, rotore, divergenza, Pitagora Editrice, Bologna, 2007.