

**CORSO DI MECCANICA RAZIONALE**

# **Meccanica di una Particella Vincolata**

**CAPITOLO DELLE DISPENSE PER IL  
CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA  
PER L'AMBIENTE ED IL TERRITORIO**

**Marco Modugno**

**5 maggio 2002**

Università di Firenze  
Facoltà di Ingegneria  
Dipartimento di Matematica Applicata  
Via S. Marta 3, 50139 Firenze



## Prefazione

Questo capitolo delle dispense riguarda argomenti che non fanno parte del programma attuale del corso di Meccanica Razionale. Esso tuttavia può essere un utile riferimento per gli studenti che vogliono comprendere la meccanica vincolata nell'ambito dell'approccio usato per gli altri argomenti del corso.

INTRODUZIONE	6
1. GEOMETRIA DELLO SPAZIO VINCOLATO	7
1. Lo spazio delle configurazioni	7
2. La metrica indotta	13
3. Proiezioni parallela ed ortogonale dello spazio tangente	14
4. Derivata dei campi vettoriali	17
2. CINEMATICA VINCOLATA	21
1. Il moto indotto	21
2. La componente parallela dell'accelerazione	22
3. La componente ortogonale dell'accelerazione	26
4. Lo spazio delle fasi vincolato	28
3. DINAMICA VINCOLATA	29
1. La forza attiva	29
2. Forze attive conservative	30
3. La reazione vincolare	31
4. L'equazione di Newton	33

3. MOTI VINCOLATI NOTEVOLI	40
1. Pendolo sferico	40
1. Lo spazio vincolato	40
2. Cinematica	42
3. Dinamica	45
2. Pendolo parabolico	52
1. Lo spazio vincolato	52
2. Cinematica	54
3. Dinamica	59

## Introduzione

In questo capitolo studiamo la dinamica di una particella vincolata a muoversi in un certo sottospazio dello spazio affine ambiente, che chiamiamo spazio delle configurazioni.

Postuliamo che il moto della particella vincolata sia ancora una soluzione della legge di Newton. Ma, affinché la curvatura dello spazio delle configurazioni e la componente ortogonale della forza attiva non obblighino la particella a violare il vincolo durante il moto, postuliamo che il vincolo generi una reazione, che si aggiunge alla forza attiva. In genere, supponiamo di conoscere la componente della reazione parallela allo spazio delle configurazioni; particolarmente importanti sono i vincoli lisci, che generano una reazione tutta ortogonale.

Possiamo decomporre l'equazione di Newton così modificata nelle componenti parallela ed ortogonale allo spazio delle configurazioni, ottenendo un sistema di due equazioni, equivalente a quella originale. Si vede che la prima equazione può essere interpretata come l'equazione di Newton "vista" dallo spazio delle configurazioni. Tale equazione è del tutto analoga all'equazione di moto di una particella libera e permette di determinare il moto a partire da dati iniziali, compatibili con il vincolo. La seconda equazione fornisce immediatamente la componente ortogonale della reazione, come somma di due termini. Il primo è proporzionale alla massa, tiene conto della curvatura dello spazio delle configurazioni e dipende quadraticamente dalla velocità della particella; il secondo termine si oppone alla componente ortogonale della forza attiva.

Questo capitolo presuppone la conoscenza di elementi di geometria differenziale delle sottovarietà degli spazi affini (vedi ). Per comodità del lettore, durante la trattazione degli aspetti meccanici della teoria, richiamiamo alcune nozioni essenziali di tali presupposti.

# 1. Geometria dello spazio vincolato

## 1. Lo spazio delle configurazioni

In questo paragrafo incominciamo con i primi richiami sulla geometria delle sottovarietà e con la loro interpretazione meccanica.

**DEFINIZIONE.** Lo *spazio delle configurazioni* è definito come una sottovarietà

$$Q \subset P$$

di dimensione  $0 \leq l \leq 5$ . +

Indicheremo con

$$\iota : Q \hookrightarrow P$$

l'inclusione naturale.

In questo capitolo supporremo che la particella in esame si muova sullo spazio delle configurazioni  $Q$ .

Il *numero di gradi di libertà* della particella è definito come la dimensione  $l$  di  $Q$ .

Per definizione di sottovarietà (vedi ), esiste (localmente) un sistema di coordinate

$$(x^1, x^2, \dots, x^5) : P \rightarrow \mathbb{R}^5$$

detto *adattato*, tale che  $Q$  sia (localmente) il luogo dei punti che soddisfano le equazioni

$$x^{l+1} = 0, \dots, x^5 = 0,$$

dette il *vincolo*.

Le funzioni  $(x^1, \dots, x^l)$  sono dette *lagrangiane* e le funzioni  $(x^{l+1}, \dots, x^5)$  sono dette *vincolari*.

La restrizione delle funzioni lagrangiane allo spazio delle configurazioni costituisce un sistema di coordinate

$$(q^1, \dots, q^l) \equiv (x^1|_{\mathcal{Q}}, \dots, x^l|_{\mathcal{Q}}) : \mathcal{Q} \rightarrow \mathbb{R}^l$$

detto *lagrangiano indotto*.

**OSSERVAZIONE.** Spesso, il vincolo è realizzato in pratica nel seguente modo.

Il moto  $c : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{P}$  della particella in esame è vincolato mediante dei congegni fisici (fili, aste, superfici, ecc.) che gli impongono di rispettare certe equazioni vincolari

$$f^{l+1} \circ c = 0, \dots, f^5 \circ c = 0 \quad 0 \leq l \leq 5,$$

dove

$$f^{l+1} : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}, \dots, f^5 : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$$

sono certe funzioni (definite almeno localmente) dette *vincolari*.

In altre parole, questi congegni impongono alla particella di non uscire dal sottinsieme  $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}$ , il quale è caratterizzato dalle equazioni

$$f^{l+1} = 0, \dots, f^5 = 0 \quad 1 \leq l \leq 5.$$

Ci si pone allora il problema di sapere se tale sottinsieme  $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}$  è una sottovarietà. Cioè, vogliamo sapere se possiamo completare (almeno localmente) le funzioni vincolari ottenendo un sistema di coordinate adattato a  $\mathcal{Q}$ , cioè se esiste un sistema di coordinate adattato a  $\mathcal{Q}$  del tipo

$$(x^1, \dots, x^l, f^{l+1}, \dots, f^5).$$

Esiste un criterio (basato sul teorema del rango) per provare a rispondere a questo problema. Basta prendere un qualunque sistema di coordinate di  $\mathcal{P}$

$$(\xi^1, \dots, \xi^5)$$

e calcolare la matrice jacobiana

$$J \equiv \left( \frac{\partial f^r}{\partial \xi^s} \right)_{\substack{l+1 \leq r \leq 5 \\ 1 \leq s \leq 5}}.$$

Se la restrizione della matrice  $J$  ai punti di  $\mathcal{Q}$  ha rango massimo  $(5-l)$ , allora è possibile completare le funzioni vincolari ad un sistema di coordinate adattato

tato e  $\mathbf{Q}$  è una sottovarietà.

Se questa matrice non ha rango massimo, allora la risposta è incerta. Infatti, la risposta potrebbe essere effettivamente negativa, oppure potrebbe darsi che il rango non sia massimo per un eccesso di vincoli non indipendenti e che, sostituendo le funzioni vincolari date con altre equivalenti, si ottenga una matrice jacobiana di rango massimo (vedi ).  $\square$

Se

$$f : \mathbf{P} \rightarrow \mathbb{R}$$

è una funzione di  $\mathbf{P}$ , indicheremo con

$$f^\dagger \equiv f \circ \iota : \mathbf{Q} \rightarrow \mathbb{R}$$

la funzione di  $\mathbf{Q}$  ottenuta per restrizione.

In generale, il simbolo " $\dagger$ " sarà riservato ad indicare gli oggetti che "vivono" su  $\mathbf{Q}$  e le applicazioni che proiettano oggetti di  $\mathbf{P}$  su oggetti che "vivono" su  $\mathbf{Q}$ .

Una curva di  $\mathbf{Q}$

$$c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbf{Q}$$

è detta *differenziabile* se, vista come curva di  $\mathbf{P}$

$$c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbf{P},$$

mediante la composizione

$$\mathbb{R} \xrightarrow{c} \mathbf{Q} \xrightarrow{\iota} \mathbf{P},$$

è differenziabile. Inoltre, il *differenziale* di  $c$  è definito da

$$dc \equiv (c, Dc) : \mathbb{R} \rightarrow T\mathbf{P} \equiv \mathbf{P} \times \bar{\mathbf{P}}.$$

Lo *spazio tangente* di  $\mathbf{Q}$  è definito come il sottinsieme

$$T\mathbf{Q} \subset \mathbf{P} \times \bar{\mathbf{P}}$$

costituito dai vettori applicati di  $\mathbf{P}$  che sono tangenti alle curve differenziabili di  $\mathbf{Q}$ . Lo spazio tangente  $T\mathbf{Q}$  risulta essere una sottovarietà di  $T\mathbf{P} \equiv \mathbf{P} \times \bar{\mathbf{P}}$  di dimensione  $2l$ . Inoltre, per ogni  $q \in \mathbf{Q}$ , lo spazio tangente in  $p$

$$T_q \mathbf{Q} \subset \bar{\mathbf{P}}$$



è un sottospazio vettoriale di dimensione 1.

E' utile considerare lo spazio

$$\mathbf{Q} \times \bar{\mathbf{P}}$$

costituito dai vettori di  $\mathbf{P}$  applicati nei punti di  $\mathbf{Q}$ .

Denotiamo con

$$j^\dagger : T\mathbf{Q} \hookrightarrow \mathbf{Q} \times \bar{\mathbf{P}}$$

l'inclusione naturale.

In particolare, le curve coordinate  $q_1, \dots, q_l$  di  $\mathbf{Q}$  sono differenziabili ed i campi dei loro vettori tangenti sono le restrizioni a  $\mathbf{Q}$  dei campi tangenti delle curve coordinate  $x_1, \dots, x_l$  di  $\mathbf{P}$  passanti per  $\mathbf{Q}$

$$\partial q_1 = \partial x_1 \circ \iota, \quad \dots, \quad \partial q_l = \partial x_l \circ \iota.$$

Pertanto, l'espressione dell'inclusione  $j^\dagger$  in un qualunque sistema di coordinate adattato è molto semplice e naturale

$$j^\dagger : \sum_{1 \leq i \leq l} u^i \partial q_i \mapsto \sum_{1 \leq i \leq l} u^i (\partial x_i \circ \iota).$$

Inoltre, l'espressione in un qualunque sistema di coordinate adattato del differenziale di una curva differenziabile di  $\mathbf{Q}$

$$c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbf{Q}$$

è molto semplice e naturale

$$dc = \sum_{1 \leq i \leq l} Dc^i (\partial q_i \circ c) = \sum_{1 \leq i \leq l} Dc^i (\partial x_i \circ c).$$

Lo *spazio cotangente* di  $\mathbf{Q}$  è definito come l'insieme

$$T^*\mathbf{Q} \equiv \coprod_{q \in \mathbf{Q}} T_q^*\mathbf{Q}$$

costituito dall'unione disgiunta dei duali degli spazi tangenti nei vari punti di  $\mathbf{Q}$ .

E' utile considerare lo spazio

$$\mathbf{Q} \times \bar{\mathbf{P}}^*$$

costituito dalle forme di  $\mathbf{P}$  applicate nei punti di  $\mathbf{Q}$ .

Trasponendo  $j^\dagger$ , ossia restringendo le forme di  $\mathbf{P}$  ai vettori tangenti a  $\mathbf{Q}$ , otteniamo la proiezione naturale

$$\pi^\dagger : \mathbf{Q} \times \bar{\mathbf{P}}^* \rightarrow T^*\mathbf{Q} : \alpha \mapsto \alpha^\dagger \equiv \pi^\dagger \circ \alpha \equiv \alpha \circ j^\dagger.$$

Una funzione di  $\mathbf{Q}$

$$f : \mathbf{Q} \rightarrow \mathbb{R}$$

è detta *differenziabile* se esiste (almeno localmente) una sua estensione differenziabile, ossia una funzione differenziabile di  $\mathbf{P}$

$$\tilde{f} : \mathbf{P} \rightarrow \mathbb{R},$$

tale che

$$f = \tilde{f}|_{\mathbf{Q}}.$$

Inoltre, il *differenziale* di  $f$  è definito come la restrizione del differenziale  $d\tilde{f} : \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P} \times \bar{\mathbf{P}}^*$  di  $\tilde{f}$

$$df \equiv \pi^\dagger \circ d\tilde{f} \circ \iota : \mathbf{Q} \rightarrow T^*\mathbf{Q},$$

il quale risulta essere indipendente dalla scelta dell'estensione  $\tilde{f}$ .

Spesso capita di applicare la precedente definizione nell'ambito di una costruzione inversa: se

$$f : \mathbf{P} \rightarrow \mathbb{R}$$

è una funzione differenziabile, allora la sua restrizione a  $\mathbf{Q}$

$$f^\dagger \equiv f \circ \iota : \mathbf{Q} \rightarrow \mathbb{R}$$

è differenziabile ed il suo differenziale è dato da

$$df^\dagger = \pi^\dagger \circ df \circ \iota : \mathbf{Q} \rightarrow T^*\mathbf{Q}.$$

In particolare, le funzioni coordinate  $q^1, \dots, q^l$  di  $\mathbf{Q}$  sono differenziabili e le loro derivate sono le restrizioni a  $\mathbf{Q}$  delle derivate delle funzioni  $x^1, \dots, x^l$  di  $\mathbf{P}$

$$dq^1 = \pi^\dagger \circ dx^1 \circ \iota, \quad \dots, \quad dq^l = \pi^\dagger \circ dx^l \circ \iota.$$

Pertanto, l'espressione della proiezione  $\pi^\dagger$  in un qualunque sistema di coordinate adattato è molto semplice e naturale

$$\pi^{\dagger} : \sum_{1 \leq i \leq l} (\alpha_i dx^i)^{\circ\iota} \mapsto \sum_{1 \leq i \leq l} (\alpha_i^{\circ\iota}) dq^i.$$

Inoltre, l'espressione in un qualunque sistema di coordinate adattato del differenziale di una funzione differenziabile di  $\mathbf{Q}$

$$f : \mathbf{Q} \rightarrow \mathbb{R}$$

è molto semplice e naturale

$$df = \sum_{1 \leq i \leq l} \frac{\partial f}{\partial q^i} dq^i.$$

Per capire la delicatezza di alcune tra le formule precedenti ed evitare facili errori, conviene fare alcune osservazioni.

Innanzitutto,  $j^{\dagger} : T\mathbf{Q} \hookrightarrow \mathbf{Q} \times \bar{\mathbf{P}}$  è un'inclusione naturale, i vettori tangenti di  $\mathbf{Q}$  possono essere visti in modo semplice e naturale come vettori di  $\mathbf{P}$ , per cui possiamo scrivere

$$u = j^{\dagger}(u) \quad u \in T\mathbf{Q};$$

ma non abbiamo una proiezione diretta  $\mathbf{Q} \times \bar{\mathbf{P}} \rightarrow T\mathbf{Q}$ , senza considerare la metrica.

Invece,  $\pi^{\dagger} : \mathbf{Q} \times \bar{\mathbf{P}}^* \rightarrow T^*\mathbf{Q}$  è una proiezione naturale, ma non abbiamo un'inclusione diretta  $T^*\mathbf{Q} \hookrightarrow \mathbf{Q} \times \bar{\mathbf{P}}^*$ , ossia, le forme di  $\mathbf{Q}$  non possono essere viste in modo diretto come forme di  $\mathbf{P}$ , senza considerare la metrica. Infatti, una forma di  $\mathbf{P}$  "sa" quant'è il suo valore sui vettori tangenti a  $\mathbf{Q}$  ed anche su quelli trasversali a  $\mathbf{Q}$ , mentre una forma di  $\mathbf{Q}$  "sa" solo quant'è il suo valore sui vettori tangenti a  $\mathbf{Q}$ .

Così, in un qualunque sistema di coordinate adattato, possiamo scrivere

$$\partial q_i = \partial x_i^{\circ\iota} \quad 1 \leq i \leq l,$$

ma abbiamo

$$dq^i \neq dx^i \circ \iota \quad 1 \leq i \leq l.$$

Infatti,  $dx^1 \circ \iota, \dots, dx^l \circ \iota$  "sanno" quant'è il loro valore sui vettori tangenti a  $\mathbf{Q}$  ed anche su quelli trasversali a  $\mathbf{Q}$ , mentre  $dq^1, \dots, dq^l$  "sanno" solo quant'è il loro valore sui vettori tangenti a  $\mathbf{Q}$ .

Vedremo che la metrica permetterà di completare il quadro delle inclusioni e proiezioni. Però le espressioni in coordinate che otterremo saranno semplici

solo in particolari sistemi di coordinate.

Osserviamo, poi, che le espressioni, in un qualunque sistema di coordinate adattato, del calcolo differenziale del prim'ordine relativo a curve e funzioni di  $\mathbf{Q}$  sono del tutto analoghe a quelle relative allo spazio affine  $\mathbf{P}$ .

## 2. La metrica indotta

Restringendo la metrica  $g$  di  $\mathbf{P}$  al sottospazio  $T\mathbf{Q} \subset \mathbf{Q} \times \bar{\mathbf{P}}$ , otteniamo la *metrica indotta* sullo spazio delle configurazioni

$$g^\dagger \equiv g \circ (j^\dagger, j^\dagger) : T\mathbf{Q} \times_{\mathbf{Q}} T\mathbf{Q} \rightarrow \mathbb{R}$$

ovvero

$$g^\dagger \equiv (\pi^\dagger \otimes \pi^\dagger) \circ g : \mathbf{Q} \rightarrow T^*\mathbf{Q} \otimes_{\mathbf{Q}} T^*\mathbf{Q}.$$

In un sistema di coordinate indotto, la matrice della metrica indotta su  $\mathbf{Q}$  è la sottomatrice di ordine  $l$  della matrice della metrica di  $\mathbf{P}$ . Più precisamente, se in un qualunque sistema di coordinate adattato abbiamo

$$g = \sum_{1 \leq i, j \leq 5} g_{ij} dx^i \otimes dx^j \quad \text{ossia} \quad G = \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i, j \leq l} g_{ij}^{\dagger} \dot{q}^i \dot{q}^j$$

e quindi

$$g^\dagger = \sum_{1 \leq i, j \leq l} g_{ij}^{\dagger} dq^i \otimes dq^j \quad \text{ossia} \quad G^\dagger = \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i, j \leq l} g_{ij}^{\dagger} \dot{q}^i \dot{q}^j,$$

dove

$$g_{ij}^{\dagger} \equiv g_{ij} \circ \iota.$$

Dunque, la metrica indotta sullo spazio delle configurazioni si ottiene con una semplice restrizione alle coordinate della sottovarietà. Questa è una circostanza comoda nello svolgimento pratico di problemi di meccanica vincolata.

Naturalmente, indicheremo con

$$g^{\dagger\flat} : T\mathbf{Q} \rightarrow T^*\mathbf{Q} \quad \text{e} \quad g^{\dagger\sharp} : T^*\mathbf{Q} \rightarrow T\mathbf{Q}$$

gli isomorfismi relativi alla metrica indotta.

La loro espressione, in un qualunque sistema di coordinate adattato, è

$$g^{\flat} = \sum_{1 \leq i, j \leq l} g^{\flat}_{ij} dq^i \otimes dq^j \quad \text{e} \quad g^{\sharp} = \sum_{1 \leq i, j \leq l} g^{\sharp ij} \partial q_i \otimes \partial q_j,$$

dove

$$(g^{\sharp ij}) \equiv (g^{\flat}_{ij})^{-1}$$

Dunque, la matrice  $(g^{\sharp ij})_{1 \leq i, j \leq l}$  non è altro che la matrice inversa della sottomatrice  $(g^{\flat}_{ij})_{1 \leq i, j \leq l}$  della matrice  $(g^{\flat}_{ij})_{1 \leq i, j \leq l}$  della metrica  $g$  di  $\mathcal{P}$ .

Si noti che, in generale, abbiamo

$$(g^{\sharp ij}) \neq ((g^{\flat})^{-1})^{ij} \quad 1 \leq i, j \leq l.$$

Le precedenti uguaglianze sono verificate solo nel caso in cui i campi vettoriali  $\partial x_{l+1} \circ i, \dots, \partial x_5 \circ i$  sono ortogonali a  $\mathcal{Q}$ , e quindi la matrice di  $g$  è a blocchi.

Data una massa  $m \in \mathbb{R}$ , definiamo l'energia cinetica indotta come

$$T^{\dagger} \equiv m G^{\dagger} : T\mathcal{Q} \rightarrow \mathbb{R} : u \mapsto \frac{1}{2} m g(u, u).$$

### 3. Proiezioni parallela ed ortogonale dello spazio tangente

Consideriamo lo spazio  $\mathcal{Q} \times \bar{\mathcal{P}}$  costituito dai vettori di  $\mathcal{P}$  applicati nei punti di  $\mathcal{Q}$ .

Abbiamo già visto che  $\mathcal{Q} \times \bar{\mathcal{P}}$  possiede naturalmente il sottospazio  $T\mathcal{Q}$  costituito dai vettori tangenti a  $\mathcal{Q}$

$$j^{\dagger} : T\mathcal{Q} \hookrightarrow \mathcal{Q} \times \bar{\mathcal{P}}.$$

Inoltre, la metrica  $g$  permette di definire anche il sottospazio ortogonale di  $\mathcal{Q} \times \bar{\mathcal{P}}$

$$(T\mathcal{Q})^{\perp} \subset \mathcal{Q} \times \bar{\mathcal{P}}$$

costituito dai vettori ortogonali a  $T\mathcal{Q}$ .

Indichiamo con

$$j^{\perp} : (T\mathcal{Q})^{\perp} \hookrightarrow \mathcal{Q} \times \bar{\mathcal{P}}$$

l'inclusione naturale.

Più precisamente, si vede facilmente che lo spazio dei vettori di  $\mathbf{P}$  applicati nei punti di  $\mathbf{Q}$  si decompone nella somma diretta dei due sottospazi dei vettori tangenti ed ortogonali a  $\mathbf{Q}$

$$\mathbf{Q} \times \bar{\mathbf{P}} = T\mathbf{Q} \oplus_{\mathbf{Q}} (T\mathbf{Q})^\perp.$$

Dunque, la metrica di  $\mathbf{P}$  induce la *proiezione parallela* e la *proiezione ortogonale* su questi due sottospazi.

Indichiamo la proiezione parallela con

$$\pi^\parallel : \mathbf{Q} \times \bar{\mathbf{P}} \rightarrow (\mathbf{Q} \times \bar{\mathbf{P}})^\parallel \equiv T\mathbf{Q} : v \mapsto v^\parallel.$$

Essa può essere caratterizzata come segue. Dato  $v \in \bar{\mathbf{P}}$ , il vettore  $v^\parallel \in T_q \mathbf{Q}$  è l'unico vettore tale che

$$g(v, x) = g(v^\parallel, x) \equiv g^\dagger(v^\parallel, x), \quad \forall x \in T_q \mathbf{Q}.$$

Vediamo come si calcola in pratica la proiezione parallela.

Se  $\mathbf{Q}$  ha dimensione  $l = 1$ , allora l'espressione di  $\pi^\parallel$  è molto semplice:

$$\pi^\parallel : v \mapsto g(v, u) u,$$

dove  $u$  è il vettore unitario (unico a meno del segno) tangente a  $\mathbf{Q}$ .

Se  $\mathbf{Q}$  ha dimensione  $l > 1$ , allora dobbiamo ricorrere ad un sistema di coordinate adattato.

Se i campi vettoriali  $\partial x_{l+1}^\circ \circ \iota, \dots, \partial x_5^\circ \circ \iota$  sono ortogonali a  $\mathbf{Q}$ , allora l'espressione di  $\pi^\parallel$  è pure semplice:

$$\pi^\parallel : \sum_{1 \leq i \leq 5} u^i (\partial x_i^\circ \circ \iota) \mapsto \sum_{1 \leq i \leq l} u^i \partial q_i.$$

In generale, per calcolare  $\pi^\parallel$ , conviene ricorrere ad un trucco, sfruttando la semplicità dell'espressione di  $\pi^\dagger$ .

Dalle definizioni in gioco, segue subito che il seguente diagramma commuta

$$\begin{array}{ccc} & \mathbf{Q} \times \bar{\mathbf{P}} & \pi^{\parallel} \\ & \downarrow g^{\flat} & \downarrow TQ \\ \longrightarrow * & \mathbf{Q} \times \bar{\mathbf{P}} & T^* \mathbf{Q} \\ & & \uparrow \pi^{\dagger} \end{array}$$

Infatti, se  $v \in \mathbf{Q} \times \bar{\mathbf{P}}$ , allora abbiamo

$$\left( (g^{\dagger \#} \circ \pi^{\dagger} \circ g^{\flat})(v) \right) \cdot x = \left( (\pi^{\dagger} \circ g^{\flat})(v) \right) (x) = \left( g^{\flat}(v) \right) (x) = v \cdot x, \quad \forall x \in T\mathbf{Q},$$

da cui otteniamo

$$(g^{\dagger \#} \circ \pi^{\dagger} \circ g^{\flat})(v) = \pi^{\parallel}(v).$$

Pertanto, l'espressione generale di  $\pi^{\parallel}$  in un sistema di coordinate adattato diventa:

$$\pi^{\parallel} : \sum_{1 \leq i \leq 5} u^i (\partial x_i^{\circ \cup}) \mapsto \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq l \\ 1 \leq k \leq 5}} g^{\dagger ij} (g_{jk}^{\circ \cup}) u^k \partial q_i,$$

ossia

$$\pi^{\parallel} : \sum_{1 \leq i \leq 5} u^i (\partial x_i^{\circ \cup}) \mapsto \left[ \sum_{1 \leq i \leq l} u^i + \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq l \\ l+1 \leq r \leq 5}} g^{\dagger ij} (g_{jr}^{\circ \cup}) u^r \right] \partial q_i.$$

Si verifica facilmente che questa formula si riduce alle due precedenti nei rispettivi casi.

Infatti, nel caso in cui  $l = 1$ , la formula generale diventa

$$\pi^{\parallel} : \sum_{1 \leq i \leq 5} u^i (\partial x_i^{\circ \cup}) \mapsto \sum_{1 \leq k \leq 5} g^{\dagger 11} (g_{1k}^{\circ \cup}) u^k \partial q_1,$$

dove

$$\sum_{1 \leq k \leq 5} (g_{1k}^{\circ \cup}) u^k = g(\partial q_1, u) \quad g^{\dagger 11} = \frac{1}{g(\partial q_1, \partial q_1)}.$$

Inoltre, nel caso in cui i campi vettoriali  $\partial x_{l+1}^{\circ \cup}, \dots, \partial x_5^{\circ \cup}$  sono ortogonali a  $\mathbf{Q}$ , la formula generale si riduce a

$$\pi^{\parallel} : \sum_{1 \leq i \leq 5} u^i (\partial x_i^{\circ \cup}) \mapsto \sum_{1 \leq i \leq l} u^i \partial q_i$$

perché la sottomatrice trasversale della metrica è nulla

$$(g_{jk}^{\circ\mathcal{U}})_{\substack{1 \leq j \leq l \\ l+1 \leq k \leq \bar{5}}} = 0.$$

Infine, la proiezione ortogonale è data da

$$\pi^\perp : \mathcal{Q} \times \bar{\mathcal{P}} \rightarrow (\mathcal{Q} \times \bar{\mathcal{P}})^\perp \equiv (T\mathcal{Q})^\perp : v \mapsto v - \pi^\parallel(v).$$

Pertanto, l'espressione in coordinate della proiezione ortogonale si ricava facilmente da quella della proiezione parallela, mediante una differenza

$$\pi^\perp : \sum_{1 \leq i \leq \bar{5}} u^i (\partial x_i^{\circ\mathcal{U}}) \mapsto \sum_{l+1 \leq r \leq \bar{5}} u^r [(\partial x_r^{\circ\mathcal{U}}) - \sum_{1 \leq i, j \leq l} g^{+ij} (g_{jr}^{\circ\mathcal{U}}) \partial q_i].$$

Nel caso in cui i campi vettoriali  $\partial x_{l+1}^{\circ\mathcal{U}}, \dots, \partial x_{\bar{5}}^{\circ\mathcal{U}}$  sono ortogonali a  $\mathcal{Q}$ , la formula generale si riduce a

$$\pi^\perp : \sum_{1 \leq i \leq \bar{5}} u^i (\partial x_i^{\circ\mathcal{U}}) \mapsto \sum_{l+1 \leq r \leq \bar{5}} u^r (\partial x_r^{\circ\mathcal{U}}).$$

## 4. Derivata dei campi vettoriali

Abbiamo visto che le regole di derivazione e le formule pratiche per le derivate del prim'ordine di curve e funzioni sullo spazio delle configurazioni sono del tutto analoghe a quelle dello spazio affine ambiente.

Per quanto riguarda i campi vettoriali, però, non è così semplice. La complicazione nasce dal fatto che nel caso degli spazi affini possiamo utilizzare vettori liberi, che assumono valori in uno spazio vettoriale fisso, mentre sulle sottovarietà curve siamo obbligati ad usare vettori applicati, che assumono valori in spazi tangenti variabili da punto a punto.

E' sufficiente che lo studente acquisisca le nozioni ed i risultati qualitativi di questo paragrafo.

Un campo vettoriale (applicato) di  $\mathcal{Q}$

$$v : \mathcal{Q} \rightarrow T\mathcal{Q}$$

è detto *differenziabile* se esiste (almeno localmente) una sua estensione differenziabile, ossia un campo differenziabile di  $\mathcal{P}$

$$\tilde{v} : \mathcal{P} \rightarrow \bar{\mathcal{P}}$$

tale che



$$\tilde{v}(q) = v(q), \quad \forall q \in \mathcal{Q}.$$

Inoltre, sia

$$u : \mathcal{Q} \rightarrow T\mathcal{Q}$$

un altro campo vettoriale applicato di  $\mathcal{Q}$ . Allora il *differenziale* di  $v$  lungo  $u$  è definito come la restrizione a  $\mathcal{Q}$  del differenziale di  $\tilde{v}$  lungo  $u$

$$\nabla_u v : \mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{Q} \times \bar{\mathcal{P}} : q \mapsto (q, D_u \tilde{v}(q)),$$

il quale risulta essere indipendente dalla scelta dell'estensione  $\tilde{v}$ .

La sua espressione in un qualunque sistema di coordinate adattato è

$$\nabla_u v = \sum_{\substack{1 \leq i \leq 5 \\ 1 \leq h, k \leq l}} \left[ \frac{\partial v^i}{\partial q^h} + (\Gamma^i_{hk} \circ \iota) v^k u^h \right] \partial q_i + \sum_{\substack{1 \leq r \leq 5 \\ 1 \leq h, k \leq l}} (\Gamma^r_{hk} \circ \iota) v^k u^h \partial x_r,$$

dove i simboli di Christoffel (vedi ) sono definiti da

$$\Gamma^j_{hk} \equiv [D_{\partial x_k} (\partial x_h)]^j \quad 1 \leq j \leq 5, \quad 1 \leq h, k \leq l$$

e soddisfano le due uguaglianze (vedi )

$$\Gamma^j_{hk} \equiv - (D^2 x^j)(\partial x_h, \partial x_k)$$

$$\Gamma^j_{hk} = \sum_{1 \leq i \leq 5} \frac{1}{2} g^{ij} \left( \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^h} + \frac{\partial g_{ih}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{hk}}{\partial x^i} \right).$$

Sfortunatamente, tale differenziale non ha, in generale, valori tangenti allo spazio delle configurazioni, ma possiede anche una componente ortogonale ad esso. Studiamo perciò le sue proiezioni parallela ed ortogonale.

Innanzitutto, consideriamo la proiezione parallela del differenziale di  $v$  lungo  $u$

$$\nabla_u^{\parallel} v \equiv \pi^{\parallel} \circ \nabla_u v : \mathcal{Q} \rightarrow T\mathcal{Q}.$$

La sua espressione in un qualunque sistema di coordinate adattato è

$$\nabla_u^{\parallel} v = \sum_{\substack{1 \leq i \leq l \\ 1 \leq h, k \leq l}} \left[ \frac{\partial v^i}{\partial q^h} + \sum_{\substack{1 \leq j \leq l \\ 1 \leq a \leq 5}} (g^{+ij} (g_{ja} \circ \iota) (\Gamma^a_{hk} \circ \iota)) v^k u^h \partial q_i \right]$$

$$= \sum_{\substack{1 \leq i \leq l \\ 1 \leq h, k \leq l}} \left[ \frac{\partial v^i}{\partial q^h} + \sum_{1 \leq j \leq l} (g^{+ij} (\Gamma_{j,hk} \circ \iota)) v^k u^h \partial q_i \right],$$

dove

$$\Gamma_{j,hk} \equiv \sum_{1 \leq a \leq 5} g_{ja} \Gamma_{hk}^a = \sum_{1 \leq i \leq 5} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^h} + \frac{\partial g_{jh}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{hk}}{\partial x^j} \right).$$

La precedente formula mostra che  $(\Gamma_{j,hk} \circ \iota)$  può essere espressa mediante dati e derivate sulla sottovarietà.

Pertanto, la componente parallela del differenziale "vive" sullo spazio delle configurazioni e possiamo dire che essa è il *differenziale indotto* sullo spazio delle configurazioni

$$\nabla_u^+ v \equiv \nabla_u^{\parallel} v : \mathbf{Q} \rightarrow T\mathbf{Q}.$$

Inoltre, la sua espressione in un qualunque sistema di coordinate adattato può essere scritta come

$$\nabla_u^+ v = \sum_{\substack{1 \leq i \leq l \\ 1 \leq h, k \leq l}} \left( \frac{\partial v^i}{\partial q^h} + \Gamma_{hk}^{+i} v^k u^h \right) \partial q_i,$$

dove

$$\Gamma_{j,hk}^+ \equiv \Gamma_{j,hk} \circ \iota \equiv \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{jk}^+}{\partial q^h} + \frac{\partial g_{jh}^+}{\partial q^k} - \frac{\partial g_{hk}^+}{\partial q^j} \right).$$

Quindi l'espressione del differenziale indotto sullo spazio delle configurazioni è del tutto analogo a quella del differenziale nello spazio ambiente.

Consideriamo, poi, la proiezione ortogonale del differenziale di  $v$  lungo  $u$

$$\nabla_u^\perp v \equiv \pi^\perp \circ \nabla_u v : \mathbf{Q} \rightarrow (T\mathbf{Q})^\perp.$$

La sua espressione in un qualunque sistema di coordinate adattato è

$$\nabla_u^\perp v = \sum_{\substack{l+1 \leq r \leq 5 \\ 1 \leq h, k \leq l}} \left[ (\Gamma_{hk}^r \circ \iota) v^k u^h \left( (\partial x_r \circ \iota) - \sum_{1 \leq i, j \leq l} (g^{+ij} (g_{jr} \circ \iota)) \partial q_i \right) \right].$$

Se i campi vettoriali  $\partial x_{l+1} \circ \iota, \dots, \partial x_5 \circ \iota$  sono ortogonali a  $\mathbf{Q}$ , essa si riduce a

$$\nabla_u^\perp v = \sum_{\substack{l+1 \leq r \leq 5 \\ 1 \leq h, k \leq l}} (\Gamma_{hk}^r \circ \iota) v^k u^h (\partial x_r \circ \iota).$$

L'espressione in coordinate mostra che la componente ortogonale del differenziale non dipende dalle derivate del campo  $v$  (ma solo dai suoi valori puntuali) e che essa dipende linearmente da  $v$  ed  $u$  ed è simmetrica rispetto al loro scambio.

Il risultato precedente può essere riformulato dicendo che esiste un tensore del second'ordine simmetrico sullo spazio delle configurazioni a valori sul suo ortogonale

$$N : T\mathbf{Q} \times T\mathbf{Q} \rightarrow (T\mathbf{Q})^\perp,$$

tale che, per ogni coppia di campi vettoriali  $u$  e  $v$  su  $\mathbf{Q}$ , si abbia

$$\nabla_u^\perp v = N(u, v).$$

Questo tensore, che dipende solo dalla geometria della sottovarietà, è chiamato *seconda forma fondamentale* della sottovarietà. Esso misura, per definizione, quanto un campo vettoriale  $v$  tangente alla sottovarietà è costretto dal vincolo a deviare (al prim'ordine) nello spazio affine ambiente dalla direzione tangente originale, quando si muove lungo la sottovarietà in una direzione generata da un altro campo vettoriale  $u$  tangente alla sottovarietà. Dunque, esso misura quanto la sottovarietà si discosta (al prim'ordine) da essere un sottospazio affine. Nel caso particolare in cui la sottovarietà sia un sottospazio affine, possiamo scegliere come sistema di coordinate adattato un sistema cartesiano; ma i suoi simboli di Christoffel sono nulli e, perciò, la seconda forma fondamentale è nulla.

Vedremo il legame stretto che la seconda forma fondamentale ha con la curvatura delle curve vincolate.

## 2. Cinematica vincolata

### 1. Il moto indotto

Studiamo il moto della particella vincolata.

Il *moto vincolato*

$$c : T \rightarrow Q \subset P$$

può essere visto sia come moto nello spazio affine ambiente  $P$ , che come *moto indotto* sullo spazio delle configurazioni  $Q$ .

Il moto vincolato è caratterizzato in un qualunque sistema di coordinate adattato dalle sue componenti

$$c^i \equiv q^i \circ c \equiv x^i \circ c : T \rightarrow \mathbb{R}, \quad 1 \leq i \leq l,$$

$$0 = c^r \equiv x^r \circ c : T \rightarrow \mathbb{R}, \quad l+1 \leq r \leq 3.$$

Anche la *velocità* (applicata) del moto vincolato

$$dc \equiv (c, Dc) : T \rightarrow TQ \subset Q \times \bar{P}$$

può essere vista sia come velocità nello spazio affine ambiente  $P$ , che come *velocità indotta* sullo spazio delle configurazioni  $Q$ .

L'espressione della velocità in un qualunque sistema di coordinate adattato è

$$dc = \sum_{1 \leq i \leq l} Dc^i (\partial x_i^{\circ} c).$$

L'*accelerazione* (applicata) del moto vincolato, vista dallo spazio affine ambiente, è

$$\nabla dc \equiv (c, D^2c) : T \rightarrow Q \times \bar{P}.$$

L'espressione dell'accelerazione in un qualunque sistema di coordinate adattato

tato è

$$\nabla dc = \sum_{\substack{1 \leq i \leq 5 \\ 1 \leq h, k \leq 1}} [D^2 c^i + (\Gamma_{hk}^i \circ c) Dc^h Dc^k] (\partial x_i \circ c) + \sum_{\substack{1 \leq r \leq 5 \\ 1 \leq h, k \leq 1}} [(\Gamma_{hk}^r \circ c) Dc^h Dc^k] (\partial x_r \circ c).$$

Possiamo calcolare la forma covariante dell'accelerazione

$$g^b \circ \nabla dc : T \rightarrow (Q \times \bar{P}^*).$$

La sua espressione in un qualunque sistema di coordinate adattato è

$$g^b \circ \nabla dc = \sum_{\substack{1 \leq i \leq 5 \\ 1 \leq j \leq 1}} (g_{ij} \circ c) D^2 c^j (dx^i \circ c) + \sum_{\substack{1 \leq i \leq 5 \\ 1 \leq h, k \leq 1}} [(\Gamma_{i,hk} \circ c) Dc^h Dc^k] (dx^i \circ c),$$

dove

$$\Gamma_{i,hk} \equiv \sum_{1 \leq j \leq 5} g_{ij} \Gamma_{hk}^j = \frac{1}{2} (\partial_h g_{ik} + \partial_k g_{ih} - \partial_i g_{hk}).$$

Osserviamo che, al contrario della velocità, l'accelerazione non è tutta tangente allo spazio delle configurazioni. Possiamo, pertanto, decomporre l'accelerazione nelle componenti parallela ed ortogonale allo spazio delle configurazioni.

## 2. La componente parallela dell'accelerazione

Indichiamo con

$$\nabla^{\parallel} dc \equiv \pi^{\parallel} \circ \nabla dc : T \rightarrow TQ$$

la componente parallela a  $Q$  dell'accelerazione.

Per calcolare la sua espressione in coordinate basterà applicare la formula della proiezione parallela. Pertanto, in un qualunque sistema di coordinate adattato abbiamo

$$\nabla^{\parallel} dc = \sum_{1 \leq i \leq 1} D^2 c^i (\partial q_i \circ c) + \sum_{\substack{1 \leq s \leq 5 \\ 1 \leq h, k \leq 1 \\ 1 \leq i, j \leq 1}} [(g^{+ij} g_{js} \Gamma_{hk}^s) \circ c Dc^h Dc^k] (\partial q_i \circ c)$$

ossia

$$\begin{aligned} \nabla^{\parallel} dc &= \sum_{\substack{1 \leq i \leq l \\ 1 \leq h, k \leq l}} [D^2 c^i + (\Gamma_{hk}^i \circ c) Dc^h Dc^k] (\partial q_i \circ c) + \\ &+ \sum_{\substack{l+1 \leq r \leq 5 \\ 1 \leq h, k \leq l \\ 1 \leq i, j \leq l}} [(g^{+ij} g_{jr} \Gamma_{hk}^r) \circ c Dc^h Dc^k] (\partial q_i \circ c). \end{aligned}$$

Tenendo conto dell'uguaglianza stabilita precedentemente

$$\Gamma_{hk}^{+i} = \sum_{\substack{1 \leq r \leq 5 \\ 1 \leq j \leq l}} g^{+ij} (g_{jr} \circ c) \Gamma_{hk}^r \quad 1 \leq i, h, k \leq l,$$

possiamo scrivere

$$\nabla^{\parallel} dc = \sum_{1 \leq i, h, k \leq l} [D^2 c^i + (\Gamma_{hk}^{+i} \circ c) Dc^h Dc^k] (\partial q_i \circ c).$$

Questa formula mostra che l'espressione, in un qualunque sistema di coordinate adattato, della componente parallela dell'accelerazione di un moto sullo spazio delle configurazioni  $\mathcal{Q}$  dipende solo dalle coordinate indotte ed è completamente analoga a quella di un moto nello spazio affine ambiente. In altre parole possiamo dire che  $\nabla^{\parallel} dc$  è l'accelerazione così come la vede lo spazio delle configurazioni. Pertanto, diremo che  $\nabla^{\parallel} dc$  è *l'accelerazione indotta* su  $\mathcal{Q}$ ; per mettere in risalto questo fatto scriveremo anche

$$\nabla^{\dagger} dc \equiv \nabla^{\parallel} dc : T \rightarrow T\mathcal{Q}.$$

Naturalmente l'espressione di  $\nabla^{\parallel} dc$  si semplifica notevolmente in casi particolari, in accordo alle considerazioni generali già fatte sulla proiezione parallela.

Infatti, nel caso in cui  $l = 1$ , la formula generale diventa

$$\nabla^{\parallel} dc = D^2 c^1 (\partial q_1 \circ c) + \sum_{1 \leq k \leq 5} [(g^{+11} g_{1k} \Gamma_{11}^k) \circ c Dc^1 Dc^1] (\partial q_1 \circ c).$$

Per di più, se la coordinata indotta è proprio la lunghezza dell'arco

$$q^1 = s,$$

ossia se

$$g(\partial q_1, \partial q_1) \equiv g(\partial s, \partial s) = 1,$$

ossia se

$$g_{11} = 1,$$

allora abbiamo

$$\sum_{1 \leq k \leq 5} (g_{1k} \Gamma_{11}^k) \circ \iota \equiv \Gamma_{1,11} \circ \iota = \frac{1}{2} (\partial_1 g_{11} + \partial_1 g_{11} - \partial_1 g_{11}) \circ \iota = 0$$

e, quindi, l'espressione dell'accelerazione parallela si riduce a

$$\nabla^{\parallel} dc = D^2 e^1 (\partial q_1 \circ c) = D^2 e^s (\partial s \circ c).$$

Questa formula coincide con l'espressione della componente dell'accelerazione parallela alla traiettoria che abbiamo calcolato precedentemente in modo diretto (vedi ).

Inoltre, nel caso in cui i campi vettoriali  $\partial x_{t+1} \circ \iota, \dots, \partial x_5 \circ \iota$  sono ortogonali a  $\mathcal{Q}$ , la formula generale si riduce a

$$\nabla^{\parallel} dc = \sum_{\substack{1 \leq i \leq l \\ 1 \leq h, k \leq l}} [D^2 e^i + (\Gamma_{hk}^i \circ c) D e^h D e^k] (\partial q_i \circ c).$$

Ritorniamo al caso generale.

Dato che è comodo scrivere l'equazione di Newton in forma covariante, è utile considerare la proiezione sullo spazio delle configurazioni della forma covariante dell'accelerazione. Ricordando il diagramma commutativo relativo alla proiezione parallela, possiamo scrivere

$$g^{\sharp b} \circ \nabla^{\dagger} dc = \pi^{\dagger} \circ g^{\flat} \circ \nabla dc : T \rightarrow T^* \mathcal{Q}.$$

La sua espressione in un qualunque sistema di coordinate lagrangiano indotto è

$$\pi^{\dagger} \circ g^{\flat} \circ \nabla dc = \sum_{\substack{1 \leq i \leq l \\ 1 \leq h, k \leq l}} [(g^{\dagger}_{ij} \circ c) D^2 e^j + (\Gamma^{\dagger}_{i, hk} \circ c) D e^h D e^k] (dq^i \circ c),$$

oppure, mediante le formule di Lagrange,

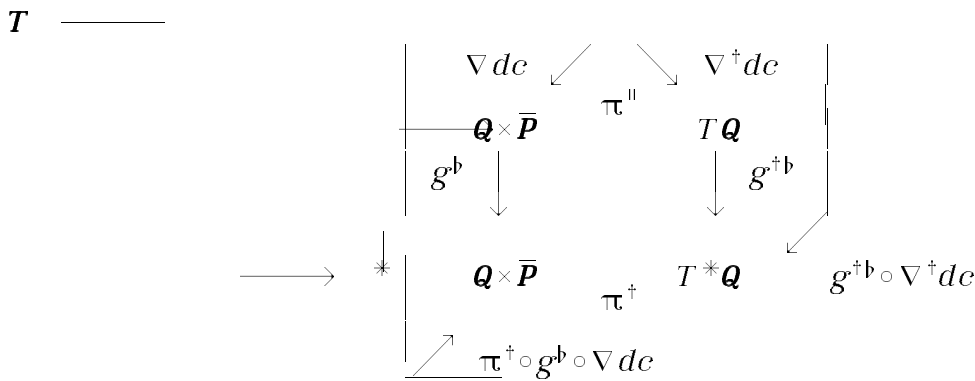
$$\pi^{\dagger} \circ g^{\flat} \circ \nabla dc = \sum_{1 \leq i \leq l} [D \left( \frac{\partial G^{\dagger}}{\partial \dot{q}^i} \circ dc \right) - \frac{\partial G^{\dagger}}{\partial q^i} \circ dc] (dq^i \circ c),$$

oppure, con notazione semplificata classica

$$\pi^\dagger \circ g^b \circ \nabla dc = \sum_{1 \leq i \leq l} \left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial G^\dagger}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial G^\dagger}{\partial q^i} \right] dq^i.$$

Questa formula conferma quanto avevamo già osservato a proposito della componente parallela dell'accelerazione in forma controvariante. L'espressione, in un qualunque sistema di coordinate lagrangiano adattato, della proiezione sullo spazio delle configurazioni della forma covariante dell'accelerazione di un moto sullo spazio delle configurazioni  $Q$  dipende solo dalle coordinate lagrangiane indotte ed è completamente analoga a quella di un moto nello spazio affine ambiente. In altre parole possiamo dire che  $\pi^\dagger \circ g^b \circ \nabla dc$  è l'accelerazione covariante così come la vede lo spazio delle configurazioni. Pertanto, diremo che  $\pi^\dagger \circ g^b \circ \nabla dc$  è *la forma covariante dell'accelerazione indotta su  $Q$* .

Le relazioni tra le varie forme dell'accelerazione parallela sono illustrate dal seguente diagramma commutativo



Osserviamo che la precedente formula di Lagrange, data la sua semplicità e dipendenza solo dai dati relativi allo spazio delle configurazioni, costituisce il modo pratico più conveniente per il calcolo della componente parallela dell'accelerazione. In pratica, conviene procedere nel seguente ordine.

**REGOLA PRATICA.** Per calcolare la componente parallela dell'accelerazione in un qualunque sistema di coordinate adattate:

- 1) si calcola la metrica indotta  $g^\dagger$ , o, equivalentemente, la funzione metrica indotta  $G^\dagger$  (con una semplice restrizione della metrica dello spazio affine ambiente alle coordinate lagrangiane indotte);
- 2) si calcola la forma covariante dell'accelerazione indotta  $g^{\dagger b} \circ \nabla^\dagger dc$  mediante le formule di Lagrange.

Poi, se occorre calcolare l'espressione controvariante,



- 3) si calcola l'isomorfismo indotto  $g^{\dagger\#}$  (invertendo la matrice di  $g^{\dagger}$ );  
 4) si calcola la forma controvariante dell'accelerazione indotta  $\nabla^{\dagger}de$  applicando  $g^{\dagger\#}$  a  $g^{\dagger b} \circ \nabla^{\dagger}de$ .  $\square$

### 3. La componente ortogonale dell'accelerazione

La componente ortogonale a  $\mathbf{Q}$  dell'accelerazione è

$$\pi^{\perp} \circ \nabla de : \mathbf{T} \rightarrow (T\mathbf{Q})^{\perp}.$$

Per calcolare la sua espressione in coordinate basterà applicare la formula della proiezione ortogonale. Pertanto, in un qualunque sistema di coordinate adattato abbiamo

$$\begin{aligned} \pi^{\perp} \circ \nabla de &= \sum_{\substack{l+1 \leq r \leq 5 \\ 1 \leq h, k \leq l}} [(\Gamma^r_{hk} \circ e) Dc^h Dc^k] (\partial q_r \circ e) - \\ &- \sum_{\substack{l+1 \leq r \leq 5 \\ 1 \leq h, k \leq l \\ 1 \leq i, j \leq l}} [(g^{\dagger ij} g_{jr} \Gamma^r_{hk}) \circ e Dc^h Dc^k] (\partial q_i \circ e). \end{aligned}$$

Naturalmente l'espressione di  $\pi^{\perp} \circ \nabla de$  si semplifica notevolmente in casi particolari, in accordo alle considerazioni generali già fatte precedentemente.

Infatti, nel caso in cui  $l = 1$ , la formula generale diventa

$$\begin{aligned} \pi^{\perp} \circ \nabla de &= \sum_{2 \leq k \leq 5} [(\Gamma^k_{11} \circ e) Dc^1 Dc^1] (\partial q_k \circ e) - \\ &- \sum_{2 \leq k \leq 5} (g^{\dagger 11} g_{1k} \Gamma^k_{11}) \circ e Dc^1 Dc^1] (\partial q_1 \circ e). \end{aligned}$$

Per di più, se la coordinata lagrangiana è proprio la lunghezza dell'arco, allora abbiamo già visto (nel paragrafo precedente) che

$$\sum_{1 \leq k \leq 5} (g_{1k} \Gamma^k_{11}) \circ e = 0$$

e, quindi, l'espressione dell'accelerazione perpendicolare si riduce a

$$\begin{aligned} \pi^{\perp} \circ \nabla de &= \sum_{2 \leq r \leq 5} [(\Gamma^r_{11} \circ e) Dc^1 Dc^1] (\partial q_r \circ e) + [(\Gamma^1_{11} \circ e) Dc^1 Dc^1] (\partial q_1 \circ e) \\ &= \sum_{1 \leq k \leq 5} [(\Gamma^k_{11} \circ e) Dc^1 Dc^1] (\partial q_k \circ e). \end{aligned}$$

Questa formula si accorda con l'espressione della componente dell'accelerazione perpendicolare alla traiettoria che abbiamo calcolato precedentemente in modo diretto (vedi )

$$\pi^\perp \circ \nabla dc = (Dc^s)^2 k = (Dc^s)^2 \|k\| n,$$

dove  $k$  è il vettore di curvatura ed  $n$  è il corrispondente versore.

Inoltre, nel caso in cui i campi vettoriali  $\partial x_{l+1} \circ c, \dots, \partial x_5 \circ c$  sono ortogonali a  $Q$ , la formula generale si riduce a

$$\pi^\perp \circ \nabla dc = \sum_{l+1 \leq r \leq 5} [(\Gamma^r_{11} \circ c) Dc^1 Dc^1] (\partial q_r \circ c).$$

Ritorniamo al caso generale.

L'espressione dell'accelerazione in un qualunque sistema di coordinate adatto mostra che la componente ortogonale dell'accelerazione non dipende dalle derivate seconde del moto, ma dipende solo dalle derivate prime e più precisamente tale dipendenza è quadratica.

Inoltre, l'espressione in coordinate che la componente ortogonale dell'accelerazione può essere espressa mediante la seconda forma fondamentale della sottovarietà nel seguente modo

$$\pi^\perp \circ \nabla dc = N^\flat \circ dc : T \rightarrow (TP)^\perp,$$

dove

$$N^\flat : TQ \rightarrow (TP)^\perp$$

è la forma quadratica associata alla seconda forma fondamentale mediante la seguente composizione

$$\begin{array}{ccc} \longrightarrow & Q & \\ & & \begin{array}{ccc} & T & N^\flat \\ \text{diag} \searrow & & \nearrow \\ & TQ \times TQ & N \\ & Q & \end{array} \\ & & \end{array} \quad (TP)^\perp$$

La formula precedente permette di esprimere la componente ortogonale dell'accelerazione come composizione dell'informazione geometrica del vincolo espressa da  $N$  con l'informazione cinematica del moto espressa dalla velocità.

Un metodo pratico generale per calcolare la componente ortogonale dell'accelerazione (e quindi la seconda forma fondamentale), senza calcolare esplicitamente

citamente i simboli di Christoffel può essere il seguente.

**REGOLA PRATICA.** Per calcolare la componente ortogonale dell'accelerazione in un qualunque sistema di coordinate adattate:

1) si calcola l'accelerazione completa in forma covariante con la formula di Lagrange nello spazio affine ambiente  $\mathbf{P}$  e la si trasforma in forma controvariante con la metrica di  $\mathbf{P}$ ;

2) si calcola l'accelerazione indotta in forma covariante con la formula di Lagrange sullo spazio delle configurazioni  $\mathbf{Q}$  e la si trasforma in forma controvariante con la metrica indotta di  $\mathbf{Q}$ ;

3) si calcola la differenza delle accelerazioni completa e parallela trovate precedentemente.  $\square$

Notiamo che non ha senso calcolare direttamente la differenza in forma covariante perché  $T^*\mathbf{Q}$  non è un sottospazio di  $\mathbf{Q} \times \bar{\mathbf{P}}^*$  in modo naturale.

## 4. Lo spazio delle fasi vincolato

Analogamente a quanto abbiamo fatto per una particella libera, definiamo lo *spazio delle fasi vincolato* come il sottospazio

$$T \times T\mathbf{Q} \subset T \times \mathbf{P} \times \bar{\mathbf{P}}$$

dello spazio delle fasi della particella libera.

Per semplicità, denotiamo l'inclusione naturale ancora con

$$j^+ : T \times T\mathbf{Q} \rightarrow T \times \mathbf{P} \times \bar{\mathbf{P}}.$$

Lo spazio delle fasi vincolato sarà la sede dove sono definite la forza attiva agente e la reazione. Esso costituirà anche l'insieme delle possibili dati iniziali dei moti vincolati.

Se  $c : T \rightarrow \mathbf{Q}$  è un moto vincolato, allora poniamo<sup>1</sup>

$$j_e : T \rightarrow T \times T\mathbf{Q} : t \mapsto (t; c(t), Dc(t)) \subset T \times \mathbf{P} \times \bar{\mathbf{P}}.$$

---

<sup>1</sup> Non si confondano i due simboli  $j^+$  e  $j$ , che non hanno nulla a che fare tra loro.

### 3. Dinamica vincolata

#### 1. La forza attiva

Supponiamo che la particella in oggetto sia soggetta ad una *forza attiva*

$$\tilde{F} : T \times P \times \bar{P} \rightarrow P \times \bar{P}^*,$$

la cui espressione in un qualunque sistema di coordinate (adattato) è

$$\tilde{F} = \sum_{1 \leq i \leq 5} \tilde{F}_i dx^i, \quad \tilde{F}_i : T \times P \times \bar{P} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Se la particella è vincolata, ai fini della dinamica, conterà solo la restrizione della forza attiva allo spazio delle configurazioni. Pertanto, diciamo che la *forza attiva* effettivamente agente sulla particella è l'applicazione

$$F \equiv \tilde{F} \circ j^+ : T \times TQ \rightarrow Q \times \bar{P}^*$$

la cui espressione in un qualunque sistema di coordinate (adattato) è

$$F = \sum_{1 \leq i \leq 5} F_i (dx^i \circ \iota), \quad F_i \equiv \tilde{F}_i \circ j^+ : T \times TQ \rightarrow \mathbb{R}.$$

Naturalmente, possiamo decomporre la forza attiva agente (in forma controvariante) nella somma diretta della componente parallela ed ortogonale a  $Q$

$$\bar{F} = \bar{F}^{\parallel} + \bar{F}^{\perp},$$

dove

$$\bar{F}^{\parallel} : T \times TQ \rightarrow TQ \quad \bar{F}^{\perp} : T \times TQ \rightarrow (TQ)^{\perp}.$$

La loro espressione in un qualunque sistema di coordinate adattato è

$$\bar{F}^{\parallel} = \sum_{\substack{1 \leq i \leq l \\ 1 \leq j \leq 5}} g^{+ij} F_j \partial q_i$$

e

$$\bar{F}^\dagger = \sum_{\substack{1 \leq i \leq 5 \\ 1 \leq j \leq 5}} g^{ij} F_j (\partial x_i \circ \iota) - \sum_{\substack{1 \leq i \leq 5 \\ 1 \leq j \leq 5}} g^{\dagger ij} F_j (\partial x_i \circ \iota).$$

Possiamo anche definire la *forza attiva indotta* come la proiezione mediante  $\pi^\dagger$  della forza attiva agente:

$$F^\dagger \equiv \pi^\dagger \circ F : T \times TQ \rightarrow T^*Q.$$

La sua espressione in un qualunque sistema di coordinate adattato è molto semplice

$$F^\dagger = \sum_{1 \leq i \leq 5} F_i dq^i.$$

La forza attiva indotta coinvolge solo oggetti relativi allo spazio delle configurazioni e, perciò, possiamo dire che essa è la forza attiva vista dallo spazio delle configurazioni.

Naturalmente, la forza attiva parallela e la forza attiva indotta possono essere identificate con il procedimento indicato precedentemente.

## 2. Forze attive conservative

Supponiamo che la forza attiva

$$\tilde{F} : P \rightarrow P \times P^*$$

sia (posizionale e) conservativa, ossia che esista una funzione ("potenziale")

$$\tilde{U} : P \rightarrow \mathbb{R},$$

tale che

$$\tilde{F} = d\tilde{U}.$$

Allora, per la definizione di funzione differenziabile e di differenziale sullo spazio delle configurazioni, valgono i seguenti fatti:

1) la restrizione del potenziale allo spazio delle configurazioni

$$U^\dagger \equiv \tilde{U} \circ \iota : Q \rightarrow \mathbb{R}$$

è una funzione differenziabile,

2) il suo differenziale è la restrizione allo spazio delle configurazioni del potenziale  $\tilde{U}$ , ossia

$$F^\dagger = dU^\dagger;$$

3) pertanto, la forza indotta  $F^\dagger$  è conservativa ed il suo potenziale è il *potenziale indotto*  $U^\dagger$ .

Se poi, vogliamo calcolare la forza indotta in forma controvariante dinamica, possiamo scrivere

$$\bar{F}^\parallel \equiv g^{+\#} \circ F^\dagger = \text{grad}^\dagger U^\dagger,$$

dove il gradiente sullo spazio delle configurazioni è definito da

$$\text{grad}^\dagger U^\dagger \equiv g^{+\#} \circ dU^\dagger.$$

La sua espressione in un qualunque sistema di coordinate adattate è

$$\bar{F}^\parallel \equiv g^{+\#} \circ F^\dagger \equiv \text{grad}^\dagger U^\dagger = \sum_{1 \leq i, j \leq l} g^{+ij} \frac{\partial U^\dagger}{\partial q^j} \partial q_i.$$

Dunque, l'espressione del gradiente relativo allo spazio delle configurazioni è completamente analoga a quella dello spazio ambiente.

In pratica, questo è il modo pratico più semplice per calcolare la componente parallela di una forza conservativa. Infatti, in questo modo, basta restringere il potenziale  $\tilde{U}$ , sostituendo le coordinate vincolari con i rispettivi valori costanti vincolari e poi calcolare il gradiente relativo allo spazio delle configurazioni.

### 3. La reazione vincolare

La *reazione vincolare* agente sulla particella è un'applicazione

$$R : T \times TQ \rightarrow Q \times \bar{P}^*,$$

la cui espressione in un qualunque sistema di coordinate (adattato) è

$$R = \sum_{1 \leq i \leq 5} R_i (dx^i \circ \iota), \quad R_i : T \times TQ \rightarrow \mathbb{R}.$$

Naturalmente, possiamo decomporre la reazione (in forma controvariante) nella somma diretta della componente parallela ed ortogonale a  $Q$

$$\bar{R} = \bar{R}^\parallel + \bar{R}^\perp,$$

dove

$$\bar{R}^{\parallel} : T \times T \mathcal{Q} \rightarrow T \mathcal{Q} \quad \bar{R}^{\perp} : T \times T \mathcal{Q} \rightarrow (T \mathcal{Q})^{\perp}.$$

La loro espressione in un qualunque sistema di coordinate adattato è

$$\bar{R}^{\parallel} = \sum_{\substack{1 \leq i \leq l \\ 1 \leq j \leq 5}} g^{+ij} B_j \partial q_i$$

e

$$\bar{R}^{\perp} = \sum_{\substack{1 \leq i \leq 5 \\ 1 \leq j \leq 5}} g^{jj} B_j (\partial x_i \circ \iota) - \sum_{\substack{1 \leq i \leq l \\ 1 \leq j \leq 5}} g^{+ij} B_j (\partial x_i \circ \iota).$$

Possiamo anche definire la *reazione indotta* come la proiezione mediante  $\pi^{\dagger}$  della reazione:

$$R^{\dagger} \equiv \pi^{\dagger} \circ B : T \times T \mathcal{Q} \rightarrow T^* \mathcal{Q}.$$

La sua espressione in un qualunque sistema di coordinate adattato è molto semplice

$$R^{\dagger} = \sum_{1 \leq i \leq l} R_i dq^i.$$

La reazione indotta coinvolge solo oggetti relativi allo spazio delle configurazioni e, perciò, possiamo dire che essa è la reazione vista dallo spazio delle configurazioni.

Naturalmente, la reazione parallela e la reazione indotta possono essere identificate con il procedimento indicato precedentemente.

Le seguenti condizioni sono equivalenti:

- 1)  $R^{\dagger} = 0,$
- 2)  $\bar{R}^{\parallel} = 0,$
- 3)  $B(v) = 0 \quad \forall v : \mathcal{Q} \rightarrow T \mathcal{Q},$
- 4)  $\bar{R} \cdot v \equiv \bar{R}^{\parallel} \cdot v = 0 \quad \forall v : \mathcal{Q} \rightarrow T \mathcal{Q},$
- 5) in un qualunque sistema di coordinate adattato

$$R_i = 0 \quad 1 \leq i \leq l.$$

Quando le precedenti condizioni equivalenti sono verificate si dice che il

vincolo è *liscio* o che la reazione obbedisce al *principio dei lavori virtuali*.

La dizione tradizionale di "lavori virtuali" si riferisce alla condizione 4), la quale dice che il prodotto scalare della reazione (in forma controvariante) per un qualunque vettore tangente allo spazio delle configurazioni è nullo. Tale prodotto scalare può essere pensato come il lavoro della reazione lungo il vettore tangente (sarebbe più esatto dire come la potenza della reazione lungo il moto la cui derivata è il vettore tangente considerato). L'aggettivo virtuale si riferisce al caso di vincoli mobili (in cui i vettori tangenti vanno riferiti alla configurazione istantanea del vincolo mobile), che noi qui non trattiamo.

I vincoli lisci sono molto importanti in meccanica, perché se ne incontrano spesso nella pratica. Inoltre, vedremo che il vincolo liscio sviluppa la reazione "minima" necessaria per mantenere la particella sullo spazio delle configurazioni.

## 4. L'equazione di Newton

Consideriamo una massa

$$m \in \mathbb{R}^+,$$

una forza attiva

$$F : T \times TQ \rightarrow Q \times \bar{P}^*$$

ed una reazione

$$R : T \times TQ \rightarrow Q \times \bar{P}^*.$$

Chiamiamo *moto effettivo* ogni moto vincolato

$$c : T \rightarrow Q \subset P$$

che sia soluzione dell'*equazione di Newton*

$$(*) \quad m \nabla dc = (\bar{F} + \bar{R}) \circ jc.$$

Decomponendo entrambi i membri dell'equazione di Newton (\*) nelle componenti parallela ed ortogonale a  $Q$ , si ottiene il sistema equivalente

$$(*'') \quad m \nabla'' dc = (\bar{F}'' + \bar{R}'') \circ jc$$



$$(*^\perp) \quad m \nabla^\perp dc = (\bar{F}^\perp + \bar{B}^\perp) \circ jc.$$

L'equazione in forma controvariante  $(*^\parallel)$  è equivalente all'equazione in forma covariante

$$(*^\dagger) \quad m g^\flat \circ (\nabla^\parallel dc) = (F^\dagger + B^\dagger) \circ jc,$$

la cui espressione in un qualunque sistema di coordinate lagrangiane è

$$(*^{\dagger i}) \quad m \sum_{1 \leq h, k \leq l} [(g^\dagger_{ij} \circ c) D^2 c^j + (\Gamma^\dagger_{i, hk} \circ c) Dc^h Dc^k] = (F^\dagger_i + B^\dagger_i) \circ jc, \quad 1 \leq i \leq l,$$

oppure, mediante le formule di Lagrange,

$$(*^{\dagger ii}) \quad [D(\frac{\partial T^\dagger}{\partial \dot{q}^i} \circ dc) - \frac{\partial T^\dagger}{\partial q^i} \circ dc] = (F_i + B_i) \circ jc, \quad 1 \leq i \leq l,$$

ossia, con notazione semplificata classica,

$$(*^{\dagger iii}) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T^\dagger}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial T^\dagger}{\partial q^i} = F_i + B_i, \quad 1 \leq i \leq l.$$

Nel caso particolare in cui la forza attiva è conservativa, ossia

$$F^\dagger = dU^\dagger,$$

conviene considerare la *funzione lagrangiana indotta*

$$L^\dagger \equiv L \circ j^\dagger \equiv (T + U) \circ j^\dagger = T^\dagger + U^\dagger : T \times T\mathbf{Q} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Se, per di più, il vincolo è liscio, ossia

$$B^\dagger = 0,$$

allora l'espressione in coordinate dell'equazione  $(*^{\dagger ii})$  diventa

$$(*^{\dagger iii}) \quad [D(\frac{\partial L^\dagger}{\partial \dot{q}^i} \circ dc) - \frac{\partial L^\dagger}{\partial q^i} \circ dc] = 0, \quad 1 \leq i \leq l,$$

ossia, con notazione semplificata classica, (*equazioni di Lagrange vincolate*)

$$(*^{\dagger iii}) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L^\dagger}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L^\dagger}{\partial q^i} = 0, \quad 1 \leq i \leq l.$$

L'equazione  $(*^\parallel)$  (in forma controvariante), o equivalentemente  $(*^\dagger)$  (in forma covariante), può essere scritta come

$$m \nabla^\dagger dc = (\bar{F}^\dagger + \bar{R}^\dagger) \circ jc$$

o, rispettivamente, come

$$m g^{\dagger b} \circ (\nabla^\dagger dc) = (F^\dagger + R^\dagger) \circ jc;$$

essa è dunque completamente analoga all'equazione di un moto libero, purché si sostituiscano gli oggetti relativi a  $\mathbf{P}$  con quelli relativi a  $\mathbf{Q}$ . Inoltre, per questa equazione vale un teorema di esistenza ed unicità delle soluzioni locali, per ogni dato iniziale compatibile con il vincolo

$$(t; p, v) \in T \times T\mathbf{Q},$$

perfettamente analogo al teorema di Cauchy.

Pertanto, l'equazione  $(*^\dagger)$  può essere considerata come *l'equazione indotta del moto vincolato*.

D'altra parte, l'equazione  $(*^\perp)$  può essere espressa mediante la seconda forma fondamentale

$$(*^\perp) \quad m N^\perp \circ dc = (F^\perp + R^\perp) \circ jc.$$

Dunque, riassumendo, l'equazione di moto di Newton  $(*)$  è equivalente al sistema costituito dall'equazione di moto indotta sullo spazio delle configurazioni  $(*^\dagger)$  e dall'equazione  $(*^\perp)$ .

Il problema fondamentale della dinamica vincolata è il seguente.

**PROBLEMA.** 1) Si suppone di conoscere:

a) la sottovarietà

$$\mathbf{Q} \subset \mathbf{P};$$

b) la forza attiva

$$F : T \times T\mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{Q} \times \bar{\mathbf{P}}^*;$$

c) la reazione indotta sullo spazio delle configurazioni

$$R^\dagger : T \times T\mathbf{Q} \rightarrow T^*\mathbf{Q};$$

d) i dati iniziali

$$(\tau; p, v) \in T \times T\mathbf{Q}.$$

2) Si vuole determinare:

a) il moto vincolato

$$c : T \rightarrow Q,$$

b) la componente ortogonale della reazione lungo il moto vincolato  $c$

$$R^\perp \circ dc : T \rightarrow (TQ)^\perp,$$

relativamente ai dati iniziali 1d), come soluzione dell'equazione di Newton associata ai dati 1a), 1b), 1c)

$$m \nabla dc = (\bar{F} + \bar{R}) \circ jc.$$

SOLUZIONE. Si sostituisce l'equazione di Newton

$$(*) \quad m \nabla dc = (\bar{F} + \bar{R}) \circ jc$$

con il sistema equivalente

$$(*^\dagger) \quad m \nabla^\dagger dc = (\bar{F}^\dagger + \bar{R}^\dagger) \circ jc,$$

$$(*^\perp) \quad m N^\circ \circ dc = (\bar{F}^\perp + \bar{R}^\perp) \circ jc.$$

a) La prima equazione  $(*^\dagger)$  contiene solo l'incognita moto. Essa ammette (in un intervallo di tempo sufficientemente piccolo) una ed una sola soluzione che soddisfa i dati iniziali.

b) La seconda equazione  $(*^\perp)$  fornisce esplicitamente la componente ortogonale incognita della reazione

$$(*R^\perp) \quad \bar{R}^\perp = m N^\circ - \bar{F}^\perp,$$

che soddisfa l'equazione di Newton  $(*)$ , insieme al moto soluzione della prima equazione  $(*^\dagger)$ , per ogni scelta dei dati iniziali.  $\square$

L'equazione  $(*R^\perp)$  può essere interpretata dicendo che il vincolo sviluppa una reazione vincolare  $\bar{R}^\perp$ , necessaria e sufficiente ad impedire che il moto, soggetto alla forza attiva (ed alla componente parallela della reazione  $\bar{R}^\parallel$ ) e soddisfacente ai dati iniziali, violi il vincolo. Tale reazione vincolare  $\bar{R}^\perp$  è costituita:

1) dal termine geometrico  $N^\circ$ , il quale dipende solo dalla geometria della sottovarietà e rappresenta la sua curvatura geodetica (e quindi la tendenza della particella vincolata a violare il vincolo per inerzia),

2) dal termine dinamico, il quale compensa la componente ortogonale della forza attiva  $\bar{F}^\perp$ , che tende a violare il vincolo, in quanto induce una componente dell'accelerazione della particella ortogonale allo spazio delle configurazioni.

Notiamo che la componente parallela della reazione  $\bar{R}^\parallel$  non è richiesta necessariamente dalla natura geometrico-dinamica del vincolo al fine di soddisfare la legge di Newton. Ciò nonostante, essa è considerata reazione vincolare, perché è definita solo sullo spazio delle fasi vincolato e perché dipende dal modo fisico concreto con cui è realizzato il vincolo (che nel nostro modello appare solo come un'entità geometrica). Notiamo che, nella maggior parte delle realizzazioni fisiche concrete, la componente parallela della reazione sarà un attrito, che supponiamo di conoscere a priori. Però, ai fini della schematizzazione e della soluzione del problema fondamentale della dinamica vincolata, tanto varrebbe inglobare la componente parallela della reazione nella forza attiva.

La completa analogia tra l'equazione di Newton per una particella libera e l'equazione di Newton indotta sullo spazio delle configurazioni per una particella vincolata implica che i risultati fondamentali della dinamica di una particella libera, quali il teorema dell'energia cinetica, la conservazione della energia (nel caso di forze conservative), e così via, possono essere estesi in modo immediato alla dinamica vincolata.

Il problema fondamentale della statica vincolata è il seguente.

**PROBLEMA.**

1) Si suppone di conoscere:

a) la sottovarietà

$$Q \subset P;$$

b) la forza attiva

$$F : TQ \rightarrow Q \times \bar{P}^*$$

che supponiamo indipendente dal tempo;

c) la reazione indotta sullo spazio delle configurazioni

$$R^\dagger : TQ \rightarrow T^*Q$$

che supponiamo indipendente dal tempo.

2) Si vuole determinare:

a) ogni posizione d'equilibrio, ossia, ogni posizione vincolata

$$q \in \mathbf{Q},$$

tale che il moto che parta da questa posizione (ad un istante qualunque) con velocità iniziale nulla sia il moto costante

$$c : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{Q} : t \mapsto q;$$

b) la componente ortogonale della reazione

$$R^\perp \circ dc : \mathbf{T} \rightarrow (T\mathbf{Q})^\perp,$$

come soluzione dell'equazione di Newton associata ai dati 1a), 1b), 1c)

$$m \nabla dc = (\bar{F} + \bar{R}) \circ jc.$$

SOLUZIONE.

Si sostituisce l'equazione di Newton

$$(*) \quad m \nabla dc = (\bar{F} + \bar{R}) \circ jc$$

con il sistema equivalente

$$(*^\dagger) \quad m \nabla^\dagger dc = (\bar{F}^\dagger + \bar{R}^\dagger) \circ jc,$$

$$(*^\perp) \quad m N^\circ \circ dc = (\bar{F}^\perp + \bar{R}^\perp) \circ jc.$$

a) Tenendo conto del teorema di esistenza ed unicità, la prima equazione  $(*^\dagger)$  implica che le posizioni  $q$  cercate sono tutte e sole quelle che soddisfano l'equazione fondamentale della statica vincolata

$$(F^\dagger + R^\dagger)(q, 0) = 0,$$

ossia, in un qualunque sistema di coordinate adattato,

$$(F_i + R_i)(q, 0) = 0.$$

In particolare, se il vincolo è liscio, l'equazione fondamentale della statica vincolata diventa

$$F^\dagger(q, 0) = 0.$$

Inoltre, se la forza attiva (indotta) è conservativa, allora l'equazione fondamentale della statica vincolata può essere espressa tramite il potenziale

come

$$dU^+(q) = 0,$$

ossia, in un qualunque sistema di coordinate adattato,

$$\frac{\partial U^+}{\partial q^i}(q) = 0.$$

b) La seconda equazione ( $*^\perp$ ) fornisce esplicitamente la componente ortogonale cercata della reazione

$$\bar{R}^\perp(p, 0) = -\bar{F}^\perp(p, 0). \quad \square$$

Nel caso vincolato si può riformulare la nozione di stabilità di una configurazione d'equilibrio in modo del tutto analogo al caso libero (vedi ); anche nel caso vincolato se nella configurazione d'equilibrio si ha un minimo relativo stretto del potenziale, allora l'equilibrio è stabile.

### 3. Moti vincolati notevoli

Sudiamo in dettaglio due esempi notevoli capaci di illustrare la maggior parte degli aspetti teorici della meccanica di una particella vincolata.

#### 1. Pendolo sferico

Consideriamo una “sfera” di raggio  $\rho > 0$  e centro  $o \in \mathbf{P}$

$$\mathbf{Q} \equiv \{p \in \mathbf{P} \mid \|p - o\| = \rho\} \subset \mathbf{P},$$

una massa  $m \in \mathbb{R}^+$  e la forza “peso”

$$\bar{F} \equiv -m \gamma e,$$

dove  $\gamma \in \mathbb{R}^+$  ed  $e \in \bar{\mathbf{P}}$  è un vettore unitario.

Studiamo la dinamica di una particella di massa  $m$  vincolata senza attrito a tale sfera e soggetta alla forza peso.

##### 1. Lo spazio vincolato

La sfera  $\mathbf{Q}$  è una sottovarietà di dimensione 2. Infatti, la sfera è caratterizzata dall'equazione vincolare

$$r = \rho;$$

pertanto, ogni sistema di coordinate sferico  $(r, \vartheta, \varphi)$  con centro in  $o$  è adattato alla sfera.

Sfortunatamente, un solo sistema di coordinate sferico non è sufficiente a coprire tutta la sfera. Infatti, un tale sistema non è ben definito in un intorno aperto che contiene tutta la sfera: a causa della discontinuità della funzione  $\varphi$ , un tale sistema non copre regolarmente un semiarco di cerchio massimo della sfera. Per ricoprire tutta la sfera, è necessario considerare due sistemi di coordinate sferici, in modo che i due semiarci di cerchio massimi esclusi non si intersechino. Però, in pratica, per studiare la maggior parte delle questioni che ci interessano, sarà sufficiente considerare un solo sistema di coordinate sferico e controllare le condizioni di raccordo delle grandezze in esame, attraverso il semiarco di cerchio massimo escluso.

Consideriamo dunque un qualunque sistema di coordinate sferico  $(r, \vartheta, \varphi)$  con centro in  $o$ . Le funzioni  $\vartheta$  e  $\varphi$  sono le funzioni lagrangiane. Per non appesantire la notazione, indicheremo con gli stessi simboli sia le funzioni  $\vartheta$  e  $\varphi$  definite nello spazio ambiente, che le loro restrizioni alla sottovarietà.

Indichiamo con  $(X, Y, Z)$  il sistema di coordinate cartesiano associato a quello sferico.

La funzione metrica della particella libera

$$G : T\mathbf{P} \rightarrow \mathbb{R}$$

è

$$G = \frac{1}{2} (\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2) = \frac{1}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2 + r^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2),$$

per cui la funzione metrica della particella vincolata

$$G^\dagger : T\mathbf{Q} \rightarrow \mathbb{R}$$

è

$$G^\dagger = \frac{1}{2} \varrho^2 (\dot{\vartheta}^2 + \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2).$$

In altre parole, le matrici della metrica della particella libera e vincolata sono

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \vartheta \end{pmatrix}$$

$$(g^\dagger_{ij}) = \begin{pmatrix} \varrho^2 & 0 \\ 0 & \varrho^2 \sin^2 \vartheta \end{pmatrix}$$

Le inverse delle precedenti matrici sono

$$(g^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/(r^2 \sin^2 \vartheta) \end{pmatrix}$$



$$(g^{ij}) = \begin{pmatrix} 1/\rho^2 & 0 \\ 0 & 1/(\rho^2 \sin^2 \vartheta) \end{pmatrix}$$

Fortunatamente, sulla sfera, abbiamo

$$\partial r \cdot \partial \vartheta = 0 \quad \partial r \cdot \partial \varphi = 0;$$

pertanto, le proiezioni parallela ed ortogonale alla sottovarietà

$$\pi^{\parallel} : \mathbf{Q} \times \bar{\mathbf{P}} \rightarrow T\mathbf{Q} \quad \pi^{\perp} : \mathbf{Q} \times \bar{\mathbf{P}} \rightarrow (T\mathbf{Q})^{\perp}$$

si eseguono molto semplicemente, in coordinate sferiche.

## 2. Cinematica

Un moto vincolato

$$c : T \rightarrow \mathbf{Q} \subset \mathbf{P}$$

è caratterizzato dalle due funzioni

$$c^{\vartheta} \equiv \vartheta \circ c : T \rightarrow \mathbb{R} \quad c^{\varphi} \equiv \varphi \circ c : T \rightarrow \mathbb{R},$$

dato che il vincolo è espresso da

$$c^r \equiv r \circ c = \rho.$$

La velocità (applicata) del moto vincolato  $c$

$$dc \equiv (c, Dc) : T \rightarrow T\mathbf{Q} \subset T\mathbf{P}$$

è

$$dc = Dc^{\vartheta} (\partial \vartheta \circ c) + Dc^{\varphi} (\partial \varphi \circ c) = \rho \left( Dc^{\vartheta} (e_{\vartheta} \circ c) + \sin c^{\vartheta} Dc^{\varphi} (e_{\varphi} \circ c) \right).$$

Per calcolare l'accelerazione indotta sulla sottovarietà del moto vincolato  $c$

$$\nabla^{\dagger} dc \equiv (c, D^2 c)^{\parallel} : T \rightarrow T\mathbf{Q}$$

conviene partire dalla sua espressione covariante

$$g^{\dagger \flat} (\nabla^{\dagger} dc) : T \rightarrow T^* \mathbf{Q}$$

calcolata mediante le formule di Lagrange relative alla funzione metrica vincolata  $G^{\dagger}$ . Dunque, abbiamo

$$\begin{aligned}
g^{\dagger\flat}(\nabla^{\dagger}dc) &= \left(D\left(\frac{\partial G^{\dagger}}{\partial \dot{\vartheta}} \circ dc\right) - \frac{\partial G^{\dagger}}{\partial \vartheta} \circ dc\right) (d\vartheta \circ c) + \left(D\left(\frac{\partial G^{\dagger}}{\partial \dot{\varphi}} \circ dc\right) - \frac{\partial G^{\dagger}}{\partial \varphi} \circ dc\right) (d\varphi \circ c) \\
&= \varrho^2 \left(D^2 e^{\vartheta} - \text{sen } e^{\vartheta} \cos e^{\vartheta} (Dc^{\vartheta})^2\right) (d\vartheta \circ c) + \\
&+ \varrho^2 \left(\text{sen}^2 e^{\vartheta} D^2 e^{\varphi} + 2 \text{sen } e^{\vartheta} \cos e^{\vartheta} Dc^{\vartheta} Dc^{\varphi}\right) (d\varphi \circ c),
\end{aligned}$$

da cui, applicando  $g^{\dagger\sharp}$ , otteniamo

$$\begin{aligned}
\nabla^{\dagger}dc &= \left(D^2 e^{\vartheta} - \text{sen } e^{\vartheta} \cos e^{\vartheta} (Dc^{\vartheta})^2\right) (\partial\vartheta \circ c) + \\
&+ \left(D^2 e^{\varphi} + 2 \cos e^{\vartheta} / \text{sen } e^{\vartheta} Dc^{\vartheta} Dc^{\varphi}\right) (\partial\varphi \circ c) \\
(*)^{\dagger} \quad &= \varrho \left(D^2 e^{\vartheta} - \text{sen } e^{\vartheta} \cos e^{\vartheta} (Dc^{\vartheta})^2\right) (e_{\vartheta} \circ c) + \\
&+ \varrho \left(\text{sen } e^{\vartheta} D^2 e^{\varphi} + 2 \cos e^{\vartheta} Dc^{\vartheta} Dc^{\varphi}\right) (e_{\varphi} \circ c).
\end{aligned}$$

Per calcolare l'accelerazione completa del moto vincolato  $c$

$$\nabla dc \equiv (c, D^2 c) : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{Q} \times \bar{\mathbf{P}}$$

conviene partire dalla sua espressione covariante

$$g^{\flat}(\nabla dc) : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{Q} \times \bar{\mathbf{P}}^*$$

calcolata mediante le formule di Lagrange relative alla funzione metrica dello spazio ambiente  $G$ . Dunque, abbiamo

$$\begin{aligned}
g^{\flat}(\nabla dc) &= \left(D\left(\frac{\partial G}{\partial \dot{r}} \circ dc\right) - \frac{\partial G}{\partial r} \circ dc\right) (dr \circ c) + \\
&+ \left(D\left(\frac{\partial G}{\partial \dot{\vartheta}} \circ dc\right) - \frac{\partial G}{\partial \vartheta} \circ dc\right) (d\vartheta \circ c) + \left(D\left(\frac{\partial G}{\partial \dot{\varphi}} \circ dc\right) - \frac{\partial G}{\partial \varphi} \circ dc\right) (d\varphi \circ c) \\
&= -\varrho \left((Dc^{\vartheta})^2 + \text{sen}^2 e^{\vartheta} (Dc^{\varphi})^2\right) (dr \circ c) + \\
&+ \varrho^2 \left(D^2 e^{\vartheta} - \text{sen } e^{\vartheta} \cos e^{\vartheta} (Dc^{\vartheta})^2\right) (d\vartheta \circ c) +
\end{aligned}$$

$$+ \rho^2 \left( \text{sen}^2 e^\vartheta D^2 e^\varphi + 2 \text{sen} e^\vartheta \cos e^\vartheta D e^\vartheta D e^\varphi \right) (d\varphi \circ e)$$

da cui, applicando  $g^\#$ , otteniamo

$$\begin{aligned} \nabla dc &= -\rho \left( (D e^\vartheta)^2 + \text{sen}^2 e^\vartheta (D e^\varphi)^2 \right) (\partial r \circ e) + \\ &+ \left( D^2 e^\vartheta - \text{sen} e^\vartheta \cos e^\vartheta (D e^\varphi)^2 \right) (\partial \vartheta \circ e) + \\ &+ \left( D^2 e^\varphi + 2 \cos e^\vartheta / \text{sen} e^\vartheta D e^\vartheta D e^\varphi \right) (\partial \varphi \circ e) \\ &= -\rho \left( (D e^\vartheta)^2 + \text{sen}^2 e^\vartheta (D e^\varphi)^2 \right) (e_r \circ e) + \\ &+ \rho \left( D^2 e^\vartheta - \text{sen} e^\vartheta \cos e^\vartheta (D e^\varphi)^2 \right) (e_\vartheta \circ e) + \\ &+ \rho \left( \text{sen} e^\vartheta D^2 e^\varphi + 2 \cos e^\vartheta D e^\vartheta D e^\varphi \right) (e_\varphi \circ e). \end{aligned}$$

Pertanto le componenti parallela ed ortogonale al vincolo dell'accelerazione completa del moto vincolato  $c$

$$\nabla^\dagger dc \equiv (\nabla dc)^\parallel : \mathbf{T} \rightarrow T\mathbf{Q} \quad N^\circ \circ dc \equiv (\nabla dc)^\perp = \nabla dc - (\nabla dc)^\parallel : \mathbf{T} \rightarrow (T\mathbf{Q})^\perp$$

possono essere calcolate direttamente considerando le componenti secondo  $\vartheta$  e  $\varphi$  e secondo  $r$  dell'accelerazione completa, rispettivamente; esse sono dunque date da

$$\begin{aligned} (*)^\parallel \quad (\nabla dc)^\parallel &= \rho \left( D^2 e^\vartheta - \text{sen} e^\vartheta \cos e^\vartheta (D e^\varphi)^2 \right) (e_\vartheta \circ e) + \\ &+ \rho \left( \text{sen} e^\vartheta D^2 e^\varphi + 2 \cos e^\vartheta D e^\vartheta D e^\varphi \right) (e_\varphi \circ e) \end{aligned}$$

$$(*)^\perp \quad N^\circ \circ dc \equiv (\nabla dc)^\perp = -\rho \left( (D e^\vartheta)^2 + \text{sen}^2 e^\vartheta (D e^\varphi)^2 \right) (e_r \circ e).$$

Le formule  $(*)^\dagger$  e  $(*)^\parallel$  danno lo stesso risultato, come era da attendersi.

Si noti che ciascuna componente dell'espressione controvariante dell'accelerazione e dell'accelerazione parallela è composta esattamente da due termini: la derivata seconda della corrispondente componente del moto ed una combinazione bilineare delle derivate prime delle componenti del moto. Si noti

anche che ciascuna componente dell'espressione controvariante dell'accelerazione ortogonale è una combinazione bilineare delle derivate prime delle componenti del moto. A questo punto dei calcoli, conviene sempre fare questo controllo.

Si noti che per calcolare  $(\nabla dc)^+ = \nabla dc - (\nabla dc)^{\parallel}$  è stato necessario ritornare alla forma controvariante delle accelerazioni, perché non ha senso la differenza delle corrispondenti forme covarianti. A questo proposito, si noti che le forme  $d\vartheta$  e  $d\varphi$  che compaiono nell'espressione di  $g^{\flat}(\nabla dc)$  sono diverse dalle forme  $d\vartheta$  e  $d\varphi$  (denotate con lo stesso simbolo, per abuso di linguaggio) che compaiono nell'espressione di  $g^{\sharp}(\nabla^+ dc)$ ; infatti, le seconde sono le restrizioni delle prime ai vettori tangenti alla sfera.

Per ulteriore illustrazione e controllo, analizziamo in dettaglio alcuni casi particolari.

Se

$$e^{\vartheta} = \pi/2,$$

allora otteniamo

$$dc = \varrho Dc^{\varphi} (e_{\varphi} \circ e)$$

$$\nabla^+ dc \equiv (\nabla dc)^{\parallel} = \varrho D^2 c^{\varphi} (e_{\varphi} \circ e) \quad N^{\circ} dc \equiv (\nabla dc)^+ = -\varrho (Dc^{\varphi})^2 (e_r \circ e).$$

Se

$$e^{\varphi} = \varphi_0,$$

allora otteniamo

$$dc = \varrho Dc^{\vartheta} (e_{\vartheta} \circ e)$$

$$\nabla^+ dc \equiv (\nabla dc)^{\parallel} = \varrho D^2 c^{\vartheta} (e_{\vartheta} \circ e) \quad N^{\circ} dc \equiv (\nabla dc)^+ = -\varrho (Dc^{\vartheta})^2 (e_r \circ e).$$

### 3. Dinamica

Tenendo conto della forza  $F$ , scegliamo il sistema di coordinate sferico in modo che risulti

$$e_{\vartheta} = e,$$

ossia

$$Z : \mathbf{P} \rightarrow \mathbb{R} : p \mapsto (p - o) \cdot e.$$

L'espressione della forza nel sistema di coordinate cartesiano risulta allora

$$\bar{F} = -m \gamma \partial Z.$$

Per calcolare le proiezioni parallela ed ortogonale al vincolo di  $\bar{F}$ , basta calcolare  $\bar{F}$  in coordinate sferiche. Per questo scopo, si può esprimere  $e_3$  in coordinate sferiche, mediante il cambiamento di coordinate da cartesiane a sferiche o mediante un calcolo trigonometrico. Ma il modo più semplice di eseguire il calcolo è di passare a forma covariante. Infatti, abbiamo

$$F = -m \gamma dZ = -m \gamma (\cos \vartheta dr - r \sin \vartheta d\vartheta),$$

da cui, applicando  $g^\#$ , otteniamo

$$\bar{F} = -m \gamma (\cos \vartheta \partial r - 1/r \sin \vartheta \partial \vartheta) = -m \gamma (\cos \vartheta e_r - \sin \vartheta e_\vartheta).$$

Pertanto, le proiezioni parallela ed ortogonale al vincolo della forza sono

$$(+)^{\parallel} \quad \bar{F}^{\parallel} = m \gamma \sin \vartheta e_\vartheta$$

$$(+)^{\perp} \quad \bar{F}^{\perp} = -m \gamma \cos \vartheta e_r.$$

La restrizione al vincolo della forza in forma covariante è

$$(+)^{\dagger} \quad F^{\dagger} = m \gamma \rho \sin \vartheta d\vartheta.$$

Confrontando le formule  $(+)^{\parallel}$  e  $(+)^{\dagger}$ , si verifica immediatamente che

$$\bar{F}^{\parallel} = g^{\dagger\#}(F^{\dagger}).$$

La forza  $F$  è conservativa ed il suo potenziale completo

$$U : \mathbf{P} \rightarrow \mathbb{R}$$

è

$$U = -m \gamma Z = -m \gamma r \cos \vartheta.$$

Il potenziale ristretto al vincolo è

$$U^{\dagger} = -m \gamma \rho \cos \vartheta.$$

Si verifica immediatamente che

$$F^\dagger = dU^\dagger;$$

anzi, questa formula fornisce il metodo più rapido per il calcolo di  $F^\dagger$ .

Il fatto che il vincolo è liscio è espresso da ciascuna delle due condizioni equivalenti

$$\bar{R}^u = 0 \quad R^\dagger = 0,$$

ossia, in coordinate,

$$R^\vartheta \partial\vartheta + R^\varphi \partial\varphi = 0 \quad R_\vartheta d\vartheta + R_\varphi d\varphi = 0.$$

La lagrangiana vincolata è la funzione

$$L^\dagger \equiv T^\dagger + U^\dagger = \frac{1}{2} m \varrho^2 (\dot{\vartheta}^2 + \sin^2\vartheta \dot{\varphi}^2) - m \gamma \varrho \cos \vartheta.$$

L'equazione di moto è data dall'equazione di Lagrange vincolata

$$\left( D\left(\frac{\partial L^\dagger}{\partial \dot{\vartheta}} \circ d\mathbf{c}\right) - \frac{\partial L^\dagger}{\partial \vartheta} \circ d\mathbf{c} \right) (d\vartheta \circ \mathbf{c}) + \left( D\left(\frac{\partial L^\dagger}{\partial \dot{\varphi}} \circ d\mathbf{c}\right) - \frac{\partial L^\dagger}{\partial \varphi} \circ d\mathbf{c} \right) (d\varphi \circ \mathbf{c}) = 0,$$

ossia dal sistema di due equazioni

$$\varrho \left( D^2 c^\vartheta - \sin c^\vartheta \cos c^\vartheta (Dc^\varphi)^2 \right) = \gamma \sin c^\vartheta$$

$$\varrho \left( \sin c^\vartheta D^2 c^\varphi + 2 \cos c^\vartheta Dc^\vartheta Dc^\varphi \right) = 0.$$

Non è facile trovare tutte le soluzioni di questo di sistema. Però, possiamo almeno discutere alcune conseguenze.

1) Per esempio, le soluzioni corrispondenti ai dati iniziali (parziali)

$$c^\varphi(t_0) = \varphi_0 \quad Dc^\vartheta(t_0) = 0$$

sono le soluzioni del sistema ridotto

$$\varrho D^2 c^\vartheta = \gamma \sin c^\vartheta$$

$$c^\varphi = \varphi_0,$$

ossia del sistema ridotto del “pendolo piano”

$$\varrho D^2 c^\alpha + \gamma \sin c^\alpha = 0, \quad \alpha \equiv \vartheta - \pi.$$

$$e^\varphi = \varphi_0.$$

2) Per esempio, le soluzioni tali che

$$e^\vartheta = \vartheta_0$$

sono le soluzioni del sistema ridotto

$$-\rho \sin \vartheta_0 \cos \vartheta_0 (Dc^\varphi)^2 = \gamma \sin \vartheta_0$$

$$\rho \sin \vartheta_0 D^2 c^\varphi = 0,$$

ossia sono i moti  $c$  del tipo

$$e^\vartheta = \vartheta_0 \quad c^\varphi(t) = \omega (t - t_0) + \varphi_0$$

con

$$\omega = \sqrt{-\gamma / (\rho \cos \vartheta_0)} \quad \pi/2 > \vartheta_0 > \pi,$$

oltre alle due soluzioni statiche date da

$$e^\vartheta = 0 \quad e^\vartheta = \pi.$$

Possiamo ritrovare le due soluzioni statiche anche per altra via. Infatti, le configurazioni d'equilibrio sono i punti di  $q \in \mathcal{Q}$  che soddisfano l'equazione

$$0 = dU^+ \equiv m \gamma \rho \sin \vartheta d\vartheta,$$

ossia i due punti  $q_1, q_2 \in \mathcal{Q}$  di coordinate

$$\vartheta(q_1) = 0 \quad \vartheta(q_2) = \pi.$$

Si vede facilmente che  $q_2$  è una configurazione di equilibrio stabile perché il potenziale ha un massimo relativo in  $q_2$ .

Infine, tenendo conto delle formule  $(*)^\perp$  e  $(+)^\perp$ , si ottiene la reazione vincolare

$$\bar{R} = (-m \rho (\dot{\vartheta}^2 + \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2) + m \gamma \cos \vartheta) e_r.$$

Si noti che i due punti  $q_1$  e  $q_2$  sono caratterizzati solo dalla coordinata  $\vartheta$  e che la coordinata  $\varphi$  non è definita in questi due punti che appartengono pro-

prio al semiarco di cerchio massimo in cui il sistema di coordinate scelto non è regolare. Pertanto, i risultati ora enunciati relativamente alla statica vanno controllati con ragionamenti delicati basati sull'estensione per continuità di alcune delle applicazioni in oggetto. Per un ulteriore controllo, rifacciamo tutti i calcoli con un altro sistema di coordinate sferico che copre il semiarco di cerchio massimo in cui l'attuale sistema di coordinate sferico è irregolare.

Scegliamo il secondo sistema di coordinate sferico  $(r, \vartheta, \varphi)$  in modo che la nuova funzione  $Y$  coincida con la vecchia  $Z$ , la nuova funzione  $Z$  coincida con la vecchia  $-X$  e la nuova funzione  $X$  coincida con la vecchia  $Y$ . Ripetiamo i ragionamenti nel nuovo sistema di coordinate. Vedremo che nel nuovo sistema i calcoli sono un pò più complicati; d'altra parte, le soluzioni statiche capitano nel dominio dove il secondo sistema di coordinate è regolare.

Nel nuovo sistema di coordinate abbiamo, dunque,

$$e_2 = e,$$

ossia

$$Y : \mathbf{P} \rightarrow \mathbb{R} : p \mapsto (p - o) \cdot e.$$

Per calcolare le proiezioni parallela ed ortogonale al vincolo di  $\bar{F}$ , basta calcolare  $\bar{F}$  in coordinate sferiche. Per questo scopo, si potrebbe esprimere  $e_2$  in coordinate sferiche mediante il cambiamento di coordinate da cartesiane a sferiche o mediante un calcolo trigonometrico. Ma il modo più semplice di eseguire il calcolo è di passare a forma covariante. Infatti, abbiamo

$$F = -m \gamma dY =$$

$$= -m \gamma (\sin \vartheta \sin \varphi dr + r \cos \vartheta \sin \varphi d\vartheta + r \sin \vartheta \cos \varphi d\varphi),$$

da cui, applicando  $g^\#$ , otteniamo

$$\bar{F} = -m \gamma (\sin \vartheta \sin \varphi \partial r + 1/r \cos \vartheta \sin \varphi \partial \vartheta + 1/(r \sin \vartheta) \cos \varphi \partial \varphi) =$$

$$= -m \gamma (\sin \vartheta \sin \varphi e_r + \cos \vartheta \sin \varphi e_\vartheta + \cos \varphi e_\varphi).$$

Pertanto, le proiezioni parallela ed ortogonale al vincolo della forza sono

$$(+)^{\parallel} \quad \bar{F}^{\parallel} = -m \gamma (\cos \vartheta \sin \varphi e_\vartheta + \cos \varphi e_\varphi)$$



$$(+)^{\perp} \quad \bar{F}^{\perp} = -m \gamma \operatorname{sen} \vartheta \operatorname{sen} \varphi e_r.$$

La restrizione al vincolo della forza in forma covariante è

$$(+)^{\dagger} \quad F^{\dagger} = -m \gamma \varrho (\cos \vartheta \operatorname{sen} \varphi d\vartheta + \operatorname{sen} \vartheta \cos \varphi d\varphi).$$

Confrontando le formule  $(+)^{\dagger}$  e  $(+)^{\parallel}$ , si verifica immediatamente che

$$\bar{F}^{\parallel} = g^{\dagger \#}(F^{\dagger}).$$

La forza  $F$  è conservativa ed il suo potenziale completo

$$U : \mathbf{P} \rightarrow \mathbb{R}$$

è

$$U = -m \gamma Y = -m \gamma r \operatorname{sen} \vartheta \operatorname{sen} \varphi.$$

Il potenziale ristretto al vincolo è

$$U^{\dagger} = -m \gamma \varrho \operatorname{sen} \vartheta \operatorname{sen} \varphi.$$

Si verifica immediatamente che

$$F^{\dagger} = dU^{\dagger};$$

anzi, questa formula fornisce il metodo più rapido per il calcolo di  $F^{\dagger}$ .

Il fatto che il vincolo è liscio è espresso da ciascuna delle due condizioni equivalenti

$$\bar{R}^{\parallel} = 0 \quad R^{\dagger} = 0,$$

ossia, in coordinate,

$$R^{\vartheta} \partial \vartheta + R^{\varphi} \partial \varphi = 0 \quad R_{\vartheta} d\vartheta + R_{\varphi} d\varphi = 0.$$

Studiamo, infine, la dinamica del problema.

La lagrangiana vincolata è la funzione

$$L^{\dagger} \equiv T^{\dagger} + U^{\dagger} = \frac{1}{2} m \varrho^2 (\dot{\vartheta}^2 + \operatorname{sen}^2 \vartheta \dot{\varphi}^2) - m \gamma \varrho \operatorname{sen} \vartheta \operatorname{sen} \varphi.$$

L'equazione di moto è data dall'equazione di Lagrange vincolata

$$\left( D\left(\frac{\partial L^{\dagger}}{\partial \dot{\vartheta}} \circ dc\right) - \frac{\partial L^{\dagger}}{\partial \vartheta} \circ dc \right) (d\vartheta \circ c) + \left( D\left(\frac{\partial L^{\dagger}}{\partial \dot{\varphi}} \circ dc\right) - \frac{\partial L^{\dagger}}{\partial \varphi} \circ dc \right) (d\varphi \circ c) = 0,$$

ossia dal sistema di due equazioni

$$\rho \left( D^2 e^\vartheta - \operatorname{sen} e^\vartheta \cos e^\vartheta (D e^\varphi)^2 \right) = -\gamma \cos e^\vartheta \operatorname{sen} e^\varphi$$

$$\rho \left( \operatorname{sen} e^\vartheta D^2 e^\varphi + 2 \cos e^\vartheta D e^\vartheta D e^\varphi \right) = -\gamma \cos e^\varphi.$$

Non è facile trovare tutte le soluzioni di questo di sistema. Però, possiamo almeno discutere alcune conseguenze.

Per esempio, le soluzioni corrispondenti ai dati iniziali (parziali)

$$e^\varphi(t_0) = \pi/2 \quad D e^\varphi(t_0) = 0$$

sono le soluzioni del sistema ridotto

$$e^\varphi = \pi/2$$

$$\rho D^2 e^\vartheta = -m \gamma \cos e^\vartheta,$$

ossia del sistema ridotto del “pendolo piano”

$$e^\varphi = \pi/2$$

$$\rho D^2 e^\alpha + m \gamma \operatorname{sen} e^\alpha = 0, \quad \alpha \equiv \vartheta + \pi/2.$$

In questo sistema di coordinate, risulta piuttosto difficile studiare le soluzioni di tipo circolare uniforme.

Infine, le configurazioni d'equilibrio sono i punti di  $q \in \mathbf{Q}$  che soddisfano l'equazione

$$0 = dU^\dagger \equiv -m\gamma \rho (\cos \vartheta \operatorname{sen} \varphi d\vartheta + \operatorname{sen} \vartheta \cos \varphi d\varphi),$$

ossia i due punti  $q_1, q_2 \in \mathbf{Q}$  di coordinate

$$\vartheta(q_1) = \pi/2 \quad \varphi(q_1) = \pi/2$$

$$\vartheta(q_2) = \pi/2 \quad \varphi(q_2) = 3\pi/2.$$

Si vede facilmente che  $q_2$  è una configurazione di equilibrio stabile perché il potenziale ha un massimo relativo in  $q_2$ .

Infine, tenendo conto delle formule  $(*)^\perp$  e  $(+)^\perp$ , si ottiene la reazione vincolare

$$\bar{R} = (-m \varrho (\dot{\vartheta}^2 + \text{sen}^2 \vartheta \dot{\varphi}^2) + m \gamma \text{sen} \vartheta \text{sen} \varphi) e_r.$$

## 2. Pendolo parabolico

Consideriamo un “paraboloide” con coefficiente d'apertura  $a > 0$ , vertice  $o \in \mathbf{P}$  ed asse generato dal vettore unitario  $e \in \bar{\mathbf{P}}$

$$\mathbf{Q} \equiv \{p \in \mathbf{P} \mid (p - o) \cdot e = a ((p - o)^2 - ((p - o) \cdot e)^2)\} \subset \mathbf{P},$$

una massa  $m \in \mathbb{R}^+$  e la forza “peso”

$$\bar{F} \equiv -m \gamma e,$$

dove  $\gamma \in \mathbb{R}^+$ .

Studiamo la dinamica di una particella di massa  $m$  vincolata senza attrito a tale paraboloide e soggetta alla forza peso.

### 1. Lo spazio vincolato

Consideriamo un sistema di coordinate cartesiano  $(X, Y, Z)$ , ed il corrispondente sistema di coordinate cilindrico  $(\varrho, \varphi, Z)$ , con origine  $o$  e tale che

$$e_z = e.$$

Il paraboloide  $\mathbf{Q}$  è il luogo dei punti che annullano la funzione vincolare

$$f \equiv Z - a (X^2 + Y^2) = Z - a \varrho^2.$$

La terne di funzioni  $(X, Y, f)$  e  $(\varrho, \varphi, f)$  sono sistemi di coordinate di  $\mathbf{P}$ , che chiameremo *cartesiano-parabolico* e *cilindrico-parabolico*. Infatti, i cambiamenti di coordinate

$$X = X \quad Y = Y \quad f = Z - a (X^2 + Y^2) \quad \varrho = \varrho \quad \varphi = \varphi \quad f = Z - a \varrho^2$$

$$X = X \quad Y = Y \quad Z = f + a (X^2 + Y^2) \quad \varrho = \varrho \quad \varphi = \varphi \quad Z = f + a \varrho^2$$

sono invertibili e  $C^\infty$  nei due sensi.

Pertanto, il paraboloide  $\mathbf{Q}$  è una sottovarietà di dimensione 2 ed i sistemi di coordinate cartesiano-parabolico  $(X, Y, f)$  e cilindrico-parabolico sono adattati al paraboloide.

Il sistema di coordinate cartesiano-parabolico è sufficiente a coprire tutto il paraboloide. Invece, il sistema di coordinate cilindrico-parabolico non copre

un arco e, comunque si ruoti l'asse delle  $X$  attorno ad  $o$  nel piano  $XY$ , il sistema di coordinate cilindrico-parabolico è irregolare nel vertice del paraboloide. Però, molti calcoli sono più semplici nel sistema di coordinate cilindrico-parabolico; perciò, preferiamo adottare questo sistema ed usare il sistema cartesiano-parabolico per controllare i risultati relativamente al vertice del paraboloide.

Le funzioni  $X$  ed  $Y$ , oppure le funzioni  $\varrho$  e  $\varphi$ , sono le funzioni lagrangiane. Per non appesantire la notazione, indicheremo con gli stessi simboli sia le funzioni  $X$  e  $Y$ , oppure  $\varrho$  e  $\varphi$ , definite nello spazio ambiente che le loro restrizioni alla sottovarietà.

La funzione metrica della particella libera

$$G : T\mathbf{P} \rightarrow \mathbb{R}$$

è

$$\begin{aligned} G &= \frac{1}{2} (\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2) = \frac{1}{2} (\dot{\varrho}^2 + \varrho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{Z}^2) \\ &= \frac{1}{2} \left( (1 + 4a^2 X^2) \dot{X}^2 + (1 + 4a^2 Y^2) \dot{Y}^2 + 8a^2 XY \dot{X} \dot{Y} + \dot{f}^2 + 4a \dot{f} (X \dot{X} + Y \dot{Y}) \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left( (1 + 4a^2 \varrho^2) \dot{\varrho}^2 + \varrho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{f}^2 + 4a \varrho \dot{f} \dot{\varrho} \right), \end{aligned}$$

per cui la funzione metrica della particella vincolata

$$G^+ : T\mathbf{Q} \rightarrow \mathbb{R}$$

è

$$\begin{aligned} G^+ &= \frac{1}{2} \left( (1 + 4a^2 X^2) \dot{X}^2 + (1 + 4a^2 Y^2) \dot{Y}^2 + 8a^2 XY \dot{X} \dot{Y} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left( (1 + 4a^2 \varrho^2) \dot{\varrho}^2 + \varrho^2 \dot{\varphi}^2 \right). \end{aligned}$$

In altre parole, le matrici della metrica della particella libera e vincolata sono, in coordinate cartesiane-paraboliche,

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 + 4a^2 X^2 & 4a^2 XY & 2aX \\ 4a^2 XY & 1 + 4a^2 Y^2 & 2aY \\ 2aX & 2aY & 1 \end{pmatrix}$$

$$(g^{\dagger}_{ij}) = \begin{pmatrix} 1+4a^2X^2 & 4a^2XY \\ 4a^2XY & 1+4a^2Y^2 \end{pmatrix}$$

ed, in coordinate cilindriche-paraboliche,

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1+4a^2\rho^2 & 0 & 2a\rho \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 2a\rho & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(g^{\dagger}_{ij}) = \begin{pmatrix} 1+4a^2\rho^2 & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{pmatrix}$$

L'inversa della matrice  $(g_{ij})$  è, in coordinate cartesiane-paraboliche,

$$(g^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2aX \\ 0 & 1 & -2aY \\ -2aX & -2aY & 1+4a^2(X^2+Y^2) \end{pmatrix}$$

ed, in coordinate cilindriche-paraboliche,

$$(g^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2a\rho \\ 0 & 1/\rho^2 & 0 \\ -2a\rho & 0 & 1+4a^2\rho^2 \end{pmatrix}$$

L'inversa della matrice  $(g^{\dagger}_{ij})$  è, in coordinate cartesiane-paraboliche,

$$(g^{\dagger ij}) = \frac{1}{1+4a^2(X^2+Y^2)} \begin{pmatrix} 1+4a^2Y^2 & -4a^2XY \\ -4a^2XY & 1+4a^2X^2 \end{pmatrix}$$

ed, in coordinate cilindriche-paraboliche,

$$(g^{\dagger ij}) = \begin{pmatrix} 1/(1+4a^2\rho^2) & 0 \\ 0 & 1/\rho^2 \end{pmatrix}$$

## 2. Cinematica

Un moto vincolato

$$c : T \rightarrow \mathbf{Q} \subset P$$

è caratterizzato, equivalentemente, dalle due funzioni

$$c^X \equiv X \circ c : T \rightarrow \mathbb{R} \quad c^Y \equiv Y \circ c : T \rightarrow \mathbb{R},$$

o dalle due funzioni

$$c^\rho \equiv \rho \circ c : T \rightarrow \mathbb{R} \quad c^\varphi \equiv \varphi \circ c : T \rightarrow \mathbb{R},$$

dato che il vincolo è espresso da

$$c^f \equiv f \circ c = 0.$$

La velocità (applicata) del moto vincolato  $c$

$$dc \equiv (c, Dc) : T \rightarrow T\mathbf{Q} \subset TP$$

è

$$dc = Dc^X (\partial X \circ c) + Dc^Y (\partial Y \circ c) = Dc^\rho (\partial \rho \circ c) + Dc^\varphi (\partial \varphi \circ c).$$

Attenzione: i vettori  $\partial X$ ,  $\partial Y$ ,  $\partial \rho$ ,  $\partial \varphi$  che compaiono nelle formule precedenti (e che sono stati indicati per semplicità con questa notazione abusiva) sono tangenti al paraboloide, in quanto sono definiti con il vincolo  $f = \text{costante}$ ; essi, però non vanno confusi con i corrispondenti vettori relativi ad un sistema di coordinate cartesiano o cilindrico, che sono definiti con il vincolo  $Z = \text{costante}$ .

Per calcolare l'accelerazione indotta sulla sottovarietà del moto vincolato  $c$

$$\nabla^\dagger dc : T \rightarrow T\mathbf{Q}$$

conviene partire dalla sua espressione covariante

$$g^{\dagger b}(\nabla^\dagger dc) : T \rightarrow T^*\mathbf{Q}$$

calcolata mediante le formule di Lagrange relative alla funzione metrica vincolata  $G^\dagger$ .

Dunque, abbiamo, in coordinate cartesiane-paraboliche,

$$\begin{aligned} g^{\dagger b}(\nabla^\dagger dc) &= \left( D\left(\frac{\partial G^\dagger}{\partial \dot{X}} \circ dc\right) - \frac{\partial G^\dagger}{\partial X} \circ dc \right) (dX \circ c) + \left( D\left(\frac{\partial G^\dagger}{\partial \dot{Y}} \circ dc\right) - \frac{\partial G^\dagger}{\partial Y} \circ dc \right) (dY \circ c) \\ &= \left( (1 + 4 a^2 (c^X)^2) D^2 c^X + 4 a^2 c^X c^Y D^2 c^Y + 4 a^2 c^X ((Dc^X)^2 + (Dc^Y)^2) \right) (dX \circ c) + \end{aligned}$$

$$+ \left( (1 + 4 a^2 (c^Y)^2) D^2 c^Y + 4 a^2 c^X c^Y D^2 c^X + 4 a^2 c^Y ((Dc^X)^2 + (Dc^Y)^2) \right) (dY \circ c),$$

da cui, applicando  $g^{\dagger\#}$ , otteniamo

$$\begin{aligned} \nabla^{\dagger} dc &= [D^2 c^X + \frac{4a^2 c^X}{1+4a^2((c^X)^2+(c^Y)^2)} ((Dc^X)^2 + (Dc^Y)^2)] (\partial X \circ c) + \\ &+ [D^2 c^Y + \frac{4a^2 c^Y}{1+4a^2((c^X)^2+(c^Y)^2)} ((Dc^X)^2 + (Dc^Y)^2)] (\partial Y \circ c) \end{aligned}$$

ed, in coordinate cilindriche-paraboliche,

$$\begin{aligned} g^{\dagger\flat}(\nabla^{\dagger} dc) &= \left( D\left(\frac{\partial G^{\dagger}}{\partial \varrho} \circ dc\right) - \frac{\partial G^{\dagger}}{\partial \varrho} \circ dc \right) (d\varrho \circ c) + \left( D\left(\frac{\partial G^{\dagger}}{\partial \dot{\varphi}} \circ dc\right) - \frac{\partial G^{\dagger}}{\partial \dot{\varphi}} \circ dc \right) (d\varphi \circ c) \\ &= \left( (1 + 4 a^2 (c^{\varrho})^2) D^2 c^{\varrho} + 4 a^2 c^{\varrho} (Dc^{\varrho})^2 - c^{\varrho} (Dc^{\varphi})^2 \right) (d\varrho \circ c) + \\ &+ \left( (c^{\varrho})^2 D^2 c^{\varphi} + 2 c^{\varrho} Dc^{\varrho} Dc^{\varphi} \right) (d\varphi \circ c), \end{aligned}$$

da cui, applicando  $g^{\dagger\#}$ , otteniamo

$$\begin{aligned} \nabla^{\dagger} dc &= [D^2 c^{\varrho} + \frac{4a^2 c^{\varrho}}{1+4a^2(c^{\varrho})^2} (Dc^{\varrho})^2 - \frac{c^{\varrho}}{1+4a^2(c^{\varrho})^2} (Dc^{\varphi})^2] (\partial \varrho \circ c) + \\ &+ \left( D^2 c^{\varphi} + 2 \frac{1}{c^{\varrho}} Dc^{\varrho} Dc^{\varphi} \right) (\partial \varphi \circ c). \end{aligned}$$

Per calcolare l'accelerazione completa del moto vincolato  $c$

$$\nabla dc : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{Q} \times \bar{\mathbf{P}}$$

conviene partire dalla sua espressione covariante

$$g^{\flat}(\nabla dc) : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{Q} \times \bar{\mathbf{P}}^*$$

calcolata mediante le formule di Lagrange relative alla funzione metrica dello spazio ambiente  $G$  ed al moto vincolato  $c$ .

Dunque, abbiamo, in coordinate cartesiane-paraboliche,

$$g^{\flat}(\nabla dc) = \left( D\left(\frac{\partial G}{\partial \dot{X}} \circ dc\right) - \frac{\partial G}{\partial X} \circ dc \right) (dX \circ c) + \left( D\left(\frac{\partial G}{\partial \dot{Y}} \circ dc\right) - \frac{\partial G}{\partial Y} \circ dc \right) (dY \circ c) +$$

$$\begin{aligned}
& + \left( D\left(\frac{\partial G}{\partial f} \circ dc\right) - \frac{\partial G}{\partial f} \circ dc \right) (df \circ c) = \\
& = \left[ \left( 1 + 4 a^2 (e^X)^2 \right) D^2 e^X + 4 a^2 e^X \left( (D e^X)^2 + (D e^Y)^2 \right) + 4 a^2 e^X e^Y D^2 e^Y + \right. \\
& \quad \left. + 2 a e^X D^2 D^2 e^f \right] (dX \circ c) + \\
& = \left[ \left( 1 + 4 a^2 (e^Y)^2 \right) D^2 e^Y + 4 a^2 e^Y \left( (D e^X)^2 + (D e^Y)^2 \right) + 4 a^2 e^X e^Y D^2 e^X + \right. \\
& \quad \left. + 2 a e^Y D^2 D^2 e^f \right] (dY \circ c) + \\
& \quad + \left[ D^2 e^f + 2 a (e^X D^2 e^X + e^Y D^2 e^Y) + 2 a \left( (D e^X)^2 + (D e^Y)^2 \right) \right] (df \circ c)
\end{aligned}$$

e, in coordinate cilindriche-paraboliche,

$$\begin{aligned}
g^\flat(\nabla dc) & = \left( D\left(\frac{\partial G}{\partial \dot{\varrho}} \circ dc\right) - \frac{\partial G}{\partial \dot{\varrho}} \circ dc \right) (d\varrho \circ c) + \left( D\left(\frac{\partial G}{\partial \dot{\varphi}} \circ dc\right) - \frac{\partial G}{\partial \dot{\varphi}} \circ dc \right) (d\varphi \circ c) \\
& \quad + \left( D\left(\frac{\partial G}{\partial f} \circ dc\right) - \frac{\partial G}{\partial f} \circ dc \right) (df \circ c) = \\
& = \left[ \left( 1 + 4 a^2 (e^\varrho)^2 \right) D^2 e^\varrho + 4 a^2 e^\varrho (D e^\varrho)^2 - e^\varrho (D e^\varphi)^2 \right] (d\varrho \circ c) + \\
& \quad + \left( (e^\varrho)^2 D^2 e^\varphi + 2 e^\varrho D e^\varrho D e^\varphi \right) (d\varphi \circ c) + \\
& \quad + 2 \left( a e^\varrho D^2 e^\varrho + a (D e^\varrho)^2 \right) (df \circ c),
\end{aligned}$$

da cui, applicando  $g^\sharp$ , otteniamo, in coordinate cartesiane-paraboliche,

$$\begin{aligned}
\nabla dc & = D^2 e^X (\partial X \circ c) + D^2 e^Y (\partial Y \circ c) + \\
& \quad + \left[ D^2 e^f + 2 a \left( (D e^X)^2 + (D e^Y)^2 \right) \right] (\partial f \circ c)
\end{aligned}$$

e, in coordinate cilindriche-paraboliche,



$$\begin{aligned} \nabla dc &= (D^2 c^\varrho - c^\varrho (Dc^\varphi)^2) (\partial\varrho \circ c) + (D^2 c^\varphi + 2 \frac{1}{c^\varrho} Dc^\varrho Dc^\varphi) (\partial\varphi \circ c) + \\ &+ ((Dc^f)^2 + 2 a ((Dc^\varrho)^2 + (c^\varrho)^2 (Dc^\varphi)^2)) (\partial f \circ c). \end{aligned}$$

Pertanto la componente ortogonale al vincolo dell'accelerazione completa del moto vincolato  $c$

$$N^\circ dc \equiv (\nabla dc)^\perp : \mathbf{T} \rightarrow (T\mathbf{Q})^\perp$$

è, in coordinate cartesiane-paraboliche,

$$\begin{aligned} N^\circ dc &= \\ &= -2 a ((Dc^X)^2 + (Dc^Y)^2) \left[ \frac{2a}{1+4a^2((c^X)^2+(c^Y)^2)} (c^X (\partial X \circ c) + c^Y (\partial Y \circ c)) + (\partial f \circ c) \right] \end{aligned}$$

e, in coordinate cilindriche-paraboliche,

$$N^\circ dc = [(Dc^\varrho)^2 + (c^\varrho)^2 (Dc^\varphi)^2] \left[ -\frac{4a^2 c^\varrho}{1+4a^2 (c^\varrho)^2} (\partial\varrho \circ c) + 2 a (\partial f \circ c) \right].$$

Si noti che ciascuna componente dell'espressione controvariante dell'accelerazione e dell'accelerazione parallela è composta esattamente da due termini: la derivata seconda della corrispondente componente del moto ed una combinazione bilineare delle derivate prime delle componenti del moto. Si noti anche che ciascuna componente dell'espressione controvariante dell'accelerazione ortogonale è una combinazione bilineare delle derivate prime delle componenti del moto. A questo punto dei calcoli, conviene sempre fare questo controllo.

Si noti che per calcolare  $(\nabla dc)^\perp = \nabla dc - (\nabla dc)^\parallel$  è stato necessario ritornare alla forma controvariante delle accelerazioni, perché non ha senso la differenza delle corrispondenti forme covarianti. A questo proposito, si noti che le forme  $d\varrho$  e  $d\varphi$  che compaiono nell'espressione di  $g^\flat(\nabla dc)$  sono diverse dalle forme  $d\varrho$  e  $d\varphi$  (denotate con lo stesso simbolo, per abuso di linguaggio) che compaiono nell'espressione di  $g^{\sharp\flat}(\nabla^\dagger dc)$ ; infatti, le seconde sono le restrizioni delle prime ai vettori tangenti al paraboloide.

Per ulteriore illustrazione e controllo, analizziamo in dettaglio alcuni casi particolari.

Se

$$e^\varrho = \varrho_0,$$

allora otteniamo

$$dc = Dc^\varphi (\partial\varphi \circ c)$$

$$\nabla^\dagger dc = - \frac{c^\varrho}{1+4a^2(c^\varrho)^2} (Dc^\varphi)^2 (\partial\varrho \circ c) + D^2c^\varphi (\partial\varphi \circ c)$$

$$N^\alpha \circ dc = (c^\varrho)^2 (Dc^\varphi)^2 \left[ - \frac{4a^2 c^\varrho}{1+4a^2(c^\varrho)^2} (\partial\varrho \circ c) + 2a (\partial f \circ c) \right].$$

Se

$$c^\varphi = \varphi_0,$$

allora otteniamo

$$dc = D(c^\varrho) (\partial\varrho \circ c)$$

$$\nabla^\dagger dc = \left( D^2c^\varrho + \frac{4a^2 c^\varrho}{1+4a^2(c^\varrho)^2} (Dc^\varrho)^2 \right) (\partial\varrho \circ c)$$

$$N^\alpha \circ dc = (Dc^\varrho)^2 \left[ - \frac{4a^2 c^\varrho}{1+4a^2(c^\varrho)^2} (\partial\varrho \circ c) + 2a (\partial f \circ c) \right].$$

### 3. Dinamica

Tenendo conto della forza  $F$ , scegliamo il sistema di coordinate sferico in modo che risulti

$$e_{\bar{3}} = e,$$

ossia

$$Z : \mathbf{P} \rightarrow \mathbb{R} : p \mapsto (p - o) \cdot e.$$

Si noti che, applicando le matrici jacobiane dei cambiamenti di sistemi di coordinate (da cartesiano-parabolico a cartesiano e da cilindrico-parabolico a cartesiano), otteniamo

$$\partial Z = \partial f.$$

L'espressione della forza risulta allora, nel sistema di coordinate cartesiano e nei sistemi di coordinate cartesiano-parabolico e cilindrico parabolico,

$$\bar{F} = -m \gamma \partial Z = -m \gamma \partial f.$$

La forma covariante di  $F$  è, nel sistema di coordinate cartesiano e nei sistemi di coordinate cartesiano-parabolico e cilindrico parabolico,

$$\begin{aligned} F &\equiv g^b(\bar{F}) = -m \gamma dZ = \\ &= -m \gamma (df + 2a(X dX + Y dY)) = -m \gamma (df + 2a\rho d\rho). \end{aligned}$$

Restringendo  $F$  al vincolo, si ottiene la forza indotta sul vincolo, in coordinate cartesiane-paraboliche e cilindriche-paraboliche,

$$\begin{aligned} F^\dagger &= -2m \gamma a (X dX + Y dY) = \\ &= -2m \gamma a \rho d\rho, \end{aligned}$$

da cui, applicando  $g^{\dagger\#}$ , otteniamo la componente parallela della forza, in coordinate cartesiane-paraboliche e cilindriche-paraboliche,

$$\begin{aligned} \bar{F}^\parallel &= -2m \gamma a \frac{1}{1+4a^2(X^2+Y^2)} (X \partial X + Y \partial Y) = \\ &= -2m \gamma a \frac{1}{1+4a^2\rho^2} \rho \partial \rho. \end{aligned}$$

Per differenza, otteniamo la componente ortogonale della forza, in coordinate cartesiane-paraboliche e cilindriche-paraboliche,

$$\begin{aligned} \bar{F}^\perp &= -m \gamma \left( \partial f - 2a \frac{1}{1+4a^2(X^2+Y^2)} \right) (X \partial X + Y \partial Y) \\ &= -m \gamma \left( \partial f - 2a \frac{1}{1+4a^2\rho^2} \rho \right) \partial \rho. \end{aligned}$$

La forza  $F$  è conservativa ed il suo potenziale completo

$$U : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$$

è, nel sistema di coordinate cartesiano e nei sistemi di coordinate cartesiano-parabolico e cilindrico parabolico,

$$\begin{aligned} U &= -m \gamma Z = \\ &= -m \gamma (f + a (X^2 + Y^2)) = -m \gamma (f + a \varrho^2). \end{aligned}$$

Il potenziale ristretto al vincolo è, in coordinate cartesiane-paraboliche e cilindriche-paraboliche,

$$\begin{aligned} U^\dagger &= -m \gamma a (X^2 + Y^2) = \\ &= -m \gamma a \varrho^2. \end{aligned}$$

Si verifica immediatamente che

$$F^\dagger = dU^\dagger;$$

anzi, questa formula fornisce il metodo più rapido per il calcolo di  $F^\dagger$ .

Il fatto che il vincolo è liscio è espresso convenientemente da

$$R^\dagger = 0,$$

ossia, in coordinate cartesiane-paraboliche e cilindriche-paraboliche, equivalentemente da

$$R_X dX + R_Y dY = 0 \quad R_\varrho d\varrho + R_\varphi d\varphi = 0.$$

La lagrangiana vincolata è la funzione, in coordinate cartesiane-paraboliche e cilindriche-paraboliche,

$$\begin{aligned} L^\dagger &\equiv T^\dagger + U^\dagger = \\ &= \frac{1}{2} m \left( (1 + 4 a^2 X^2) \dot{X}^2 + (1 + 4 a^2 Y^2) \dot{Y}^2 + 8 a^2 X Y \dot{X} \dot{Y} \right) - m \gamma a (X^2 + Y^2) = \\ &= \frac{1}{2} m \left( (1 + 4 a^2 \varrho^2) \dot{\varrho}^2 + \varrho^2 \dot{\varphi}^2 \right) - m \gamma a \varrho^2. \end{aligned}$$

L'equazione di moto è data dall'equazione di Lagrange vincolata, in coordinate cartesiane-paraboliche,

$$\left( D \left( \frac{\partial L^\dagger}{\partial \dot{X}} \circ dc \right) - \frac{\partial L^\dagger}{\partial X} \circ dc \right) (dX \circ c) + \left( D \left( \frac{\partial L^\dagger}{\partial \dot{Y}} \circ dc \right) - \frac{\partial L^\dagger}{\partial Y} \circ dc \right) (dY \circ c) = 0,$$

ossia dal sistema di due equazioni

$$(1 + 4 a^2 (c^X)^2) D^2 c^X + 4 a^2 c^X c^Y D^2 c^Y + 4 a^2 c^X ((Dc^X)^2 + (Dc^Y)^2) = - 2 \gamma a c^X$$

$$(1 + 4 a^2 (c^Y)^2) D^2 c^Y + 4 a^2 c^X c^Y D^2 c^X + 4 a^2 c^Y ((Dc^X)^2 + (Dc^Y)^2) = - 2 \gamma a c^Y$$

e, in coordinate cilindriche-paraboliche,

$$\left( D \left( \frac{\partial L^\dagger}{\partial \dot{\varrho}} \circ dc \right) - \frac{\partial L^\dagger}{\partial \varrho} \circ dc \right) (d\varrho \circ c) + \left( D \left( \frac{\partial L^\dagger}{\partial \dot{\varphi}} \circ dc \right) - \frac{\partial L^\dagger}{\partial \varphi} \circ dc \right) (d\varphi \circ c) = 0,$$

ossia dal sistema di due equazioni

$$(1 + 4 a^2 (c^\varrho)^2) D^2 c^\varrho + 4 a^2 c^\varrho (Dc^\varrho)^2 - c^\varrho (Dc^\varphi)^2 = - 2 \gamma a c^\varrho$$

$$(c^\varrho)^2 D^2 c^\varphi + 2 c^\varrho Dc^\varrho Dc^\varphi = 0.$$

Non è facile trovare tutte le soluzioni di questo di sistema. Però, possiamo almeno discutere alcune conseguenze.

Per esempio, in coordinate cilindriche-paraboliche, le soluzioni corrispondenti ai dati iniziali (parziali)

$$c^\varphi(t_0) = \varphi_0 \quad Dc^\varphi(t_0) = 0$$

sono le soluzioni del sistema ridotto

$$(1 + 4 a^2 (c^\varrho)^2) D^2 c^\varrho + 4 a^2 c^\varrho (Dc^\varrho)^2 = - 2 \gamma a c^\varrho$$

$$c^\varphi = \varphi_0.$$

Per esempio, in coordinate cilindriche-paraboliche, le soluzioni tali che

$$c^\varrho = \varrho_0 \neq 0$$

sono le soluzioni del sistema ridotto

$$(Dc^\varphi)^2 = 2 \gamma a$$

$$D^2 c^\varphi = 0,$$

ossia sono i moti  $c$  del tipo

$$c^\varrho = \varrho_0 \quad c^\varphi(t) = \omega (t - t_0) + \varphi_0$$

con

$$\omega = \sqrt{2\gamma a},$$

Inoltre, abbiamo la soluzione statica data da

$$c^\varrho = 0.$$

Possiamo ritrovare la soluzione statica anche per altra via. Infatti, le configurazioni d'equilibrio sono i punti di  $q \in \mathcal{Q}$  che soddisfano l'equazione

$$0 = dU^\dagger \equiv -2m\gamma a \varrho d\varrho,$$

ossia il punto  $q \in \mathcal{Q}$  dato da

$$\varrho(q_1) = 0.$$

Si vede facilmente che  $q$  è una configurazione di equilibrio stabile perché il potenziale ha un massimo relativo in  $q$ .

Infine, tenendo conto delle espressioni di  $\bar{F}^\perp$  e di  $N^\alpha$ , si ottiene la reazione vincolare.

Dunque, in coordinate cartesiane-paraboliche, abbiamo

$$\begin{aligned} \bar{R} &= m [-2a(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2) + \gamma] \partial f \\ &- 2ma \frac{1}{1+4a^2(X^2+Y^2)} [2a(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2) + \gamma] (X \partial X + Y \partial Y) \end{aligned}$$

e, in coordinate cilindriche-paraboliche,

$$\bar{R} = m (2a(\dot{\varrho}^2 + \varrho^2 \dot{\varphi}^2) + \gamma) \partial f - 2ma \frac{1}{1+4a^2\varrho^2} (2a\dot{\varrho}^2 + \gamma) \varrho \partial \varrho.$$