CORSO DI MECCANICA RAZIONALE

Meccanica di una Particella Libera

CAPITOLO DELLE DISPENSE PER IL CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA PER L'AMBIENTE ED IL TERRITORIO

Marco Modugno

5 maggio 2002

Università di Firenze
Facoltà di Ingegneria
Dipartimento di Matematica Applicata
Via S. Marta 3, 50139 Firenze

Prefazione

Questo capitolo delle dispense è rivolto agli studenti del previgente ordinamento. Esso è anche un utile riferimento ad alcune nozioni per gli studdenti del nuovo ordinamento.

Introduzione

In questo capitolo studiamo la cinematica e la dinamica di una particella libera, relativamente ad un osservatore inerziale.

Anche per questo argomento adottiamo un criterio modellistico. Cioè, introduciamo degli oggetti matematici, e proseguiamo con un metodo formale deduttivo. Noi presumiamo che gli oggetti del modello siano atti a rappresentare fenomeni fisici e, quindi, che la teoria sia in grado di fare previsioni sul mondo reale, limitatamente ad un certo ambito.

Così, la "particella" di cui parliamo non ha nulla di corposo. In definitiva, dal punto di vista cinematico, ci limitiamo a trattare un moto inteso come un'applicazione c che ad ogni istante t associa una posizione $c(t)$, con ragionevoli proprietà di regolarità. In altre parole, la particella può essere intesa fisicamente come un corpo di dimensioni trascurabili, in modo che la sua posizione ad ogni istante sia ben individuabile. Però, i risultati di questo capitolo possono avere anche una validità più ampia. Per esempio, consideriamo un sistema rigido esteso e supponiamo che le forze agenti su di esso dipendano solo (dal tempo e) dalla posizione e velocità del suo centro di massa; allora, se ci riferiamo al moto del centro di massa - tralasciando di considerare il moto del sistema attorno ad esso - possiamo considerare, a tutti gli effetti dinamici (vedi), il sistema rigido come una particella, la cui posizione coincide con quella del centro di massa (che, eventualmente, potrebbe non appartenere al sistema rigido stesso!).

Nel contesto di questo capitolo, in cui abbiamo a che fare con una sola particella e con un solo osservatore, non avrebbe alcun senso introdurre nel modello, per quanto riguarda la "forza", concetti tendenti a descrivere realmente fenomeni di interazione, a distinguere tra forze reali o apparenti ed a discutere questioni operative connesse con le unità di misura. Dunque ci limiteremo ad assegnare a priori la forza agente sulla particella, introducendola come una data applicazione F che ad ogni istante t, posizione p e velocità v associa un vettore $F(t,p,v)$.

Analogamente, nel contesto di questo capitolo, in cui abbiamo a che fare con una sola particella, non avrebbe alcun senso introdurre nel modello, per quanto riguarda la "massa", concetti tendenti a descrivere realmente il suo significato fisico. Anzi, a dire il vero, finché si ha a che fare con una sola particella, non avrebbe un'utilità reale introdurre il concetto stesso di massa. Infatti, se ridefiniamo la forza agente su unica particella, riscalandola per mezzo della massa, otteniamo un modello matematico perfettamente equivalente al precedente; d'altra parte, vedremo che la massa gioca un ruolo importante quando siamo in presenza di più particelle interagenti tra loro. Tuttavia, noi introduciamo la massa anche nel contesto della dinamica di una sola particella, per ragioni di uniformità di linguaggio con la tradizione e per ragioni didattiche, in previsione degli sviluppi della teoria al caso di più particelle. In conclusione, anche la massa della particella viene qui introdotta come un numero reale positivo m, dato a priori.

Abbiamo detto che ci riferiamo ad un "osservatore inerziale". A dire il vero, questa scelta è fatta tanto per fissare le idee. Infatti, nel contesto di questo capitolo, per quanto riguarda la cinematica, ci serve solo che lo spazio delle posizioni $\boldsymbol{P}$ del nostro osservatore sia uno spazio affine dotato di una metrica euclidea g definita sullo spazio $\bar{\boldsymbol{P}}$ dei vettori liberi, la quale sia indipendente dal tempo. Queste condizioni si verificano fisicamente per ogni osservatore che si muova di moto rigido rispetto ad un osservatore inerziale. Inoltre, dato che in questo capitolo non studiamo l'interazione e non siamo in grado di distinguere tra forze reali e forze apparenti, per quanto riguarda la dinamica, non abbiamo nessun bisogno reale che l'osservatore sia inerziale.

La specificazione di particella "libera" è qui un po' ridondante e sta solo ad indicare che non poniamo nessun vincolo a priori sul moto.

La meccanica della particella libera ha una sua notevole importanza che va al di là del suo interesse specifico. Infatti, questa teoria servirà da modello per le teorie successive della particella vincolata, di più particelle libere e di più particelle vincolate e dei sistemi rigidi. Anzi, qui trattiamo la meccanica della particella libera in un modo che si presterà ad essere generalizzato ai casi predetti, quasi automaticamente, con piccole modifiche! Ci sembra che questa procedura porti ad una notevole economia di pensiero.

Tutti i concetti trattati in questo capitolo sono introdotti in modo intrinseco (indipendente da ogni scelta di un sistema di coordinate), ma adatto ad una interpretazione fisica diretta. Successivamente è fornita la loro rappresentazione in un qualunque sistema di coordinate anche curvilineo. In particolare, sono date esplicitamente le rappresentazioni in un sistema di coordinate cartesiano, cilindrico e sferico. I sistemi di coordinate curvilinei sono utilizzati per almeno due motivi. Infatti, alcuni problemi meccanici godono di proprietà di simmetria, che suggeriscono (o, addirittura, richiedono) l'uso di sistemi di coordinate curvilinei. Inoltre, la meccanica di una particella vincolata (con vincoli non affini) richiede necessariamente l'uso di sistemi di coordinate curvilinei; pertanto, la preannunciata generalizzazione del contenuto di questo capitolo a quello della meccanica vincolata sarà possibile se, già da ora, usiamo sistemi generali di coordinate.

Dunque, riassumiamo i contenuti principali di questo capitolo.

Innanzitutto, introduciamo un modello del tempo assoluto.

Definiamo poi il moto di una particella e ne studiamo la velocità, l'accelerazione e la traiettoria. L'accelerazione è studiata sia in forma controvariante che covariante, utilizzando, rispettivamente, i simboli di Christoffel e le formule di Lagrange (questo approccio è utile, ma non tradizionale). In particolare, analiziamo, a titolo di esempio, i moti armonici e circolari ed elicoidali uniformi.

Introduciamo il concetto di forza e ne studiamo la potenza ed il lavoro rispetto ad un moto dato. In particolare, sono studiate in dettaglio le forze conservative, fornendo i criteri di conservatività ed i metodi per la ricerca del potenziale. In particolare, analiziamo, a titolo di esempio, le forze di tipo peso, elastico, di Newton e Coulomb, di Lorentz e di Biot-Savart.

La massa è utilizzata, in connessione con la metrica, per definire l'energia cinetica, la quantità di moto ed il momento della quantità di moto.

Le legge di moto di Newton è introdotta in modo intrinseco e rappresentata in un qualunque sistema di coordinate anche curvilineo, sia in forma controvariante, che covariante, utilizzando, rispettivamente, i simboli di Christoffel e le formule di Lagrange. Inoltre è fornita anche una formulazione variazionale della legge di moto. La rappresentazione covariante in coordinate è ottenuta in due modi indipendenti: come conseguenza della rappresentazione covariante dell'accelerazione e come espressione differenziale del principio variazionale.

Sono discusse le principali proprietà matematiche dell'equazione di Newton ed il loro significato meccanico. In questo contesto sono studiati il problema fondamentale della dinamica e quello della statica.

Particolare attenzione viene dedicata alle leggi di conservazione.

Infine, sono studiati analiticamente i moti soggetti ad una forza costante, ad una forza elastica, elastica con smorzamento, elastica con smorzamento e termine forzante (evidenziando il fenomeno della risonanza), ad una forza di Newton o Coulomb e ad una forza di Lorentz relativa ad un campo magnetico costante.

1. Cinematica

La cinematica studia il moto da un punto di vista puramente descrittivo, indipendente da relazioni tra causa ed effetto. Gli spazi fondamentali della cinematica sono costituiti dallo spazio delle posizioni e dal tempo.

Nell'analisi differenziale del moto noi procederemo fino al second'ordine, perché questo sarà richiesto dalla legge di moto che tratteremo in dinamica.

1. Il tempo

Incominciamo con l'introduzione di un semplice modello matematico del tempo.

DEFINIZIONE. Il *tempo* è uno spazio $\boldsymbol{T}$ affine di dimensione 1, orientato. ♣

Indichiamo con $\bar{\boldsymbol{T}}$ lo spazio vettoriale dei vettori liberi di $\boldsymbol{T}$.

Indichiamo anche con

$$\bar{\boldsymbol{T}}^{+} \subset \bar{\boldsymbol{T}}$$

il sottospazio costituito dai vettori liberi non nulli ed orientati positivamente.

Gli elementi di $\boldsymbol{T}$ sono detti *istanti* ed i vettori di $\bar{\boldsymbol{T}}$ sono detti *intervalli di tempo*. Se $t_1, t_2 \in \boldsymbol{T}$ e l'intervallo di tempo $t_2 - t_1 \in \bar{\boldsymbol{T}}$ è orientato positivamente, allora si dice che esso è orientato verso il *futuro*, o che l'istante t_2 è *posteriore* all'istante t_1 e che l'istante t_1 è *anteriore* all'istante t_2.

Un'*unità di misura* dei tempi è un vettore libero

$$e_0 \in \bar{\boldsymbol{T}}^{+}.$$

Date le ipotesi fatte su $\boldsymbol{T}$, nessuna particolare unità di misura dei tempi gode di proprietà privilegiate. Tuttavia, conviene scegliere un'unità di misura dei tempi, per identificare gli intervalli di tempo con numeri reali.

Supponiamo, dunque, che $e_0 \in \bar{\boldsymbol{T}}^{+}$ sia un'unità di misura.

Essa induce l'isomorfismo lineare

$$\bar{\boldsymbol{T}} \to \mathbb{R} : u \mapsto u/e_0,$$

dove u/e_0 è la componente del vettore u rispetto alla base (e_0), ossia è l'unico numero reale tale che

$$u = (u/e_0)\, e_0.$$

Quindi, scelta un'unità di misura dei tempi, possiamo identificare $\bar{\boldsymbol{T}}$ con l'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$. Però, cambiando unità di misura, otteniamo un'altra identificazione, ottenuta dalla prima con un cambiamento di scala data dal rapporto positivo tra le due unità di misura.

Un'*origine* dei tempi è un istante

$$\tau \in \boldsymbol{T}.$$

Date le ipotesi fatte su $\boldsymbol{T}$, nessuna particolare origine dei tempi gode di proprietà privilegiate. Tuttavia, conviene scegliere un'origine dei tempi, per identificare gli istanti con numeri reali.

Se $\tau \in \bar{\boldsymbol{T}}$ è un'origine ed $e_0 \in \bar{\boldsymbol{T}}^+$ un'unità di misura, allora otteniamo un sistema di coordinate cartesiano costituito dalla funzione

$$x^0 : \boldsymbol{T} \to \mathbb{R} : t \mapsto (t-\tau)/e_0,$$

che induce un isomorfismo affine tra i due spazi.

Osserviamo che, dal punto di vista algebrico astratto, le strutture affini del tempo $\boldsymbol{T}$ e dello spazio delle posizioni $\boldsymbol{P}$ sono del tutto analoghe, in quanto sono rette dagli stessi identici assiomi, i quali sono sufficienti a formulare matematicamente le operazioni di cui abbiamo bisogno. Le uniche differenze tra i due casi consistono nella dimensione dei due spazi, nel fatto che il primo ha un'orientazione fissata e che il secondo ha una metrica euclidea fissata (a meno di un fattore di scala). D'altra parte è interessante notare come lo stesso modello matematico sia capace di rappresentare fenomeni legati a strumenti di misura operativamente molto diversi, ma con relazioni "sintattiche" analoghe. Per esempio, la traslazione nello spazio delle posizioni è realizzata fisicamente mediante riga e compasso, mentre l'analoga traslazione nel tempo è realizzata operativamente mediante orologi! In definitiva, la nostra ipotesi che $\boldsymbol{T}$ abbia una struttura affine non è altro che la traduzione in linguaggio matematico del fatto che esistano gli orologi!

In dinamica avremo a che fare con il seguente spazio generato dagli spazi delle posizioni e dal tempo. Esso costituirà il dominio in cui sono definite le forze ed in cui hanno valore i dati iniziali relativi alla legge di moto.

Lo *spazio delle fasi* [1] è lo spazio affine

$$J\boldsymbol{P} \equiv \boldsymbol{T} \times \boldsymbol{P} \times \bar{\boldsymbol{P}}.$$

Scelto un sistema di coordinate cartesiano (x^0) su $\boldsymbol{T}$ ed un sistema di coordinate (x^1, x^2, x^3) su $\boldsymbol{P}$, otteniamo il sistema di coordinate sullo spazio delle fasi

$$(x^0;\, x^1, x^2, x^3;\, \dot{x}^1, \dot{x}^2, \dot{x}^3).$$

2. Il moto di una particella

Possiamo ora studiare il moto di una particella libera, osservato da un osservatore fissato, il cui spazio delle posizioni $\boldsymbol{P}$ è uno spazio affine euclideo di dimensione 3, il cui spazio dei vettori liberi è denotato con $\bar{\boldsymbol{P}}$ e la cui metrica è denotata con $g(u,v) \equiv u \cdot v$.

Indicheremo con

$$(x^i) \equiv (x^1,\, x^2,\, x^3) : \boldsymbol{P} \to \mathbb{R}^3$$

un sistema di coordinate di $\boldsymbol{P}$.

1. Il moto

Incominciamo con la definizione di moto.

DEFINIZIONE. Il *moto* di una particella libera è un'applicazione di classe C^∞

$$c : \boldsymbol{T} \to \boldsymbol{P}.$$ ♣

Talvolta possiamo aver bisogno di una definizione meno restrittiva di moto. Infatti, talvolta abbiamo bisogno di considerare moti definiti non in tutto

[1] Spesso in Fisica viene chiamato “spazio delle fasi” il duale del nostro.

$\boldsymbol{T}$, ma solo in un certo intervallo $\boldsymbol{I} \subset \boldsymbol{T}$.

Inoltre, nello studio degli urti abbiamo bisogno di considerare moti di classe C^{∞} salvo un numero finito o numerabile di istanti in cui essi sono solo di classe C^0.

Lasciamo al lettore lo sviluppo di questi casi.

PROPOSIZIONE. Il moto $c : \boldsymbol{T} \to \boldsymbol{P}$ è caratterizzato dalla sua espressione in coordinate

$$c^i \equiv x^i \circ c : \boldsymbol{T} \to \mathbb{R} \qquad 1 \leq i \leq 3. \quad \square$$

2. La velocità

Consideriamo un moto $c : \boldsymbol{T} \to \boldsymbol{P}$ e proseguiamo con la sua analisi differenziale al prim'ordine.

DEFINIZIONE. La *velocità* è la derivata prima del moto

$$Dc : \boldsymbol{T} \to L(\bar{\boldsymbol{T}}, \bar{\boldsymbol{P}}). \qquad \clubsuit$$

Dunque, per definizione di derivata di un moto differenziabile, il moto può essere approssimato ad un moto affine, ossia rettilineo uniforme, mediante la formula

$$(*) \qquad c(t+h) = c(t) + Dc(t)(h) + o(t,h) \qquad t \in \boldsymbol{T},\ h \in \bar{\boldsymbol{T}},$$

dove $o(t,h)$ è un infinitesimo di ordine superiore ad h.

OSSERVAZIONE. Se abbiamo scelto un'unità di misura dei tempi

$$e_0 \in \bar{\boldsymbol{T}},$$

allora possiamo identificare Dc con il campo vettoriale

$$v : \boldsymbol{T} \to \bar{\boldsymbol{P}} : t \mapsto Dc(t)(e_0) \in \bar{\boldsymbol{P}}.$$

Se scegliamo un'altra unità di misura dei tempi

$$e_0' \equiv \lambda e_0 \in \bar{\boldsymbol{T}} \qquad \lambda \in \mathbb{R}^+,$$

allora la velocità Dc risulterà essere identificata con un altro campo vettoriale

$$v' = \lambda v : \boldsymbol{T} \to \bar{\boldsymbol{P}} : t \mapsto Dc(t)(e_0') = \lambda\, Dc(t)(e_0) \in \bar{\boldsymbol{P}}.$$

Dunque, se vogliamo riguardare la velocità come un campo vettoriale, la sua direzione ed il verso sono determinati (senza nessuna ipotesi aggiuntiva), mentre il suo modulo dipende in modo essenziale dalla scelta dell'unità di misura dei tempi. ❑

D'ora in poi, salvo avviso contrario, supponiamo di aver scelto un'unità di misura dei tempi e pertanto identifichiamo la velocità con il campo vettoriale corrispondente, scrivendo

$$v \equiv Dc : \boldsymbol{T} \to \bar{\boldsymbol{P}}.$$

Pertanto possiamo riscrivere la formula (∗) come segue

$$(*') \qquad c(t+h) = c(t) + v(t)\, h + o(t,h) \qquad t \in \boldsymbol{T},\ h \in \bar{\boldsymbol{T}}.$$

Talvolta abbiamo bisogno di esplicitare, insieme alla velocità $Dc(t) \in \bar{\boldsymbol{P}}$ del moto all'istante $t \in \boldsymbol{T}$, anche la posizione occupata a tale istante e l'istante stesso. Per tale motivo, introduciamo le seguenti notazioni

$$dc : \boldsymbol{T} \to T\boldsymbol{P} \equiv \boldsymbol{P} \times \bar{\boldsymbol{P}} : t \mapsto \big(c(t),\, Dc(t)\big)$$

$$jc : \boldsymbol{T} \to J\boldsymbol{P} \equiv \boldsymbol{T} \times \boldsymbol{P} \times \bar{\boldsymbol{P}} : t \mapsto \big(t,\, c(t),\, Dc(t)\big).$$

PROPOSIZIONE. La velocità Dc è caratterizzata dalla sua espressione in coordinate

$$Dc = Dc^i\, (\delta x_i \circ c),$$

dove (δx_i) è la base costituita dai campi vettoriali tangenti alle curve coordinate.

DIMOSTRAZIONE. E' un caso particolare della formula generale relativa alla derivata di curve (vedi). Per comodità del lettore, ripetiamo la dimostrazione.

Dato che $(\delta x_i(c(t))$ è una base dello spazio vettoriale $\bar{\boldsymbol{P}}$, la velocità ha un'unica decomposizione del tipo

$$Dc = v^i\, (\delta x_i \circ c),$$

dove le componenti possono essere ottenute applicando la base duale

$$v^i = \langle Dx^i \circ c,\ Dc \rangle.$$

Pertanto, per la regola della catena, otteniamo

$$v^i = \langle Dx^i \circ c,\ Dc \rangle = D(x^i \circ c) \equiv Dc^i. \qquad \square$$

Con notazioni tradizionali possiamo anche scrivere

$$\frac{dc}{dt} = \frac{dc^i}{dt} u_i$$

$$\dot{c} = \dot{c}^i u_i.$$

Dunque, le componenti della derivata del moto (secondo la base indotta dal sistema di coordinate considerato) sono uguali alle derivate delle componenti del moto (secondo il sistema di coordinate considerato).

In particolare, abbiamo i seguenti casi notevoli.

Corollario. 1) L'espressione della velocità in un sistema di coordinate cartesiano è

$$Dc = Dc^x\, e_1 + Dc^Y\, e_2 + Dc^Z\, e_3.$$

2) L'espressione della velocità in un sistema di coordinate cilindrico è

$$Dc = Dc^\varrho\, (e_\varrho \circ c) + c^\varrho\, Dc^\varphi\, (e_\varphi \circ c) + Dc^Z\, (e_Z \circ c),$$

dove abbiamo sostituito la base naturale con quella dei corrispondenti versori

$$e_\varrho \equiv \delta\varrho \qquad e_\varphi \equiv \delta\varphi / \|\delta\varphi\| = \delta\varphi/\varrho \qquad e_Z \equiv \delta Z.$$

2) L'espressione della velocità in un sistema di coordinate sferico è

$$Dc = Dc^r\, (e_r \circ c) + c^r\, Dc^\vartheta\, (e_\vartheta \circ c) + c^r \operatorname{sen} c^\vartheta\, Dc^\varphi\, (e_\varphi \circ c),$$

dove abbiamo sostituito la base naturale con quella dei corrispondenti versori

$$e_r \equiv \delta r \qquad e_\vartheta \equiv \delta\vartheta / \|\delta\vartheta\| = \delta\vartheta / r \qquad e_\varphi \equiv \delta\varphi / \|\delta\varphi\| = \delta\varphi / (r \operatorname{sen}\vartheta). \qquad \square$$

3. L'accelerazione

Consideriamo un moto $c : \boldsymbol{T} \to \boldsymbol{P}$ e proseguiamo con la sua analisi differenziale al second'ordine, la quale sarà necessaria in seguito per formulare la legge di moto.

Definizione. L'*accelerazione* è la derivata seconda del moto

$$D^2 c : \boldsymbol{T} \to L^2(\bar{\boldsymbol{T}}, \bar{\boldsymbol{P}}).$$ ♣

Dunque, per definizione di derivata seconda di un moto due volte differenziabile, la velocità può essere approssimata ad un'applicazione affine, mediante la formula

$$(*) \qquad Dc(t+h) = Dc(t) + D^2c(t)(h) + o(t,h) \qquad t \in \boldsymbol{T},\ h \in \bar{\boldsymbol{T}},$$

dove $o(t,h)$ è un infinitesimo di ordine superiore ad h.

Osservazione. Se abbiamo scelto un'unità di misura dei tempi

$$e_0 \in \bar{\boldsymbol{T}},$$

allora possiamo identificare D^2c con il campo vettoriale

$$a : \boldsymbol{T} \to \bar{\boldsymbol{P}} : t \mapsto D^2c(t)(e_0, e_0) \in \bar{\boldsymbol{P}}.$$

Se scegliamo un'altra unità di misura dei tempi

$$e_0' \equiv \lambda e_0 \in \bar{\boldsymbol{T}} \qquad \lambda \in \mathbb{R}^+,$$

allora l'accelerazione D^2c risulterà essere identificata con un altro campo vettoriale

$$a' = \lambda^2 a : \boldsymbol{T} \to \bar{\boldsymbol{P}} : t \mapsto D^2c(t)(e_0', e_0') = \lambda^2 D^2c(t)(e_0, e_0) \in \bar{\boldsymbol{P}}.$$

Dunque, se vogliamo riguardare l'accelerazione come un campo vettoriale, la sua direzione ed il verso sono determinati (senza nessuna ipotesi aggiuntiva), mentre il suo modulo dipende in modo essenziale dalla scelta dell'unità di misura dei tempi. ❑

D'ora in poi, salvo avviso contrario, supponiamo di aver scelto un'unità di misura dei tempi e pertanto identifichiamo l'accelerazione con il campo vettoriale corrispondente, scrivendo

$$a \equiv D^2 c : \boldsymbol{T} \to \bar{\boldsymbol{P}}.$$

Pertanto possiamo riscrivere la formula $(*)$ come segue

$$(*') \qquad v(t+h) = v(t) + a(t)\,h + o(t,h) \qquad t \in \boldsymbol{T},\ h \in \bar{\boldsymbol{T}}.$$

PROPOSIZIONE. L'accelerazione $D^2 c$ è caratterizzata dalla sua espressione in coordinate

$$D^2 c = \big(D^2 c^i + (\Gamma^i{}_{hk} \circ c)\, Dc^h\, Dc^k\big)\,(\delta x_i \circ c),$$

dove (δx_i) è la base costituita dai campi vettoriali tangenti alle curve coordinate e dove

$$\Gamma^h{}_{ik} \equiv (D\delta x_i)^h{}_k \equiv (\langle D\delta x_i,\ \delta x_k\rangle)^h = \Big(\frac{\partial \delta x_i}{\partial x^k}\Big)^h = \langle Dx^h,\ \frac{\partial \delta x_i}{\partial x^k}\rangle$$

sono i simboli di Christoffel (che misurano la variazione, al prim'ordine rispetto al punto, della base indotta dal sistema di coordinate).

DIMOSTRAZIONE. E' un caso particolare della formula generale per la derivata seconda di curve (vedi). Per comodità del lettore, ripetiamo la dimostrazione.

Derivando l'espressione della velocità ed applicando la regola di Leibnitz e della catena, otteniamo

$$D\big(Dc^i\,(\delta x_i \circ c)\big) \equiv D^2 c^i\,(\delta x_i \circ c) + Dc^i\,\langle (D\delta x_i)\circ c,\ Dc^j\,(\delta x_j \circ c)\rangle =$$

$$= D^2 c^i\,(\delta x_i \circ c) + Dc^i\, Dc^j\,(\Gamma^h{}_{ij} \circ c)\,(\delta x_h \circ c). \qquad \square$$

Con notazioni tradizionali possiamo anche scrivere

$$\frac{d^2 \mathrm{c}}{dt} = \Big(\frac{d^2 c^i}{dt^2} + \Gamma^i{}_{hk}\,\frac{dc^h}{dt}\,\frac{dc^k}{dt}\Big)\,u_i$$

$$\ddot{c} = (\ddot{c}^i + \Gamma^i{}_{hk}\,\dot{c}^h\,\dot{c}^k)\,u_i.$$

Dunque le componenti della derivata seconda del moto (secondo la base indotta dal sistema di coordinate considerato) sono uguali alle derivate delle componenti del moto (secondo il sistema di coordinate considerato), più dei termini quadratici rispetto alle derivate prime delle componenti del moto (i quali tengono conto della variazione della base da un punto all'altro lungo il moto).

In particolare, abbiamo i seguenti casi notevoli.

COROLLARIO. 1) L'espressione dell'accelerazione in un sistema di coordinate cartesiano è

$$D^2 c = D^2 c^X\, e_1 + D^2 c^Y\, e_2 + D^2 c^Z\, e_3 .$$

2) L'espressione dell'accelerazione in un sistema di coordinate cilindrico è

$$D^2 c = \left(D^2 c^\rho - c^\rho\, (D c^\varphi)^2\right) (e_\rho \circ c) + \left(c^\rho\, D^2 c^\varphi + 2\, D c^\rho\, D c^\varphi\right) (e_\varphi \circ c) + D^2 c^Z\, (e_Z \circ c),$$

dove abbiamo sostituito la base naturale con quella dei corrispondenti versori

$$e_\rho \equiv \delta\rho \qquad e_\varphi \equiv \delta\varphi / \|\delta\varphi\| = \delta\varphi/\rho \qquad e_Z \equiv \delta Z .$$

3) L'espressione dell'accelerazione in un sistema di coordinate sferico è

$$D^2 c = \left(D^2 c^r - c^r\, (D c^\vartheta)^2 - c^r\, \mathrm{sen}^2 c^\vartheta\, (D c^\varphi)^2\right) (e_r \circ c) +$$

$$+ \left(c^r\, D^2 c^\vartheta + 2\, D c^r\, D c^\vartheta - c^r\, \mathrm{sen}\, c^\vartheta\, \cos c^\vartheta\, (D c^\varphi)^2\right) (e_\vartheta \circ c) +$$

$$+ \left(c^r\, \mathrm{sen}\, c^\vartheta\, D^2 c^\varphi + 2\, \mathrm{sen}\, c^\vartheta\, D c^r\, D c^\varphi + 2\, c^r \cos c^\vartheta\, D c^\vartheta\, D c^\varphi\right) (e_\varphi \circ c),$$

dove abbiamo sostituito la base naturale con quella dei corrispondenti versori

$$e_r \equiv \delta r \qquad e_\vartheta \equiv \delta\vartheta / \|\delta\vartheta\| = \delta\vartheta / r \qquad e_\varphi \equiv \delta\varphi / \|\delta\varphi\| = \delta\varphi / (r\, \mathrm{sen}\vartheta).$$ ❑

E' più comodo calcolare l'accelerazione in forma covariante tramite le formule di Lagrange. Infatti, in tal modo si evita di calcolare i simboli di Christoffel.

Consideriamo la *funzione metrica* (vedi)

$$G : \boldsymbol{P} \times \overline{\boldsymbol{P}} \to \mathbb{R} : (p,u) \mapsto \tfrac{1}{2}\, g(u,u)$$

la cui espressione in coordinate è

$$G = \frac{1}{2} g_{ij}\, \dot{x}^i\, \dot{x}^j.$$

PROPOSIZIONE. L'accelerazione è caratterizzata dalla sua espressione covariante

$$\underline{D}^2 c \equiv g^\flat(D^2 c) = \Big(D(\frac{\partial G}{\partial \dot{x}^i} \circ dc) - \frac{\partial G}{\partial x^i} \circ dc\Big)\, (Dx^i \circ c).$$

DIMOSTRAZIONE. E' un caso particolare della formula generale per la derivata seconda di curve (vedi) in forma covariante. Per comodità del lettore, ripetiamo la dimostrazione.

Ricordiamo (vedi) che i simboli di Christoffel possono essere espressi tramite le derivate della metrica come segue

$$\Gamma^i{}_{hk} = \frac{1}{2} g^{ij}\, (\partial_h g_{jk} + \partial_k g_{jh} - \partial_j g_{hk}),$$

dove

$$(g^{ij}) \equiv (g_{hk})^{-1}.$$

Allora, dall'espressione dell'accelerazione (in forma controvariante), otteniamo

$$(\underline{D}^2 c)_i = (g_{ij} \circ c)\, \Big(D^2 c^j + (\Gamma^j{}_{hk} \circ c)\, Dc^h\, Dc^k\Big) =$$

$$= (g_{ij} \circ c)\, D^2 c^j + (g_{ij} \circ c)\, (\Gamma^j{}_{hk} \circ c)\, Dc^h\, Dc^k =$$

$$= (g_{ij} \circ c)\, D^2 c^j + \frac{1}{2} (\partial_h g_{ik} + \partial_k g_{ih} - \partial_i g_{hk}) \circ c\; Dc^h\, Dc^k =$$

$$= (g_{ij} \circ c)\, D^2 c^j + (\partial_h g_{ik}) \circ c\; Dc^h\, Dc^k - \frac{1}{2} (\partial_i g_{hk}) \circ c\; Dc^h\, Dc^k =$$

$$= D\Big((g_{ij} \circ c)\, Dc^j\Big) - \frac{1}{2} (\partial_i g_{hk} \circ c)\, Dc^h\, Dc^k,$$

dove abbiamo tenuto conto delle uguaglianze

$$(\partial_h g_{ik}) \circ c\; Dc^h\, Dc^k = (\partial_k g_{ih}) \circ c\; Dc^h\, Dc^k,$$

$$D(g_{ij} \circ c) = (\partial_h g_{ij}) \circ c \; Dc^h. \qquad \square$$

Con notazioni tradizionali possiamo anche scrivere

$$(\underline{D}^2 c)_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial G}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial G}{\partial x^i}.$$

In particolare, abbiamo i seguenti casi notevoli.

COROLLARIO. 1) L'espressione dell'accelerazione in un sistema di coordinate cartesiano è

$$\underline{D}^2 c = D^2 c^X \, DX + D^2 c^Y \, DY + D^2 c^Z \, DZ.$$

2) L'espressione dell'accelerazione in un sistema di coordinate cilindrico è

$$\underline{D}^2 c = \left(D^2 c^\rho - c^\rho \, (Dc^\varphi)^2\right) (D\rho \circ c) +$$

$$+ \left((c^\rho)^2 \, D^2 c^\varphi + 2 \, c^\rho \, Dc^\rho \, Dc^\varphi\right) (D\varphi \circ c) +$$

$$+ D^2 c^Z \, (DZ \circ c).$$

2) L'espressione dell'accelerazione in un sistema di coordinate sferico è

$$\underline{D}^2 c = \left(D^2 c^r - c^r \, (Dc^\vartheta)^2 - c^r \, \mathrm{sen}^2 c^\vartheta \, (Dc^\varphi)^2\right) (Dr \circ c) +$$

$$+ \left((c^r)^2 \, D^2 c^\vartheta + 2 \, c^r \, Dc^r \, Dc^\vartheta - (c^r)^2 \, \mathrm{sen}\, c^\vartheta \cos c^\vartheta \, (Dc^\varphi)^2\right) (D\vartheta \circ c) +$$

$$+ \left((c^r)^2 \, (\mathrm{sen}\, c^\vartheta)^2 \, D^2 c^\varphi +\right.$$

$$\left. + 2 \, c^r \, (\mathrm{sen}\, c^\vartheta)^2 \, Dc^r \, Dc^\varphi + 2 \, (c^r)^2 \, \mathrm{sen}\, c^\vartheta \cos c^\vartheta \, Dc^\vartheta \, Dc^\varphi\right) (D\varphi \circ c). \qquad \square$$

4. La traiettoria

Consideriamo un moto $c : \boldsymbol{T} \to \boldsymbol{P}$ e studiamone l'aspetto geometrico.

DEFINIZIONE. La *traiettoria* è l'immagine del moto, ossia l'insieme delle posizioni occupate

$$\boldsymbol{S} \equiv c(\boldsymbol{T}) \equiv \{c(t) \in \boldsymbol{P}\}_{t \in \boldsymbol{T}} \subset \boldsymbol{P}. \qquad \clubsuit$$

Ovviamente, la conoscenza della traiettoria non caratterizza il moto; infatti esistono infiniti moti con una data traiettoria.

OSSERVAZIONE. La traiettoria è un sottinsieme connesso di $\boldsymbol{P}$, perché $\boldsymbol{T}$ è connesso ed il moto è continuo. ❑

OSSERVAZIONE. Se per $t \in \boldsymbol{T}$ è $Dc(t) \neq 0$, allora esiste un intorno $\boldsymbol{I} \subset \boldsymbol{T}$ di t tale che la restrizione della traiettoria a tale intorno

$$c(\boldsymbol{I}) \subset \boldsymbol{S} \subset \boldsymbol{P}$$

sia una sottovarietà di dimensione 1 (vedi).

Se in ogni istante t di un certo intervallo $\boldsymbol{I} \subset \boldsymbol{T}$ è $Dc(t) = 0$, allora la restrizione della traiettoria a tale intervallo

$$c(\boldsymbol{I}) = \{p\} \subset \boldsymbol{S} \subset \boldsymbol{P}$$

è costituita da un solo punto.

Se per $\tau \in \boldsymbol{T}$ esiste un intorno $\boldsymbol{I} \subset \boldsymbol{T}$ di tale che in ogni istante t di tale intorno è $Dc(t) \neq 0$ salvo in τ stesso in cui $Dc(\tau) = 0$, allora la restrizione della traiettoria ad un sotto intorno sufficientemente piccolo $\boldsymbol{I}' \subset \boldsymbol{I}$

$$c(\boldsymbol{I}') \subset \boldsymbol{S} \subset \boldsymbol{P}$$

è costituita da due sottovarietà. Esse possono raccordarsi in $c(\tau) \in \boldsymbol{P}$ in modo da formare insieme una sottovarietà, oppure no.

Pertanto, la traiettoria è l'unione di sottovarietà unidimensionali di $\boldsymbol{P}$. ❑

Limitiamoci ora a considerare un intervallo di tempo $\boldsymbol{I} \subset \boldsymbol{T}$ nel quale la traiettoria

$$\boldsymbol{S} \equiv c(\boldsymbol{I}) \subset \boldsymbol{P}$$

sia una sottovarietà connessa di $\boldsymbol{P}$. Si può dimostrare che tale sottovarietà è diffeomorfa ad $\mathbb{R}$ o ad una circonferenza.

OSSERVAZIONE. Consideriamo un sistema di coordinate locale di $\boldsymbol{P}$ adattato alla sottovarietà $\boldsymbol{S}$ (vedi)

$$x \equiv (x^1; x^2, x^3) : \boldsymbol{P} \to \mathbb{R}^3,$$

dove x^1 è la funzione libera e (x^2, x^3) sono le funzioni vincolari.

Rinormalizzando opportunamente la funzione coordinata x^1 otteniamo un nuovo sistema di coordinate adattato

$$x' \equiv (x'^1;\ x^2,\ x^3) : \boldsymbol{P} \to \mathbb{R}^3,$$

tale che

$$\|\delta x'_1\| = 1.$$

Consideriamo ora i seguenti oggetti indotti su $\boldsymbol{S}$, per restrizione:
- la funzione lagrangiana

$$s \equiv x'^1|\boldsymbol{S} : \boldsymbol{S} \to \mathbb{R},$$

- la corrispondente curva coordinata

$$\sigma \equiv x'_1|\mathbb{R}\times\boldsymbol{S} : \mathbb{R}\times\boldsymbol{S} \to \boldsymbol{S},$$

caratterizzata da

$$(s\circ\sigma)(\lambda) \equiv s(p) + \lambda \qquad p \in \boldsymbol{S},$$

- il campo vettoriale tangente

$$e \equiv \delta\sigma = \delta x'_1|\boldsymbol{S} : \boldsymbol{S} \to \bar{\boldsymbol{P}}.$$

il campo vettoriale tangente a σ.
Ovviamente, abbiamo

$$\|e\| = 1.$$

Inoltre, si vede facilmente che la funzione lagrangiana s è definita a meno di una costante additiva e del segno, ma non dipende dal sistema di coordinate adattato inizialmente scelto. Dunque, data $\boldsymbol{S}$, la funzione lagrangiana s è definita a meno di una costante additiva e del segno; corrispondentemente, la curva coordinata σ è definita a meno di una traslazione e del verso ed il campo vettoriale tangente e è definito a meno del segno.
La funzione coordinata lagrangiana s è detta *la lunghezza dell'arco* perché integrando $\|\sigma\|$ lungo $\boldsymbol{S}$ otteniamo la lunghezza dell'arco. ❑

OSSERVAZIONE. Consideriamo la derivata (parziale) del versore tangente e rispetto alla curva coordinata σ, ossia il campo vettoriale su $\boldsymbol{S}$

$$k \equiv \frac{\partial e}{\partial s} : \boldsymbol{S} \to \bar{\boldsymbol{P}}$$

definito da

$$\frac{\partial e}{\partial s}(p) \equiv D(e \circ \sigma_p)(0) \qquad\qquad p \in \boldsymbol{S}.$$

Il campo vettoriale k è chiamato il *vettore di curvatura* della traiettoria. Inoltre, la sua norma $\|k\|$ è chiamata la curvatura della traiettoria. Inoltre, se $\|k\| \neq 0$, il suo inverso

$$r \equiv \frac{1}{\|k\|} : \boldsymbol{S} \to \mathbb{R}$$

è chiamato il *raggio di curvatura* della traiettoria ed il versore

$$n \equiv \frac{k}{\|k\|} : \boldsymbol{S} \to \bar{\boldsymbol{P}}$$

è chiamato *la normale principale* della traiettoria.

Il nome "curvatura" è giustificato dal fatto che la derivata del versore tangente rispetto alla lunghezza dell'arco misura il grado di variazione della direzione tangente alla traiettoria lungo la traiettoria stessa. I nomi "raggio di curvatura" e "normale principale" sono giustificati dai seguenti risultati.

LEMMA. Il vettore di curvatura è ortogonale alla traiettoria, ossia

$$k \cdot e = 0.$$

DIMOSTRAZIONE. Da

$$1 = e \cdot e$$

segue

$$0 = \frac{\partial(e \cdot e)}{\partial s} = 2\, k \cdot e. \qquad \square$$

OSSERVAZIONE. Sia $p \in \boldsymbol{S}$ un punto della traiettoria e sia $k(p) \neq 0$. Allora p, $e(p)$ e $n(p)$ determinano un piano π. Per costruzione, tale piano contiene la traiettoria in un intorno di p con un'approssimazione del second'ordine rispetto alla lunghezza dell'arco.

Tale piano è chiamato il *piano osculatore* alla traiettoria in p. □

Il nome "raggio di curvatura" è giustificato dal risultato seguente.

OSSERVAZIONE. Sia $p \in \boldsymbol{S}$ un punto della traiettoria e sia $k(p) \neq 0$. Allora esiste una sola circonferenza passante per il punto p, il cui versore tangente e vettore di curvatura in p sono $e(p)$ e $k(p)$, rispettivamente. Inoltre, il raggio di tale circonferenza risulta essere $r(p) \equiv 1/\|k(p)\|$.

DIMOSTRAZIONE. Si consideri il piano osculatore π ed una circonferenza c' su tale piano, di centro $o \in \pi$ e raggio r'. Si consideri un sistema di coordinate cartesiane di centro o. Allora, l'espressione parametrica, secondo la lunghezza dell'arco, della circonferenza è

$$c'(\lambda) = o + \left(r' \cos(\lambda/r')\, e_X + r' \operatorname{sen}(\lambda/r')\, e_Y\right)$$

(questa espressione è determinata a meno di una costante additiva e del segno del parametro).

Pertanto, otteniamo

$$e'(\lambda) = -\operatorname{sen}(\lambda/r')\, e_X + \cos(\lambda/r')\, e_Y$$

$$k'(\lambda) = -(1/r')\left(\cos(\lambda/r')\, e_X + \operatorname{sen}(\lambda/r')\, e_Y\right).$$

Se imponiamo

(a) $$p = c'(0) \equiv o + r'\, e_X$$

(b) $$e(p) = e'(0) \equiv e_Y$$

(c) $$k(p) = k'(0) \equiv -(1/r')\, e_X,$$

allora (c) determina il raggio r' della circonferenza ed il versore e_X del sistema di coordinate cartesiano, (b) determina il versore e_Y del sistema di coordinate cartesiano ed (a) determina il centro o del sistema di coordinate cartesiano e della circonferenza. Perciò, le condizioni (a), (b) e (c) determinano la circonferenza. ❑

Per costruzione, tale circonferenza approssima la traiettoria in un intorno di p con un'approssimazione del second'ordine rispetto alla lunghezza dell'arco.

Tale circonferenza è chiamata la *circonferenza osculatrice* alla traiettoria in p. Dunque, il raggio di curvatura (se è definito) è il raggio della circonferenza osculatrice.

Tenendo conto della traiettoria e della lunghezza dell'arco, possiamo separare le informazioni puramente geometriche e quelle puramente cinematiche del moto e decomporre la velocità e l'accelerazione nelle componenti tangenti e normali alla traiettoria.

PROPOSIZIONE. Sia nota la traiettoria $\boldsymbol{S} \equiv c(\boldsymbol{I})$ del moto c.

1) Il moto c è caratterizzato dalla funzione

$$c^s \equiv s \circ c : \boldsymbol{T} \to \mathbb{R}.$$

2) La velocità è data da

$$(*) \qquad Dc = Dc^s \, (e \circ c).$$

3) L'accelerazione è data da

$$(**) \qquad D^2 c = D^2 c^s \, (e \circ c) + (Dc^s)^2 \, (k \circ c)$$

e, se $\|k\| \neq 0$, da

$$D^2 c = D^2 c^s \, (e \circ c) + (Dc^s)^2 \, (\frac{n}{r} \circ c).$$

DIMOSTRAZIONE. 1) Ovvio.

2) La formula $(*)$ non è altro che l'espressione della velocità in un sistema di coordinate adattato alla traiettoria. Si può anche ottenere lo stesso risultato direttamente nel seguente modo. Se $p \in \boldsymbol{S}$ è il punto scelto come origine dell'arco sulla traiettoria, allora, possiamo scrivere

$$c = \sigma_p \circ c^s : \boldsymbol{T} \to \boldsymbol{P}$$

e, derivando questa formula mediante la regola della catena, otteniamo

$$Dc = (D\sigma_p) \circ c^s \, Dc^s = e \circ c \, Dc^s,$$

dato che

$$(D\sigma_p)(c^s(t)) = e(c(t)),$$

è il vettore tangente alla curva σ_p nel punto $c(t)$.

3) La formula $(**)$ è ottenuta derivando $(*)$

$$D^2 c = D\big(Dc^s \, (e \circ c)\big) = D^2 c^s \, (e \circ c) + Dc^s \, D(e \circ c) =$$

$$= D^2 c^s \, (e \circ c) + Dc^s \, \big((De \circ c)(Dc)\big) = D^2 c^s \, (e \circ c) + Dc^s \, (De \circ c)(Dc^s \, (e \circ c)) =$$

$$= D^2 c^s\,(e\circ c) + (Dc^s)^2\,(De(e))\circ c = D^2 c^s\,(e\circ c) + (Dc^s)^2\,k\circ c. \qquad \square$$

OSSERVAZIONE. Possiamo anche dimostrare le precedenti formule usando simboli tradizionali, meno rigorosi, ma semplici. Infatti, possiamo scrivere

$$Dc \equiv \frac{dc}{dt} = \frac{dc}{ds}\frac{ds}{dt} \equiv (e\circ c)\,Dc^s.$$

$$D^2 c \equiv \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}e\right) = \frac{d^2 s}{dt^2}e + \frac{ds}{dt}\frac{de}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}e + \frac{ds}{dt}\,\frac{de}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}e + \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 k \equiv$$

$$\equiv D^2 c^s\,(e\circ c) + (Dc^s)^2\,k\circ c. \qquad \square$$

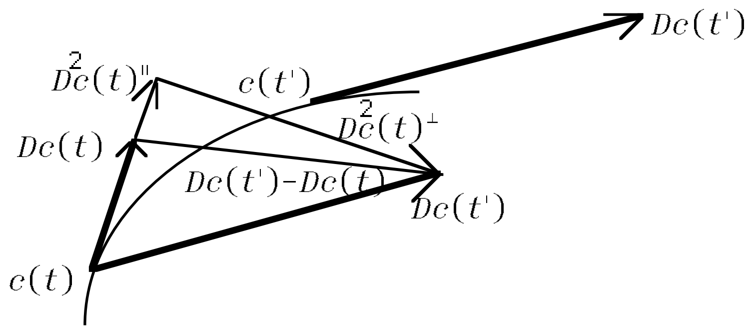

Fig. 1. Decomposizione dell'accelerazione secondo la traiettoria

In seguito, quando studieremo i moti vincolati (vedi), potremo approfondire e reinterpretare il precedente risultato, confrontando il vettore di curvatura con la seconda forma fondamentale della traiettoria.

3. Esempi di moti

Analiziamo alcuni tipi interessanti di moto.

Un moto $c : \boldsymbol{T} \to \boldsymbol{P}$ è detto *rettilineo, piano, circolare, ellittico,* e così via se la traiettoria è contenuta, rispettivamente in una retta, in un piano, in una circonferenza, un ellisse, e così via.

Un moto $c : \boldsymbol{T} \to \boldsymbol{P}$ è detto *uniforme*, se la norma della velocità è costante rispetto al tempo.

Un moto $c : \boldsymbol{T} \to \boldsymbol{P}$ è detto *centrale*, rispetto al *polo* $o \in \boldsymbol{P}$, se l'accelerazione soddisfa la condizione

$$D^2c(t) = \lambda(t)\,(c(t) - o) \qquad \forall t \in \boldsymbol{T},\ \lambda(t) \in \mathbb{R}.$$

Un moto $c : \boldsymbol{T} \to \boldsymbol{P}$ è detto *periodico*, se esiste un intervallo di tempo $T \in \bar{\boldsymbol{T}}$, tale che

$$(^\circ) \qquad c(t + T) = c(t) \qquad \forall t \in \boldsymbol{T}.$$

Supponiamo che il moto sia periodico. Ovviamente, per ogni intero n, abbiamo

$$c(t + nT) = c(t) \qquad \forall t \in \boldsymbol{T}.$$

Il più piccolo T, orientato positivamente e non nullo, per cui il moto soddisfa la condizione $(^\circ)$ è detto il *periodo*. Inoltre, il numero

$$\nu \equiv 1/T \in \mathbb{R}^+$$

è detto la *frequenza*.

ESEMPIO. Un moto *armonico* è un moto del tipo

$$c(t) = o + A \cos\big(\omega(t-\tau) + \alpha\big)\, e \qquad \forall t \in \boldsymbol{T},$$

dove $\tau \in \boldsymbol{T}$ è un'origine dei tempi e dove $o \in \boldsymbol{P}$ è un punto detto *centro*, $e \in \bar{\boldsymbol{P}}$ è un versore, $\omega \in \mathbb{R}^+$ è un numero detto la *pulsazione*, $\alpha \in [0, 2\pi)$ è un numero detto la *fase* ed $A \in \mathbb{R}^+$ è un numero detto l'*ampiezza*. La norma della distanza $\|c(t) - o\|$ dal centro è detta l'*elongazione* all'istante t.

Pertanto, il moto è rettilineo e periodico. Il periodo e la frequenza sono

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad \nu = \frac{\omega}{2\pi}.$$

Inoltre, la velocità è

$$Dc(t) = -\,\omega\, A \operatorname{sen}\,(\omega\,(t-\tau) + \alpha)\, e$$

e l'accelerazione è

$$D^2 c(t) = -\omega^2 A \cos(\omega (t-\tau) + \alpha)\, e$$

$$= -\omega^2 (c(t)-o).$$

Dunque, la norma della velocità è massima quando l'elongazione è minima e viceversa. Inoltre, l'accelerazione è proporzionale alla distanza del moto dal centro.

ESEMPIO. Studiamo un moto circolare uniforme di centro $o \in \boldsymbol{P}$ e raggio $R > 0$.

Consideriamo un sistema di coordinate cartesiano (X,Y,Z) con l'origine nel centro o della traiettoria e tale che il moto si svolga sul piano *delle* (X,Y). Sia (ρ,φ,Z) il sistema di coordinate cilindrico associato.

Scegliendo opportunamente l'origine dei tempi $\tau \in \boldsymbol{T}$ e l'orientazione di φ, l'espressione del moto in coordinate è del tipo

$$c(t) = o + R\big((\cos\omega(t-\tau))\, e_X + (\operatorname{sen}\omega(t-\tau))\, e_Y\big) \qquad \forall t \in \boldsymbol{T},\ \omega \in \mathbb{R}^+.$$

Pertanto, il moto è periodico. Il periodo e la frequenza sono

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad \nu = \frac{\omega}{2\pi}.$$

Dunque, le componenti del moto in coordinate cartesiane sono

$$c^X(t) = R\cos\omega(t-\tau)$$

$$c^Y(t) = R\operatorname{sen}\omega(t-\tau)$$

$$c^Z(t) = 0$$

ed in coordinate cilindriche

$$c^\rho(t) = R$$

$$c^\varphi(t) = \omega(t-\tau)$$

$$c^Z(t) = 0.$$

Pertanto, la velocità è

$$Dc(t) = \omega\, R\, \big(-\,(\mathrm{sen}\,\omega\,(t-\tau))\, e_X + (\cos\omega\,(t-\tau))\, e_Y\big)$$

$$= \omega\, \delta\varphi(c(t)) = \omega\, R\, e_\varphi(c(t))$$

e l'accelerazione è

$$D^2c(t) = -\,\omega^2\, R\, \big((\cos\omega\,(t-\tau))\, e_X + (\mathrm{sen}\,\omega\,(t-\tau))\, e_Y\big)$$

$$= -\,\omega^2\, R\, \delta\varrho(c(t)) \equiv -\,\omega^2\, R\, e_\varrho(c(t))$$

$$= -\,\omega^2\, (c(t)-o).$$

Pertanto, la norma della velocità e dell'accelerazione sono

$$\|Dc\| = \omega\, R \qquad \|D^2c\| = \omega^2\, R.$$

Inoltre, il moto è centrale. L'accelerazione del moto circolare uniforme è detta *centripeta*.

La proiezione del moto circolare uniforme c su una qualunque retta passante per o è un moto armonico di centro o e periodo T. Inoltre, se la retta è contenuta nel piano del moto, allora l'ampiezza è R.

Possiamo decomporre il moto circolare uniforme mediante due moti armonici. A tal fine, decomponiamo lo spazio $\boldsymbol{P}$ nella somma affine diretta (di un sottospazio affine, più due sottospazi vettoriali dello spazio dei vettori liberi)

$$\boldsymbol{P} = \bar{\boldsymbol{Q}}_X \oplus \bar{\boldsymbol{Q}}_Y \oplus \boldsymbol{Q}_Z,$$

dove $\mathbf{Q}_Z \subset \boldsymbol{P}$ è l'asse delle Z, $\bar{\boldsymbol{Q}}_X \subset \bar{\boldsymbol{P}}$ e $\bar{\boldsymbol{Q}}_Y \subset \bar{\boldsymbol{P}}$ sono gli spazi vettoriali associati agli assi delle X e delle Y, rispettivamente. Allora, il moto circolare uniforme c risulta essere la somma di un moto armonico nello spazio vettoriale $\bar{\boldsymbol{Q}}_X$ e di un moto armonico nello spazio vettoriale $\bar{\boldsymbol{Q}}_Y$, i quali hanno lo stesso centro o, lo stesso periodo T e la stessa ampiezza R, ma sono sfasati di $\pi/2$. ❑

ESEMPIO. Un moto *elicoidale uniforme* è il moto

$$c \equiv c^{\mathrm{o}} + \bar{c} : \boldsymbol{T} \to \boldsymbol{P}$$

ottenuto sommando un moto circolare uniforme

$$c^{\mathrm{o}} : \boldsymbol{T} \to \boldsymbol{P}$$

ed un moto (a valori vettoriali) rettilineo uniforme

$$\bar{c} : \boldsymbol{T} \to \bar{\boldsymbol{P}}$$

lungo la retta, detta *asse*, passante per il vettore $0 \in \bar{\boldsymbol{P}}$ ed ortogonale al piano del moto circolare uniforme .

Il *passo* del moto elicoidale uniforme

$$p \equiv \|D\bar{c}\| \, T$$

è lo spostamento compiuto da $\bar{c}$ in un periodo T di c^o.

Consideriamo un sistema di coordinate cartesiano (X,Y,Z) con l'origine o sull'asse e tale che il moto circolare si svolga sul piano *delle* (X,Y). Sia (ρ,φ,Z) il sistema di coordinate cilindrico associato.

Scegliendo opportunamente l'origine dei tempi $\tau \in \boldsymbol{T}$ e l'orientazione di φ, l'espressione del moto in coordinate è del tipo

$$c(t) = o + R\big((\cos\omega\,(t-\tau))\,e_X + (\operatorname{sen}\omega\,(t-\tau))\,e_Y\big) + p\,\frac{t-\tau}{T}\,e_Z$$

$$\forall t \in \boldsymbol{T},\ \omega \in \mathbb{R}^+,\ p \in \mathbb{R}.$$

Dunque, le componenti del moto in coordinate cartesiane sono

$$c^X(t) = R\cos\omega\,(t-\tau)$$

$$c^Y(t) = R\operatorname{sen}\omega\,(t-\tau)$$

$$c^Z(t) = p\,\frac{t-\tau}{T}$$

ed in coordinate cilindriche

$$c^\rho(t) = R$$

$$c^\varphi(t) = \omega\,(t-\tau)$$

$$c^Z(t) = p\,\frac{t-\tau}{T}\,.$$

Pertanto, la velocità è

$$Dc(t) = \omega\, R\, \big(-(\operatorname{sen} \omega\,(t-\tau))\, e_X + (\cos \omega\,(t-\tau))\, e_Y\big) + \frac{p}{T}\, e_Z$$

$$= \omega\, \delta\varphi(c(t)) + \frac{p}{T}\, e_Z = \omega\, R\, e_\varphi(c(t)) + \frac{p}{T}\, e_Z$$

e l'accelerazione è

$$D^2c(t) = -\,\omega^2\, R\, \big((\cos \omega\,(t-\tau))\, e_X + (\operatorname{sen} \omega\,(t-\tau))\, e_Y\big)$$

$$= -\,\omega^2\, R\, \delta\varrho(c(t)) \equiv -\,\omega^2\, R\, e_\varrho(c(t))$$

$$= -\,\omega^2\, (c(t)-o).$$

Infine, la norma della velocità e dell'accelerazione sono

$$\|Dc\| = \big(\omega^2\, R^2 + (\frac{p}{T})^2\big)^{1/2} \qquad \|D^2c\| = \omega^2\, R.$$

2. Dinamica

La dinamica studia la legge del moto, la quale stabilisce una relazione tra "la causa", ossia la forza e "l'effetto", ossia il moto. Tale legge assume la forma di un'equazione differenziale alle derivate ordinarie del second'ordine. Il problema fondamentale della dinamica, è quello di trovare il moto, data la forza ed i dati iniziali. Il problema fondamentale della statica è quello di trovare le condizioni per l'equilibrio: esso può essere visto come un caso particolare del problema della dinamica.

1. Forze

In questo paragrafo introduciamo la nozione astratta di forza e consideriamo vari esempi importanti suggeriti dalla fisica. Definiamo la potenza di una forza ed il lavoro di una forza lungo un moto. Dedichiamo molta attenzione allo studio delle forze conservative, la cui importanza è legata al teorema di conservazione dell'energia.

1. Forza

Nel contesto della dinamica della particella libera, consideriamo la "forza" come una grandezza vettoriale, che dipende dal tempo, dalla posizione e dalla velocità della particella in esame, con una legge data a priori. Per ricavare questa legge da informazioni più remote, occorrerebbe considerare un contesto più ampio che comprenda una legge di interazione della particella in esame con altre particelle o campi. Questo approccio sarà studiato parzialmente in capitoli successivi.

Dunque la forza è una grandezza definita sullo spazio delle fasi. Solo conoscendo il moto, si potrà comporre la forza con esso ed ottenere la "forza lungo il moto", che dipende solo dal tempo.

Tradizionalmente la forza è definita come un campo di vettori con valori in $\bar{\boldsymbol{P}}$: questo punto di vista è motivato dalla sua intuitività. D'altra parte, dato che $\boldsymbol{P}$ è dotato di una metrica g, sappiamo che possiamo equivalentemente definire la forza come un campo di forme con valori in $\bar{\boldsymbol{P}}^*$. Anzi, questo secondo punto di vista risulta più conveniente per ragioni teoriche, perché ci permetterà di esprimere la legge fondamentale della dinamica di una particella libera in un modo che sarà generalizzabile immediatamente ad un sistema di più particelle. Inoltre, svariati problemi pratici sono abbordabili più facilmente in forma covariante, come risulterà da risultati successivi.

Dunque, introduciamo direttamente la forza in forma covariante.

DEFINIZIONE. Chiamiamo *forza* (in forma covariante) un'applicazione differenziabile

$$F : \boldsymbol{T} \times \boldsymbol{P} \times \bar{\boldsymbol{P}} \to \bar{\boldsymbol{P}}^*. \qquad \clubsuit$$

L'espressione controvariante della forza è data da

$$\bar{F} \equiv g^{\#}(F) : \boldsymbol{T} \times \boldsymbol{P} \times \bar{\boldsymbol{P}} \to \bar{\boldsymbol{P}}.$$

L'espressione in coordinate della forza (in forma covariante) è

$$F = F_i \, Dx^i \qquad F_i : \boldsymbol{T} \times \boldsymbol{P} \times \bar{\boldsymbol{P}} \to \mathbb{R}$$

e l'espressione della forza in forma controvariante è

$$\bar{F} = F^i \, \delta x_i \qquad F^i : \boldsymbol{T} \times \boldsymbol{P} \times \bar{\boldsymbol{P}} \to \mathbb{R}$$

dove

$$F^i = g^{ij} \, F_j.$$

Può darsi che la forza non dipenda effettivamente dal tempo, o dalla posizione, o dalla velocità. Se la forza non dipende effettivamente da alcune variabili, noi scriveremo rispettivamente

$$F : \boldsymbol{P} \times \bar{\boldsymbol{P}} \to \bar{\boldsymbol{P}}^* \qquad F : \boldsymbol{T} \times \bar{\boldsymbol{P}} \to \bar{\boldsymbol{P}}^* \qquad F : \boldsymbol{T} \times \boldsymbol{P} \to \bar{\boldsymbol{P}}^*$$

$$F : \boldsymbol{T} \to \bar{\boldsymbol{P}}^* \qquad F : \boldsymbol{P} \to \bar{\boldsymbol{P}}^* \qquad F : \bar{\boldsymbol{P}} \to \bar{\boldsymbol{P}}^*.$$

Se la forza dipende solo dalla posizione

$$F : \boldsymbol{P} \to \bar{\boldsymbol{P}}^*$$

allora è detta *posizionale*. Questo è un caso particolarmente importante.

Considereremo anche forze definite solo su un sottinsieme aperto $\boldsymbol{V}$

$$F : \boldsymbol{V} \subset \boldsymbol{T} \times \boldsymbol{P} \times \bar{\boldsymbol{P}} \to \bar{\boldsymbol{P}}^*$$

$$F : \boldsymbol{V} \subset \boldsymbol{P} \times \bar{\boldsymbol{P}} \to \bar{\boldsymbol{P}}^* \qquad F : \boldsymbol{V} \subset \boldsymbol{T} \times \bar{\boldsymbol{P}} \to \bar{\boldsymbol{P}}^* \qquad F : \boldsymbol{V} \subset \boldsymbol{T} \times \boldsymbol{P} \to \bar{\boldsymbol{P}}^*$$

$$F : \boldsymbol{T} \to \boldsymbol{V} \subset \bar{\boldsymbol{P}}^* \qquad F : \boldsymbol{P} \to \boldsymbol{V} \subset \bar{\boldsymbol{P}}^* \qquad F : \boldsymbol{V} \subset \bar{\boldsymbol{P}} \to \bar{\boldsymbol{P}}^*.$$

Una forza $F : \boldsymbol{V} \to \bar{\boldsymbol{P}}^*$ è detta *centrale* rispetto al polo $o \in \boldsymbol{P}$ se ha un'espressione del tipo

$$\bar{F}(t,p,v) \equiv f(t,p,v)\,(p - o), \qquad f : \boldsymbol{V} \subset \boldsymbol{T} \times \boldsymbol{P} \times \bar{\boldsymbol{P}} \to \mathbb{R}.$$

Osserviamo che, se $(t,o,v) \in \boldsymbol{V}$, allora, per la continuità di F, abbiamo

$$F(t,o,v) = 0.$$

Una forza centrale $F : \boldsymbol{V} \to \bar{\boldsymbol{P}}^*$ rispetto al polo $o \in \boldsymbol{P}$ è detta anche *radiale* se è posizionale ed f è del tipo

$$f(p) = \varphi(\|p - o\|), \qquad \varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}.$$

Consideriamo un sistema di coordinate sferiche con centro in o. Una forza F è centrale rispetto al polo o se e solo se la sua espressione è del tipo

$$\bar{F} \equiv F^r\, \delta r, \qquad F^r : \boldsymbol{V} \subset \boldsymbol{T} \times \boldsymbol{P} \times \bar{\boldsymbol{P}} \to \mathbb{R};$$

una forza centrale F è anche radiale se e solo se F^r è del tipo

$$F^r = f \circ r, \qquad f : \boldsymbol{V} \subset \boldsymbol{P} \to \mathbb{R}.$$

Sia $F : \boldsymbol{T} \times \boldsymbol{P} \times \bar{\boldsymbol{P}} \to \bar{\boldsymbol{P}}^*$ una forza e sia $c : \boldsymbol{T} \to \boldsymbol{P}$ un moto. Allora, la *forza lungo il moto* è l'applicazione

$$F \circ jc : \boldsymbol{T} \to \bar{\boldsymbol{P}}^* : t \mapsto F\big(t,\, c(t),\, Dc(t)\big).$$

ESEMPI. La *forza peso* (dovuta all'attrazione gravitazionale terrestre su una particella di massa m ed in una regione in cui l'accelerazione di gravità può essere approssimata al vettore costante $\gamma\, e$) è una forza (costante) del tipo

$$\bar{F} \equiv - m \, \gamma \, e$$

dove

$$m, \gamma \in \mathbb{R}^+ \qquad e \in \bar{\boldsymbol{P}} \qquad \|e\| = 1.$$

La *forza di Newton*, o di *Coulomb* (dovute ad una massa gravitazionale o ad una carica elettrica situate nel punto $o \in \boldsymbol{P}$) è una forza del tipo

$$\bar{F}(p) \equiv - k \, \frac{1}{\|p-o\|^2} \, \frac{p-o}{\|p-o\|} \qquad \forall p \in \boldsymbol{P} - \{o\}.$$

Nel caso Newtoniano è $k > 0$ (forza attrattiva); nel caso Coulombiano è $k > 0$, o $k < 0$, secondo che la forza sia attrattiva o repulsiva.

La *forza di Lorentz* (dovuta ad un campo magnetico B) è una forza del tipo

$$\bar{F}(t,p,v) \equiv k \, v \times B(t,p) \qquad \forall (t,p,v) \in \boldsymbol{T} \times \boldsymbol{P} \times \bar{\boldsymbol{P}},$$

dove

$$k \in \mathbb{R}^+ \qquad \mathrm{B} : \boldsymbol{T} \times \boldsymbol{P} \to \bar{\boldsymbol{P}}.$$

La *forza di Biot-Savart* (esercitata su una carica magnetostatica dal campo magnetico prodotto da una corrente rettilinea uniforme)[2] è una forza la cui espressione in un opportuno sistema di coordinate cilindriche è del tipo

$$\bar{F} \equiv k \, \frac{1}{\rho} \, e_{\varphi}.$$

Tale forza è definita in tutto lo spazio $\boldsymbol{P}$ meno l'asse delle Z. Osserviamo che, a rigore, e_{φ} non sarebbe definito sul semipiano di equazione $\varphi = 0$; ma può essere esteso per continuità a tutto lo spazio meno l'asse delle Z.

La *forza elastica* di centro $o \in \boldsymbol{P}$ è una forza del tipo

$$\bar{F}(p) \equiv - k \, (p-o) \qquad \forall p \in \boldsymbol{P},$$

---

[2] A rigore, da un punto di vista fisico, questa non è una vera forza, ma un campo vettoriale di altra natura, perché le cariche magnetiche non esistono. Noi, però, tratteremo questo oggetto come fosse una vera forza, perché fornirà un valido esempio di forza conservativa localmente e non globalmente.

dove

$$k \in \mathbb{R}^+.$$

La *forza di attrito viscoso* è una forza del tipo

$$\bar{F}(v) = -\lambda\, v \qquad \forall v \in \bar{\boldsymbol{P}},$$

dove

$$\lambda \in \mathbb{R}^+.$$ ❑

2. Potenza

Data una forza $F : \boldsymbol{T} \times \boldsymbol{P} \times \bar{\boldsymbol{P}} \to \bar{\boldsymbol{P}}^*$, possiamo definirne la potenza.

Tradizionalmente la potenza è derivata dal lavoro; a noi sembra più naturale invertire la procedura; infatti, il concetto di lavoro richiede un moto, mentre quello di potenza non lo richiede necessariamente.

Definizione. La *potenza* della forza F è la funzione

$$W : \boldsymbol{T} \times \boldsymbol{P} \times \bar{\boldsymbol{P}} \to \mathbb{R} : (t, p, v) \mapsto \langle F(t, p, v), v \rangle.$$ ♣

Equivalentemente, la potenza può essere espressa mediante la forza in forma controvariante:

$$W : \boldsymbol{T} \times \boldsymbol{P} \times \bar{\boldsymbol{P}} \to \mathbb{R} : (t, p, v) \mapsto \bar{F}(t, p, v) \cdot v.$$

L'espressione in coordinate della potenza è

$$W = F_i\, \dot{x}^i = g_{ij}\, F^i\, \dot{x}^j.$$

Si osservi che la potenza, così definita, non dipende dalla scelta di alcun moto. Se poi, consideriamo un moto $c : \boldsymbol{T} \to \boldsymbol{P}$, allora otteniamo la *potenza lungo il moto*

$$W \circ jc : \boldsymbol{T} \to \mathbb{R} : t \mapsto W(t, p, v) \equiv \langle F(t, c(t), Dc(t)), Dc(t) \rangle,$$

o, equivalentemente, considerando la forza in forma controvariante,

$$W \circ jc : \boldsymbol{T} \to \mathbb{R} : t \mapsto W(t, p, v) \equiv \bar{F}(t, c(t), Dc(t)) \cdot Dc(t).$$

L'espressione in coordinate della potenza lungo il moto è

$$W \circ jc = (F_i \circ jc)\, Dc^i = (g_{ij} \circ c)\, (F^i \circ jc)\, Dc^j.$$

3. Lavoro

Il concetto di lavoro viene utilizzato nella trattazione delle forze conservative e nella formulazione dei teoremi sull'energia. Per definire il lavoro occorre fissare, oltre alla forza, anche un moto (nel caso di forze posizionali è sufficiente fissare un cammino).

Sia $F : \boldsymbol{T}\times\boldsymbol{P}\times\bar{\boldsymbol{P}}\to\bar{\boldsymbol{P}}^*$ una forza, $c : \boldsymbol{T}\to\boldsymbol{P}$ un moto e $\boldsymbol{I} \equiv [t_1, t_2] \subset \boldsymbol{T}$ un intervallo di tempo.

Supponiamo di avere scelto l'unità di misura dei tempi $e_0 \in \bar{\boldsymbol{T}}$ e sia

$$x^0 : \boldsymbol{T} \to \mathbb{R} : t \mapsto (t-t_0)/e_0$$

il sistema di coordinate cartesiano (definito a meno dell'origine t_0); dunque la forma volume dx^0 su $\boldsymbol{T}$ è caratterizzata dalla relazione $\langle dx^0, e_0\rangle = 1$.

DEFINIZIONE. Il *lavoro* della forza F lungo il moto c e relativamente all'intervallo di tempo $\boldsymbol{I}$ è il numero reale

$$L \equiv \int_{\boldsymbol{I}} W\circ jc \; dx^0 \equiv \int_{\boldsymbol{I}} \langle F\circ jc,\, Dc\rangle \, dx^0 \in \mathbb{R}. \qquad \clubsuit$$

Con notazioni classiche, meno precise, ma più tradizionali, scriveremo

$$L \equiv \int_{\boldsymbol{I}} W(t)\, dt \equiv \int_{\boldsymbol{I}} \bar{F}(t,\, c(t),\, \frac{dc}{dt}(t)) \cdot \frac{dc}{dt}(t)\, dt.$$

Nella definizione precedente, sostituendo l'istante fisso $t_2 \in \boldsymbol{T}$ con un istante $\tau\in\boldsymbol{T}$ variabile, otteniamo la *funzione lavoro*

$$L : \boldsymbol{T} \to \mathbb{R} : \tau \mapsto L(\tau) \equiv \int_{[t_1,\tau]} W\circ jc \; dx^0,$$

o, con notazioni classiche,

$$L(\tau) \equiv \int_{[t_1,\tau]} W(t)\, dt \equiv \int_{[t_1,\tau]} \bar{F}(t,\, c(t),\, \frac{dc}{dt}(t)) \cdot \frac{dc}{dt}(t)\, dt.$$

L'applicazione

$$L : \boldsymbol{T} \to \mathbb{R} : t \mapsto L(\tau) \equiv \int_{[t_1,\tau]} W \circ jc \, dx^0$$

è una funzione differenziabile (del tempo) e la sua derivata è la potenza lungo il moto

$$DL = W \circ jc : \boldsymbol{T} \to \mathbb{R} : t \mapsto W(t, c(t), Dc(t)).$$

Nel caso particolare in cui la forza sia posizionale il lavoro dipende solo dalla traiettoria del moto.

OSSERVAZIONE. Supponiamo che la forza sia posizionale

$$F : \boldsymbol{P} \to \bar{\boldsymbol{P}}^*.$$

Supponiamo che la traiettoria del moto $c : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{P}$

$$\iota : \boldsymbol{S} \hookrightarrow \boldsymbol{P},$$

sia una sottovarietà. Sia $s : \boldsymbol{S} \to \mathbb{R}$ la funzione lunghezza dell'arco (definita a meno di una costante additiva e del segno); tale funzione è di classe C^∞ e ds è una forma volume su $\boldsymbol{S}$, caratterizzata dalla relazione $\langle ds, e \rangle = 1$, dove e è il versore tangente alla sottovarietà.

Allora, il lavoro è esprimibile come l'integrale sulla sottovarietà $\boldsymbol{S}$

$$L \equiv \int_{\boldsymbol{S}} F^\dagger \, ds,$$

dove

$$F^\dagger \equiv \langle F \circ \iota, e \rangle : \boldsymbol{S} \to \mathbb{R}$$

è la componente della forza tangente alla traiettoria.

DIMOSTRAZIONE. Possiamo scrivere

$$L \equiv \int_{\boldsymbol{I}} W \circ jc \, dx^0 \equiv \int_{\boldsymbol{I}} \langle F \circ jc, Dc \rangle \, dx^0 \equiv \int_{\boldsymbol{I}} \langle F \circ c, Dc \rangle \, dx^0 \in \mathbb{R}.$$

Allora, il teorema è una conseguenza immediata del teorema sul cambiamento di dominio di integrazione, tenuto conto della seguente formula

$$Dc \, dx^0 = Dc^s \, (e \circ c) \, dx^0 = (e \circ c) \, \frac{ds}{dx^0} \, dx^0 = (e \circ c) \, ds. \qquad \square$$

4. Forze conservative

Le forze conservative sono importanti forze posizionali. La loro importanza è legata al teorema della conservazione dell'energia.

In questo paragrafo ci riferiamo ad una forza posizionale definita in un sottinsieme aperto della spazio delle posizioni

$$F : \boldsymbol{V} \subset \boldsymbol{P} \to \bar{\boldsymbol{P}}^{*}.$$

Definizione. 1) Si dice che la forza F è *conservativa* [5] se esiste una funzione

$$U : \boldsymbol{V} \to \mathbb{R},$$

tale che

$$F = DU,$$

o, equivalentemente, in forma controvariante, tale che

$$\bar{F} = \operatorname{grad} U.$$

In tal caso, si dice che U è il *potenziale* della forza F.

2) Si dice che la forza F è *localmente conservativa* se, per ogni punto $p \in \boldsymbol{V}$, esiste una funzione

$$U : \boldsymbol{V}_p \to \mathbb{R},$$

definita in un intorno aperto $\boldsymbol{V}_p \subset \boldsymbol{V}$ del punto p, tale che, in tale intorno,

$$F = DU,$$

o, equivalentemente, in forma controvariante, tale che, in tale intorno,

$$\bar{F} = \operatorname{grad} U.$$

In tal caso, si dice che U è il *potenziale locale* della forza F. ❑

Dunque, la forza F è (localmente) conservativa se e solo se la sua espressione in un qualunque sistema di coordinate è (localmente) del tipo

---

[5] In geometria, la terminologia "forza conservativa" è tradotta con **forma esatta**.

$$F_i = \frac{\partial U}{\partial x^i} \qquad 1 \le i \le 3,$$

o, equivalentemente, in forma controvariante,

$$F^i = g^{ij} \frac{\partial U}{\partial x^j} \qquad 1 \le i \le 3,$$

dove U è una funzione definita (localmente) sul dominio della forza.

OSSERVAZIONE. Sia F (localmente) conservativa e sia $\boldsymbol{V}$ ($\boldsymbol{V}_p$) connesso.

a) Se U è un potenziale (locale) della forza F, allora

$$U' \equiv U + \text{cost}$$

è ancora un potenziale (locale) della forza F.

b) *Se U ed U'* sono due potenziali (locali) della forza F, allora abbiamo

$$U' = U + \text{cost}.$$

DIMOSTRAZIONE. a) Se $F = DU$, allora è anche $F = D(U + \text{cost})$.

b) Se $F = DU$ ed $F = DU'$, allora abbiamo $0 = DU - DU' = D(U - U')$, da cui otteniamo $U - U' = \text{cost}$. ❑

Dunque, il potenziale, se esiste, è definito a meno di una costante per ogni componente connessa del dominio di definizione.

Naturalmente, se la forza F è conservativa, allora è anche localmente conservativa. Ma, viceversa, se la forza F è localmente conservativa, allora essa può non essere conservativa. Quando vogliamo mettere in evidenza il fatto che una forza è conservativa, e non solo localmente conservativa, diciamo che è "globalmente" conservativa.

ESEMPIO. La forza costante

$$\bar{F} = k\, e_3,$$

definita su tutto lo spazio $\boldsymbol{P}$, è conservativa ed il potenziale è (a meno di una costante additiva) la funzione

$$U = k\, Z. \qquad ❑$$

ESEMPIO. La forza elastica

$$\bar{F} = - k\, r\, \delta r,$$

definita su tutto lo spazio $\boldsymbol{P}$, è conservativa ed il potenziale è (a meno di una costante additiva) la funzione

$$U = - \tfrac{1}{2} k\, r^2. \qquad \square$$

ESEMPIO. La forza di Newton, o Coulomb,

$$\bar{F} = - k\, \frac{1}{r^2}\, \delta r,$$

definita su tutto lo spazio $\boldsymbol{P}$ meno il punto o, è conservativa ed il potenziale è (a meno di una costante additiva) la funzione

$$U = k\, \frac{1}{r}. \qquad \square$$

ESEMPIO. La forza

$$\bar{F} = k\, \frac{1}{\rho}\, e_{\varphi},$$

definita sul dominio $\boldsymbol{V}$ costituito da tutto lo spazio $\boldsymbol{P}$ meno l'asse delle Z, è localmente conservativa. Infatti, consideriamo il sottinsieme aperto $\boldsymbol{V}_1 \subset \boldsymbol{V}$ costituito da $\boldsymbol{V}$ meno un semipiano di equazione

$$\varphi = \alpha_1 \qquad 0 \le \alpha_1 < 2\pi.$$

Allora, il potenziale locale su tale sottinsieme aperto è (a meno di una costante additiva) la funzione

$$U_1 = k\, \varphi_1,$$

dove

$$\varphi_1 : \mathbf{V}_1 \to (0, 2\pi) \subset \mathbb{R}$$

è la funzione ottenuta misurando l'angolo orientato sul piano equatoriale a partire dal semipiano di equazione $\varphi = \alpha_1$.

Sono sufficienti due sottodomini $\boldsymbol{V}_1$ e $\boldsymbol{V}_2$ di questo tipo, corrispondenti a due semipiani diversi, per ricoprire tutto il dominio $\boldsymbol{V}$ della forza. Nell'intersezione $\boldsymbol{V}_1 \cap \boldsymbol{V}_2$ di questi due sottodomini i due potenziali locali differiscono per la costante

$$U_2 - U_1 = k\,(\varphi_2 - \varphi_1) = k\,(\alpha_1 - \alpha_2).$$

La forza F non è, però, globalmente conservativa. Infatti, non è possibile estendere il potenziale locale a tutto il dominio di definizione della forza, perché esso è discontinuo (e quindi non ammette differenziale) sul semipiano che abbiamo escluso.

Si noti, però, che il limite del differenziale del potenziale locale φ_1 è ben definito in ogni punto del semipiano che abbiamo escluso e coincide con la forza in tale punto. ❑

Ribadiamo che se la forza F non è posizionale, non ha senso parlare di conservatività e di potenziale.

Criteri di conservatività

Studiamo ora due criteri importanti per decidere se una data forza (posizionale) F è (localmente) conservativa o no.

TEOREMA. *Criterio per la conservatività globale.*

Sia $F : \boldsymbol{V} \to \bar{\boldsymbol{P}}$ una forza posizionale.

Le tre condizioni seguenti sono equivalenti.

1) La forza F è conservativa.

2) Per ogni coppia di punti

$$p,\, q \in \boldsymbol{V} \subset \boldsymbol{P},$$

il lavoro della forza lungo un cammino $\boldsymbol{S}$ (differenziabile a tratti) congiungente i due punti

$$L \equiv \int_{\boldsymbol{S}} F^{\dagger}\, ds$$

non dipende dalla scelta di tale cammino (ma solo dalla scelta dei due punti).

3) Il lavoro della forza lungo un cammino chiuso $\boldsymbol{S}$ (differenziabile a tratti)

$$L \equiv \int_{\boldsymbol{S}} F^{\dagger}\, ds = 0$$

è nullo.

Inoltre, se queste condizioni sono soddisfatte, allora il potenziale è dato dalla funzione

$$(*)\qquad U(p) \equiv L(p) \equiv \int_{\boldsymbol{S}} F^\dagger\, ds \qquad p \in \boldsymbol{V},$$

ottenuta scegliendo un'origine $o \in \boldsymbol{V}$ del dominio della forza e calcolando, per ogni punto $p \in \boldsymbol{V}$, il lavoro della forza lungo un qualunque cammino $\boldsymbol{S}$ (differenziabile a tratti) congiungente l'origine $o \in \boldsymbol{V}$ con il punto $p \in \boldsymbol{V}$.

DIMOSTRAZIONE. 1) $\Rightarrow$ 2). Se $F = DU$, ed $\boldsymbol{S}$ è un cammino congiungente i punti p e q, allora abbiamo

$$F^\dagger = DU^\dagger,$$

dove $U^\dagger : \boldsymbol{S} \to \mathbb{R}$ denota la restrizione del potenziale U ad $\boldsymbol{S}$, e quindi

$$L \equiv \int_{\boldsymbol{S}} F^\dagger\, ds = \int_{\boldsymbol{S}} DU^\dagger\, ds = U(q) - U(p).$$

2) $\Rightarrow$ 1). Sia

$$U : \boldsymbol{V} \to \mathbb{R}$$

la funzione definita in $(*)$. Dimostriamo che tale funzione è differenziabile e che la sua derivata è proprio la forza F.

Sia $p \in \boldsymbol{V}$. Si consideri $h \in \bar{\boldsymbol{P}}$ sufficientemente piccolo in modo che il segmento $(p,\, p+h) \in \boldsymbol{V}$. Si considerino un cammino differenziabile $\boldsymbol{S}_p$ congiungente o con p, un cammino differenziabile $\boldsymbol{S}_{p+h}$ congiungente o con $p+h$ ed il segmento $\boldsymbol{S}_h$ congiungente p con $p+h$.

Allora, per 2), abbiamo

$$U(p+h) \equiv \int_{\boldsymbol{S}_{p+h}} F^\dagger\, ds = \int_{\boldsymbol{S}_p} F^\dagger\, ds + \int_{\boldsymbol{S}_h} F^\dagger\, ds \equiv U(p) + \int_{\boldsymbol{S}_h} F^\dagger\, ds.$$

Ma, per il teorema della media sugli integrali, possiamo scrivere

$$(**)\qquad \int_{\boldsymbol{S}_h} F^\dagger\, ds = \langle F(p), h\rangle + o_p(h),$$

dove $o_p(h)$ indica un infinitesimo di ordine superiore a h. Dunque, otteniamo

$$U(p+h) = U(p) + \langle F(p),h \rangle + o_p(h),$$

ossia, F è differenziabile in p e

$$DU(p) = F(p).$$

2) $\Leftrightarrow$ 3). Ogni cammino chiuso, che parte da un punto p e ritorna a p, passando per un punto q, può essere ottenuto mediante due cammini, che congiungono p a q, attaccando il secondo al primo, ed invertendo il verso di percorrenza del parametro del secondo cammino. Viceversa, ogni coppia di cammini, che congiungono due punti p e q, può essere ottenuta spezzando un cammino chiuso, che parte da p e ritorna a p, passando per q, ed invertendo il verso di percorrenza del parametro del secondo tratto.

La dimostrazione si conclude ricordando le proprietà degli integrali di additività rispetto al dominio di integrazione e di inversione del segno rispetto all'inversione del verso di percorrenza del parametro. ❑

Il criterio di conservatività fornito dal teorema precedente ha alcuni aspetti vantaggiosi ma non è sempre comodo.

Gli aspetti vantaggiosi sono almeno due: il criterio riguarda la conservatività globale (e non solo locale) e fornisce un metodo pratico per calcolare effettivamente il potenziale (se esso esiste).

D'altra parte, la verifica prevista dal criterio richiede il calcolo di infiniti integrali: occorre considerare tutti gli infiniti cammini chiusi. Se la forza non è conservativa, può darsi che si riesca a trovare rapidamente un cammino chiuso lungo il quale il lavoro non è nullo ed allora la verifica del criterio si conclude con esito negativo.

ESEMPIO. La forza

$$\bar{F} = k \frac{1}{\rho} e_{\varphi},$$

definita sul dominio $\boldsymbol{V}$ costituito da tutto lo spazio $\boldsymbol{P}$ meno l'asse delle Z, non è globalmente conservativa. Infatti, il lavoro lungo un cammino circolare, sul piano orizzontale, con centro sull'asse delle Z, è

$$L = \pm\, 2\pi\, k \neq 0.$$

D'altra parte, avevamo visto che tale forza è localmente conservativa.

Si noti che il precedente lavoro non dipende dal raggio del cammino circolare considerato. ❑

TEOREMA. *Criterio per la conservatività locale (lemma di Poincaré).*
Le due condizioni seguenti sono equivalenti.
1) La forza F è localmente conservativa.
2) Il rotore della forza F è nullo

$$\operatorname{rot} F = 0$$

ossia, le derivate parziali incrociate delle componenti della forza F (in forma covariante)[4], rispetto ad un sistema di coordinate, sono uguali

$$\frac{\partial F_i}{\partial x^j} = \frac{\partial F_j}{\partial x^i} \qquad 1 \le i < j \le 3.$$

DIMOSTRAZIONE. 1) $\Rightarrow$ 2). Se localmente è

$$F \equiv DU,$$

ossia

$$F_i \equiv \frac{\partial U}{\partial x^i} \qquad 1 \le i \le 3,$$

allora, per la simmetria delle derivate seconde parziali, abbiamo

$$\frac{\partial F_i}{\partial x^j} \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial x^j \partial x^i} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^i \partial x^j} \equiv \frac{\partial F_j}{\partial x^i} \; .$$

2) $\Rightarrow$ 1). Per questa parte della dimostrazione, rimandiamo ad un testo di Analisi. ❑

Ribadiamo il fatto che la verifica del criterio, secondo la formulazione semplice che abbiamo dato, deve essere eseguita mediante le componenti covarianti (e non controvarianti) della forza. Naturalmente, in un sistema di coordinate cartesiane, le componenti covarianti sono uguali a quelle controvarianti e questa distinzione è superflua.

---

[4] Attenzione: queste relazioni sono valide solo se usiamo le componenti covarianti della forza. Analoghe relazioni potrebbero essere formulate anche in forma controvariante, ma sarebbero inutilmente complicate. Naturalmente, se usiamo coordinate cartesiane, non ha nessuna rilevanza fare questa distinzione.

Il precedente criterio di conservatività locale ha il pregio di essere facilmente verificabile con il semplice calcolo di sei derivate parziali. Esso, tuttavia, non fornisce un metodo esplicito per il calcolo del potenziale (se esso esiste).

Inoltre, il precedente criterio non garantisce da solo la globale conservatività della forza. Tuttavia, se vale una certa proprietà topologica del dominio della forza, allora la conservatività locale implica anche quella globale.

A tale scopo, ricordiamo che un sottinsieme aperto e connesso di $\boldsymbol{P}$ è *semplicemente connesso* se ogni cammino continuo chiuso può essere deformato con continuità fino ad ottenere un cammino nullo. E' possibile dimostrare il seguente risultato.

PROPOSIZIONE. Sia $F : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{\bar{P}}^*$ una forza localmente conservativa.

Se il dominio è semplicemente connesso, allora la forza è globalmente conservativa. ❑

Naturalmente, esistono forze globalmente conservative su un qualunque dominio (anche non semplicemente connesso): per esempio, basta considerare una forza costante.

ESEMPIO. La forza

$$\bar{F} = k \frac{1}{\rho} e_\varphi ,$$

definita sul dominio $\boldsymbol{V}$ costituito da tutto lo spazio $\boldsymbol{P}$ meno l'asse delle Z, è localmente conservativa. Infatti, l'espressione covariante della forza in coordinate cilindriche

$$F = k \, d\varphi$$

fornisce le componenti

$$F_\rho = 0 \qquad F_\varphi = k \qquad F_Z = 0$$

e, quindi, abbiamo

$$\frac{\partial F_\rho}{\partial \varphi} \equiv 0 \equiv \frac{\partial F_\varphi}{\partial \rho} \qquad \frac{\partial F_\rho}{\partial Z} \equiv 0 \equiv \frac{\partial F_Z}{\partial \rho} \qquad \frac{\partial F_Z}{\partial \varphi} \equiv 0 \equiv \frac{\partial F_\varphi}{\partial Z} .$$

D'altra parte avevamo già visto che la forza F non è globalmente conservativa. Ciò si accorda con il fatto che il dominio non è semplicemente connesso. Infatti, i cammini chiusi continui che sono concatenati con l'asse delle Z non possono essere deformati con continuità fino ad ottenere un cammino nullo, perché l'asse delle Z è escluso dal dominio di definizione della forza.

Il calcolo precedente potrebbe essere eseguito esprimendo la forza in coordinate cartesiane, ma sarebbe più complicato. ❑

ESEMPIO. La forza di Newton, o di Coulomb,

$$\bar{F} = -k \frac{1}{r^2} e_r,$$

definita su tutto lo spazio $\boldsymbol{P}$ meno il punto o, è localmente conservativa. Infatti, l'espressione covariante della forza in coordinate sferiche

$$F = -k \frac{1}{r^2} Dr$$

fornisce le componenti

$$F_r = -k \frac{1}{r^2} \qquad F_\vartheta = 0 \qquad F_\varphi = 0$$

e, quindi, abbiamo

$$\frac{\partial F_r}{\partial \vartheta} \equiv 0 \equiv \frac{\partial F_\vartheta}{\partial r} \qquad \frac{\partial F_r}{\partial \varphi} \equiv 0 \equiv \frac{\partial F_\varphi}{\partial r} \qquad \frac{\partial F_\varphi}{\partial \vartheta} \equiv 0 \equiv \frac{\partial F_\vartheta}{\partial \varphi}.$$

Naturalmente, il calcolo può essere eseguito in coordinate cartesiane, ma risulta più lungo.

D'altra parte, il dominio è semplicemente connesso e, pertanto, la forza è globalmente conservativa.

Questo risultato si accorda con il fatto che la forza F è centrale e radiale. ❑

Ricerca pratica del potenziale

In conclusione, data una forza

$$F : \boldsymbol{V} \to \bar{\boldsymbol{P}}^*,$$

come conviene procedere per verificare se essa sia globalmente o localmente conservativa ed, eventualmente, calcolarne il potenziale?

In qualche caso, l'espressione della forza è talmente semplice che si vede immediatamente che essa è globalmente conservativa e si trova immediatamente il potenziale (per esempio, forza costante, forza centrale e radiale).

In altri casi, l'espressione della forza suggerisce immediatamente un qualche cammino chiuso differenziabile a tratti, lungo il quale il lavoro non è nullo e quindi si deduce che la forza non è globalmente conservativa (per esempio, forza di Biot-Savart, forza centrale e non radiale). Oppure, particolari simmetrie dell'espressione della forza suggeriscono immediatamente che il lavoro lungo un qualunque cammino chiuso differenziabile a tratti è nullo e quindi si deduce che la forza è globalmente conservativa (per esempio, forza centrale e radiale).

Quando queste verifiche immediate non sono agevoli, conviene calcolare le derivate parziali delle componenti della forza in forma covariante e verificare il criterio di locale conservatività. Se il criterio non è verificato, allora la forza non è localmente conservativa (e quindi nemmeno globalmente conservativa) ed il problema è risolto con esito negativo. Se il criterio è verificato, allora la forza è localmente conservativa; se, per di più, il dominio è semplicemente connesso, allora la forza è anche globalmente conservativa.

Supponiamo ora di sapere che la forza sia globalmente conservativa; rimane allora da calcolare effettivamente il potenziale globale. A tale scopo, si considera un'origine del dominio e, per ogni altro punto del dominio, si sceglie un cammino differenziabile a tratti, che congiunge l'origine con tale punto, e si calcola il lavoro della forza lungo questo cammino: il numero reale ottenuto è il valore del potenziale nel punto considerato. Naturalmente, il potenziale (che è definito a meno di una costante additiva) risulta essere nullo nell'origine considerata. In pratica, conviene scegliere i cammini in modo che il calcolo degli integrali risulti facile.

Supponiamo invece di sapere che la forza sia localmente conservativa; rimane allora da calcolare effettivamente il potenziale locale. A tale scopo, per ogni punto del dominio possiamo scegliere un intorno aperto semplicemente connesso e procedere, limitatamente a questo intorno, come nel caso precedente.

Oppure, se sappiamo che la forza è globalmente o localmente conservativa, possiamo integrare (almeno localmente) il sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali che definisce il potenziale, come segue.

PROBLEMA. *Integrazione del sistema di equazioni differenziali.*

Sia $F : \boldsymbol{V} \to \bar{\boldsymbol{P}}^*$ una forza data e sia $\operatorname{rot} F = 0$.

Sia (x^i) un sistema di coordinate. Limitiamoci a considerare un aperto

$\boldsymbol{V}'\subset\boldsymbol{V}$, la cui rappresentazione nel sistema di coordinate scelto sia il prodotto di tre intervalli corrispondenti alle tre coordinate.

Consideriamo il sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali

(1) $$F_1 = \frac{\partial U}{\partial x^1}$$

(2) $$F_2 = \frac{\partial U}{\partial x^2}$$

(3) $$F_3 = \frac{\partial U}{\partial x^3}$$

nella funzione incognita U. Dato che il dominio $\boldsymbol{V}'$ è semplicemente connesso, il sistema è globalmente integrabile in $\mathbf{V}'$. Integriamo dunque il sistema.

Incominciamo ad integrare l'equazione (1). Ogni soluzione globale è del tipo

$$U = U_1 + K_1$$

dove U_1 è una primitiva di F_1 rispetto alla coordinata x^1, ossia è una funzione differenziabile che soddisfa l'equazione

$$\frac{\partial U_1}{\partial x^1} = F_1,$$

e K_1 è una funzione differenziabile costante rispetto alla coordinata x^1.

La funzione $U \equiv U_1 + K_1$ soddisfa anche l'equazione (2)

$$F_2 = \frac{\partial U}{\partial x^2} \equiv \frac{\partial U_1}{\partial x^2} + \frac{\partial K_1}{\partial x^2}$$

se e solo se

(2') $$F_2 - \frac{\partial U_1}{\partial x^2} = \frac{\partial K_1}{\partial x^2}\,.$$

Integriamo allora l'equazione (2') nella funzione incognita K_1. Ogni soluzione globale è del tipo

$$K_1 = U_2 + K_2,$$

dove U_2 è una primitiva di $F_2 - \dfrac{\partial U_1}{\partial x^2}$ rispetto alla coordinata x^2, ossia è una funzione differenziabile che soddisfa l'equazione

$$\frac{\partial U_2}{\partial x^2} = F_2 - \frac{\partial U_1}{\partial x^2},$$

e K_2 è una funzione differenziabile costante rispetto alla coordinata x^2.

Possiamo scegliere U_2 costante rispetto alla coordinata x^1 perché

$$\frac{\partial}{\partial x^1}\left(F_2 - \frac{\partial U_1}{\partial x^2}\right) \equiv \frac{\partial F_2}{\partial x^1} - \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^1 \partial x^2} = \frac{\partial F_2}{\partial x^1} - \frac{\partial F_1}{\partial x^2} = 0.$$

Pertanto, ogni soluzione di (2′) può essere scritta nella forma

$$K_1 = U_2 + K_2,$$

dove K_1, U_2 e K_2 sono costanti rispetto alla coordinata x^1.

Dunque, abbiamo dimostrato che ogni soluzione del sistema (1) e (2) può essere scritta nella forma

$$U = U_1 + U_2 + K_2,$$

dove U_1, U_2 e K_2 sono funzioni del tipo descritto precedentemente.

La funzione $U \equiv U_1 + U_2 + K_2$ soddisfa anche l'equazione (3)

$$F_3 = \frac{\partial U}{\partial x^3} \equiv \frac{\partial U_1}{\partial x^3} + \frac{\partial U_2}{\partial x^3} + \frac{\partial K_2}{\partial x^3}$$

se e solo se

$$F_3 - \frac{\partial U_1}{\partial x^3} - \frac{\partial U_2}{\partial x^3} = \frac{\partial K_2}{\partial x^3}. \tag{3'}$$

Integriamo allora l'equazione (3′) nella funzione incognita K_2. Ogni soluzione globale è del tipo

$$K_2 = U_3 + K_3,$$

dove U_3 è una primitiva di $F_3 - \frac{\partial U_1}{\partial x^3} - \frac{\partial U_2}{\partial x^3}$ rispetto alla coordinata x^3, ossia è una funzione differenziabile che soddisfa l'equazione

$$\frac{\partial U_3}{\partial x^3} = F_3 - \frac{\partial U_1}{\partial x^3} - \frac{\partial U_2}{\partial x^3},$$

e K_3 è una funzione differenziabile costante rispetto alla coordinata x^3.

Possiamo scegliere U_3 costante rispetto alle coordinate x^1 *ed* x^2 perché

$$\frac{\partial}{\partial x^1}\left(F_3 - \frac{\partial U_1}{\partial x^3} - \frac{\partial U_2}{\partial x^3}\right) \equiv \frac{\partial F_3}{\partial x^1} - \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^3 \partial x^1} - \frac{\partial^2 U_2}{\partial x^3 \partial x^1} = \frac{\partial F_3}{\partial x^1} - \frac{\partial F_1}{\partial x^3} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x^2}\left(F_3 - \frac{\partial U_1}{\partial x^3} - \frac{\partial U_2}{\partial x^3}\right) \equiv \frac{\partial F_3}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x^2}\left(\frac{\partial U_1}{\partial x^3} + \frac{\partial U_2}{\partial x^3}\right) = \frac{\partial F_3}{\partial x^2} - \frac{\partial F_2}{\partial x^3} = 0.$$

Pertanto, ogni soluzione globale di (3′) può essere scritta nella forma

$$K_2 = K_{23} + K_3$$

dove K_2, K_{23} e K_3 sono costanti rispetto alle coordinate x^1 ed x^2.

Dunque, abbiamo dimostrato che ogni soluzione del sistema (1), (2) e (3) può essere scritta nella forma

$$U = U_1 + U_2 + U_3 + K_3,$$

dove U_1, U_2, U_3 e K_3 sono funzioni del tipo descritto precedentemente. ❑

Osserviamo che il metodo precedente di integrazione non è sostanzialmente differente dal calcolo del potenziale mediante il lavoro lungo cammini. Infatti, per trovare le tre primitive del metodo precedente, abbiamo calcolato, in pratica, il lavoro della forza lungo cammini corrispondenti alle curve coordinate del sistema di coordinate scelto.

ESEMPIO. Sia

$$F = X\, DX + Y\, DY + Z\, DZ.$$

Allora, integrando l'equazione

(1) $$X = \frac{\partial U}{\partial X}$$

troviamo la soluzione

$$U = U_1 + K_1 = \frac{1}{2} X^2 + K_1;$$

quindi otteniamo l'equazione

(2') $$Y = \frac{\partial K_1}{\partial Y}$$

e la soluzione

$$K_1 = \frac{1}{2} Y^2 + K_2;$$

quindi otteniamo l'equazione

(3') $$Z = \frac{\partial K_2}{\partial Z}$$

e la soluzione

$$K_2 = \frac{1}{2} Z^2 + K_3.$$

Dunque, ogni soluzione del sistema è del tipo

$$U = \frac{1}{2} (X^2 + Y^2 + Z^2) + K_3 \qquad K_3 \in \mathbb{R}. \square$$

ESEMPIO. Sia

$$F = Y\, DX + X\, DY + Z\, DZ.$$

Allora, integrando l'equazione

(1) $$Y = \frac{\partial U}{\partial X}$$

troviamo la soluzione

$$U = U_1 + K_1 = XY + K_1;$$

quindi otteniamo l'equazione

(2')
$$0 = \frac{\partial K_1}{\partial Y}$$

e troviamo la soluzione

$$K_1 = 0 + K_2;$$

quindi otteniamo l'equazione

(3')
$$Z = \frac{\partial K_2}{\partial Z}$$

e troviamo la soluzione

$$K_2 = \frac{1}{2} Z^2 + K_3.$$

Dunque, ogni soluzione del sistema è del tipo

$$U = XY + \frac{1}{2} Z^2 + K_3 \qquad K_3 \in \mathbb{R}. \square$$

6. Alcune osservazioni sulla terminologia e notazione classica

Nei libri classici si trovano alcune osservazioni del tipo: "il lavoro infinitesimo $đL$ non è in generale un differenziale". Queste osservazioni, a mio giudizio, non sono né chiare, né rilevanti. Esse derivano essenzialmente da un approccio classico, non sufficientemente preciso, al concetto di differenziale e dall'uso di notazioni non sufficientemente esplicite. Definizioni e notazioni più rigorose permettono di evitare questi problemi. E' però necessario confrontare la nostra terminologia con quella classica, che è ancora usata in molti testi.

Consideriamo l'espressione

(∗)
$$\alpha = F_i \, Dx^i.$$

a) Per noi, α non è altro che l'espressione in coordinate della forza F in forma covariante

$$F = F_i \, Dx^i.$$

Secondo la nostra notazione, Dx^i è la derivata della funzione coordinata x^i nel nostro senso, ossia, in breve, è l'operatore lineare che associa ad ogni vettore $h \in \bar{\boldsymbol{P}}$ il corrispondente incremento della coordinata x^i approssimata al prim'ordine. I Dx^i non sono infinitesimi, ma infinitesimo è l'errore $Dx^i(h)$ che si commette nell'approssimare la funzione coordinata x^i al prim'ordine rispetto all'incremento h della posizione. Inoltre, i Dx^i non dipendono dalla scelta di un moto o cammino e servono qui come base per decomporre la forza in componenti.

b) Per la terminologia classica, i Dx^i (o dx^i) sono degli incrementi infinitesimi delle coordinate, che caratterizzano una traslazione infinitesima della posizione. Perché abbia senso parlare di tali incrementi "infinitesimi", è indispensabile riferirsi non ad uno spostamento fisso (che per quanto piccolo sia stato scelto, non sarà mai infinitesimo), ma ad una famiglia di spostamenti dipendente da un parametro, che tende allo spostamento nullo quando il parametro tende a zero. Dunque, perché abbia senso interpretare i Dx^i come infinitesimi, è indispensabile aver scelto un moto c (od un cammino γ). In tal caso, possiamo intendere

$$Dx^i \simeq Dc^i$$

ed ottenere gli infinitesimi $Dx^i\,\lambda \simeq Dc^i\,\lambda$ rispetto al parametro $\lambda \in \mathbb{R}$, oppure intendere *direttamente i* Dx^i come gli infinitesimi

$$Dx^i \simeq Dc^i\,\lambda$$

rispetto al parametro $\lambda \in \mathbb{R}$. Coerentemente, nella formula $(*)$, le componenti F_i vanno pensate funzione del tempo tramite il moto

$$F_i(t) \simeq F_i\big(t,\, c(t),\, Dc(t)\big).$$

In conclusione, tenuto conto di queste precisazioni, secondo la terminologia classica, α esprime la potenza della forza lungo il moto scelto, oppure il lavoro infinitesimo lungo il moto scelto, relativamente all'incremento di tempo $\lambda \in \mathbb{R}$ (secondo l'interpretazione scelta dei Dx^i). Nel primo caso, α rappresenta il differenziale (vero!) di una funzione del tempo (e non dello spazio!), ossia del lavoro lungo il moto scelto

$$DL = F_i\, Dx^i;$$

nel secondo caso, α rappresenta l'approssimazione al prim'ordine del lavoro infinitesimo, lungo il moto scelto, corrispondentemente all'intervallo di tempo $\lambda \in \mathbb{R}$

$$DL\ \lambda = F_i\, Dx^i.$$

Se, nella corretta interpretazione classica della formula $(*)$ cambiamo moto, lasciando inalterata la sua velocità all'istante considerato, il valore di α non cambia; cambia però il lavoro di cui questa formula rappresenta il differenziale!

Quando i testi classici scrivono

$$đ\mathrm{L} = F_i\, Dx^i$$

e dicono che $đL$ non è, in generale, un differenziale, intendono che esso non è, in generale, il differenziale di una funzione scalare della posizione. Questo fatto è sostanzialmente corretto, ma il modo di esprimerlo non è coerente.

Infatti, se si assume la posizione $p \in \boldsymbol{P}$ come la variabile indipendente di entrambi i membri della formula $(*)$, e quindi non si sottintende alcun moto, allora non ha alcun senso parlare di lavoro; ma ha senso, domandarsi se la forza (in forma covariante)

$$F = F_i\, Dx^i$$

(e non un eventuale lavoro, che non esiste) è il differenziale di una funzione scalare: sappiamo che questo si verifica solo se la forza è conservativa.

Se, invece, si sottintende un moto, e, coerentemente, si pensa il tempo $t \in \boldsymbol{T}$ come la variabile indipendente di entrambi i membri della formula $(*)$, allora abbiamo un vero differenziale di una funzione del tempo, ossia il differenziale del lavoro.

In conclusione, le notazioni classiche del tipo

$$dp \simeq (dx^i) \in \bar{\boldsymbol{P}} \qquad F = F(t) = F(t,p,v) \in \bar{\boldsymbol{P}},$$

intenderebbero definire il differenziale di un punto, come un incremento infinitesimo del medesimo (senza considerare un moto, o un cammino, ausiliario) ed usano la stessa lettera F per indicare sia la forza come applicazione definita sullo spazio delle fasi, sia la forza come applicazione definita sul tempo, ottenuta valutando la prima lungo un moto. Tale notazione, oltre ad essere poco precisa, in taluni casi - come a proposito del lavoro - può confondere. Con le nostre notazioni, questi problemi non sorgono. ❑

2. Massa

Anche per quanto riguarda la massa, si possono fare considerazioni fisiche sperimentali analoghe a quelle già fatte relativamente alla forza.

Ma, per quanto riguarda la nostra trattazione, sarà sufficiente assumere, per ogni particella, una massa data a priori.

DEFINIZIONE. La *massa* di una particella è un numero reale positivo

$$m \in \mathbb{R}^+ .$$ ❑

In questo paragrafo, supponiamo che m sia una massa data.

La massa permette di definire nuove grandezze.

DEFINIZIONE. La *quantità di moto* è l'applicazione

$$Q : \bar{\boldsymbol{P}} \to \bar{\boldsymbol{P}} : v \mapsto Q(v) = m\, v .$$

Sia $c : \boldsymbol{T} \to \boldsymbol{P}$ un moto. Allora, la *quantità di moto relativa al moto* c è l'applicazione

$$Q \circ Dc : \boldsymbol{T} \to \bar{\boldsymbol{P}} : t \mapsto m\, Dc(t),$$

data dalla composizione

$$\boldsymbol{T} \xrightarrow{Dc} \bar{\boldsymbol{P}} \xrightarrow{Q} \bar{\boldsymbol{P}} .$$ ♣

La quantità di moto non dipende dalla posizione (dato che la metrica è definita sui vettori liberi ed è quindi costante rispetto alla posizione). Tuttavia, per esprimere la quantità di moto mediante un sistema di coordinate non cartesiano (che richiede la conoscenza del punto d'applicazione per la rappresentazione dei vettori), conviene pensare la quantità di moto definita su $\boldsymbol{P} \times \bar{\boldsymbol{P}}$

L'espressione in coordinate della quantità di moto è

$$Q = m\, \dot{x}^j\, \delta x_i .$$

L'espressione in coordinate della quantità di moto relativa al moto c è

$$Q \circ dc = m\ Dc^j\ (\delta x_i \circ c).$$

In particolare, in un sistema di coordinate cartesiane possiamo scrivere

$$Q = m\ (\dot{X}^j\ e_X + \dot{Y}\ e_Y + \dot{Z}\ e_Z)$$

$$Q \circ Dc = m\ (Dc^X\ e_X + Dc^Y\ e_Y + Dc^Z\ e_Z).$$

Introduciamo anche la seguente definizione.

Definizione. Se

$$o : \boldsymbol{T} \to \boldsymbol{P}$$

è il moto (eventualmente costante) di un polo, allora il *momento della quantità di moto* rispetto al polo o è l'applicazione

$$K : \boldsymbol{T} \times \boldsymbol{P} \times \bar{\boldsymbol{P}} \to \bar{\boldsymbol{P}} : (t,p,v) \mapsto K(t,p,v) \equiv \big(p - o(t)\big) \times Q(v) = \big(p - o(t)\big) \times m\ v.$$

Sia $c : \boldsymbol{T} \to \boldsymbol{P}$ un moto. Allora, il *momento della quantità di moto relativo al moto* c è l'applicazione

$$K \circ jc : \boldsymbol{T} \to \bar{\boldsymbol{P}} : t \mapsto \big(c(t) - o(t)\big) \times m\ Dc(t),$$

data dalla composizione

$$\boldsymbol{T} \xrightarrow{jc} \boldsymbol{T} \times \boldsymbol{P} \times \bar{\boldsymbol{P}} \xrightarrow{K} \bar{\boldsymbol{P}}.$$ ♣

Definizione. L'*energia cinetica* è la funzione

$$T \equiv m\ G : \bar{\boldsymbol{P}} \to \mathbb{R} : v \mapsto \tfrac{1}{2} m\ v^2 \equiv \tfrac{1}{2} m\ g(v,v).$$

Sia $c : \boldsymbol{T} \to \boldsymbol{P}$ un moto. Allora *l'energia cinetica relativa al moto* c è la funzione

$$T \circ Dc : \boldsymbol{T} \to \mathbb{R} : t \mapsto \tfrac{1}{2} m\ g(Dc(t), Dc(t)),$$

data dalla composizione

$$\boldsymbol{T} \xrightarrow{Dc} \bar{\boldsymbol{P}} \xrightarrow{T} \mathbb{R}.$$ ♣

L'energia cinetica non dipende dalla posizione (dato che la metrica è definita sui vettori liberi ed è quindi costante rispetto alla posizione). Tuttavia, per esprimere l'energia cinetica mediante un sistema di coordinate non cartesiano (che richiede la conoscenza del punto d'applicazione per la rappresentazione dei vettori), conviene pensare l'energia cinetica definita su $\boldsymbol{P}\times\bar{\boldsymbol{P}}$

$$T \equiv m\, G : \boldsymbol{P}\times\bar{\boldsymbol{P}} \to \mathbb{R} : (p,v) \mapsto \tfrac{1}{2}\, m\, g(v,v).$$

L'espressione in coordinate dell'energia cinetica è

$$(*) \qquad T = \tfrac{1}{2}\, m\, g_{ij}\, \dot{x}^i\, \dot{x}^j.$$

L'espressione in coordinate dell'energia cinetica relativa al moto c è

$$T\circ dc = \tfrac{1}{2}\, m\, (g_{ij}\circ c)\, Dc^i\, Dc^j.$$

ESEMPIO. L'espressione dell'energia cinetica in un sistema di coordinate cartesiane è

$$T = \tfrac{1}{2}\, m\, (\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2). \qquad \square$$

In pratica, per calcolare l'espressione dell'energia cinetica in un sistema di coordinate curvilineo (x^1,x^2,x^3), si può procedere come segue:

1) se conosciamo la matrice della metrica, applichiamo direttamente la formula $(*)$;

2) se conosciamo l'espressione delle coordinate cartesiane $(\varkappa^1,\varkappa^2,\varkappa^3)$ in funzione delle coordinate x^1, x^2, x^3, allora utiliziamo la formula

$$T = \tfrac{1}{2}\, m\, \delta_{ij}\, \frac{\partial \varkappa^i}{\partial x^h}\, \frac{\partial \varkappa^j}{\partial x^k}\, \dot{x}^h\, \dot{x}^k;$$

infatti, abbiamo

$$T = \tfrac{1}{2}\, m\, \delta_{ij}\, \dot{\varkappa}^i\, \dot{\varkappa}^j = \tfrac{1}{2}\, m\, \delta_{ij}\, \frac{\partial \varkappa^i}{\partial x^h}\, \frac{\partial \varkappa^j}{\partial x^k}\, \dot{x}^h\, \dot{x}^k.$$

ESEMPIO. L'espressione dell'energia cinetica nei seguenti sistemi di coordinate notevoli è:

– coordinate cilindriche

$$T = \frac{1}{2} m \, (\dot{\varrho}^2 + \varrho^2 \, \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2);$$

– coordinate sferiche

$$T = \frac{1}{2} m \, (\dot{r}^2 + r^2 \, \dot{\vartheta}^2 + r^2 \, \mathrm{sen}^2\vartheta \, \dot{\varphi}^2). \qquad \square$$

3. Legge di moto

L'equazione di Newton è il nodo centrale della dinamica, in quanto esprime la relazione tra causa (la forza) ed effetto (il moto). Occorre tuttavia rilevare che l'equazione di moto da sola non determina il moto; questo sarà completamente determinato quando siano fissati anche i dati iniziali.

In fisica, l'equazione di moto è vista come una legge imposta dalla natura al moto della particella in considerazione. Nel nostro modello matematico formale, essa compare in una definizione che seleziona certi moti tra tutti i moti possibili. Naturalmente, quando si interpreta fisicamente il modello matematico si ritrova il punto di vista della fisica.

1. Legge di Newton

Siano

$$F : \boldsymbol{T} \times \boldsymbol{P} \times \bar{\boldsymbol{P}} \to \bar{\boldsymbol{P}}^*$$

ed

$$m \in \mathbb{R}^+$$

una forza ed una massa date.

DEFINIZIONE. *Legge di moto di Newton.*

Sia $c : \boldsymbol{T} \to \boldsymbol{P}$ un moto. Si dice che il moto c *obbedisce* alla *legge di moto* di Newton (o è soggetto alla forza F) se soddisfa l'equazione

$$m \, D^2 c = \bar{F} \circ jc,$$

ossia

$$m \, D^2 c(t) = \bar{F}\big(t, \, c(t), \, Dc(t)\big), \qquad \forall t \in \boldsymbol{T}. \clubsuit$$

É utile esprimere la legge di moto in forma covariante.

OSSERVAZIONE. L'espressione della legge di moto di Newton in forma covariante è

$$m\ g^{\flat}(D^2 c) = F \circ jc. \qquad \square$$

PROPOSIZIONE. L'espressione in coordinate della legge di moto di Newton in forma controvariante è

$$(N) \qquad m\ \big(D^2 c^i + (\Gamma^i{}_{hk} \circ c)\ Dc^h\ Dc^k\big) = F^i \circ jc.$$

L'espressione in coordinate della legge di moto di Newton in forma covariante è

$$(L) \qquad D\Big(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^i} \circ dc\Big) - \frac{\partial T}{\partial x^i} \circ dc = F_i \circ jc.$$

DIMOSTRAZIONE. L'espressione controvariante segue immediatamente dall'espressione controvariante dell'accelerazione (vedi).

L'espressione covariante segue immediatamente dall'espressione covariante dell'accelerazione mediante le formule di Lagrange (vedi). A tale scopo, osserviamo che sostituendo nelle formule di Lagrange l'energia cinetica $T \equiv mG$ alla funzione metrica G, si ottiene il prodotto della massa per l'accelerazione in forma covariante. $\square$

Nel caso in cui la forza F sia conservativa, abbiamo un'ulteriore espressione utile della legge di Newton.

DEFINIZIONE. La forza F sia conservativa e sia U il suo potenziale. La *funzione lagrangiana* è la funzione

$$L \equiv T + U : \boldsymbol{P} \times \bar{\boldsymbol{P}} \to \mathbb{R} : (p,v) \mapsto \tfrac{1}{2} m\ g(v,v) + U(p). \qquad \clubsuit$$

COROLLARIO. *Equazioni di Lagrange.*

Se la forza è conservativa, allora l'espressione in coordinate della legge di moto di Newton in forma covariante è

$$D\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \circ dc\Big) - \frac{\partial L}{\partial x^i} \circ dc = 0.$$

DIMOSTRAZIONE. Segue immediatamente dalla formula (L). Infatti, dato che il potenziale dipende solo dalla posizione, abbiamo

$$\frac{\partial U}{\partial \dot{x}^i} = 0$$

e, quindi,

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \equiv \frac{\partial T}{\partial \dot{x}^i} + \frac{\partial U}{\partial \dot{x}^i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}^i} .$$

Inoltre, dato che la forza è conservativa, abbiamo

$$\frac{\partial U}{\partial x^i} = F_i .$$

❑

2. Formulazione variazionale della legge di moto

Possiamo introdurre un'altra formulazione interessante della legge di moto, basata su un principio variazionale *[facoltativo]* .

In questa formulazione intervengono applicazioni differenziabili del tempo dipendenti da un parametro, del tipo

$$f : \mathbb{R} \times \boldsymbol{A} \to \bar{\boldsymbol{B}} : (s,a) \mapsto f(s,a);$$

pertanto risulterà utile introdurre il seguente simbolo di *derivata variazionale*

$$\delta f : \boldsymbol{A} \to \bar{\boldsymbol{B}} : a \mapsto D_1 f(0,a) \equiv D(f_a)(0),$$

ossia con notazioni classiche

$$\delta f \equiv \left(\frac{\partial f}{\partial s} \right)_{|s=0},$$

che rappresenta la derivata parziale rispetto al parametro, calcolata corrispondentemente al valore 0 del parametro stesso. Osserviamo che questo simbolo è gia stato usato per indicare il vettore tangente alle curve coordinate (infatti si tratta essenzialmente della stessa situazione).

Incominciamo dunque con la definizione di variazione di un moto.

DEFINIZIONE. Sia $c : \boldsymbol{T} \to \boldsymbol{P}$ un moto e sia

$$\boldsymbol{I} \equiv [t_1, t_2] \subset \boldsymbol{T}$$

un intervallo di tempo.

Un *moto variato* di c è un'applicazione del tipo

$$c^{\nu} : \mathbb{R}\times\boldsymbol{I} \to \boldsymbol{P} : (s,t) \mapsto c(t) + s\ \nu(t),$$

dove

$$\nu : \boldsymbol{I} \equiv [t_1, t_2] \to \bar{\boldsymbol{P}}$$

è un campo vettoriale di classe C^{∞}, detto la *variazione del moto*, che si annulla negli estremi dell'intervallo $[t_1, t_2]$

$$\nu(t_1) = 0 = \nu(t_2). \qquad ♣$$

Dunque, un moto variato è un "pennello" di moti dipendenti da un parametro $s\in\mathbb{R}$, che coincidono, per ogni valore del parametro, con il moto dato negli estremi dell'intervallo e coincidono, per il valore zero del parametro, con il moto dato in tutti gli istanti dell'intervallo.

LEMMA. Sia c^{ν} un moto variato. La derivata variazionale del moto variato c^{ν} risulta uguale alla variazione

$$\delta c^{\nu} = \nu : \boldsymbol{I} \to \bar{\boldsymbol{P}},$$

ossia, con notazioni classiche,

$$\delta c^{\nu} \equiv \Big(\frac{\partial c^{\nu}}{\partial s} \Big)_{|s=0} = \nu.$$

DIMOSTRAZIONE. Segue immediatamente dalla definizione di moto variato. ❑

Ogni variazione ν del moto c induce una *variazione* di ogni altra applicazione ottenuta per composizione da c e dalle sue derivate.

Innanzitutto, otteniamo la variazione della velocità, definita come la velocità del moto variato

$$v^{\nu} \equiv D_2 c^{\nu} : \mathbb{R}\times\boldsymbol{I} \to \bar{\boldsymbol{P}} : (s,t) \mapsto D(c_s)(t),$$

ossia, con notazioni classiche,

$$v^{\vee} \equiv \frac{\partial c^{\vee}}{\partial t} \,.$$

LEMMA. Sia $c^{\vee}$ un moto variato. La velocità del moto variato gode della seguente proprietà

$$\delta v^{\vee} = D\nu \equiv D\delta c^{\vee},$$

ossia, con notazioni classiche,

$$\Big(\frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial c^{\vee}}{\partial t} \Big)_{|s=0} \equiv \Big(\frac{\partial v^{\vee}}{\partial s} \Big)_{|s=0} \equiv \delta v^{\vee} = \frac{d\nu}{dt} \equiv \frac{d}{dt} \Big(\frac{\partial c^{\vee}}{\partial s} \Big)_{|s=0} \,.$$

DIMOSTRAZIONE. Segue immediatamente dalla simmetria delle derivate seconde. ❑

Sia $m \in \mathbb{R}^+$ una massa. Siano $F : \boldsymbol{P} \to \bar{\boldsymbol{P}}^*$ una forza conservativa ed $U : \boldsymbol{P} \to \mathbb{R}$ il suo potenziale.

Se $c : \boldsymbol{T} \to \boldsymbol{P}$ è un moto, indichiamo con

$$\mathcal{L} \equiv L \circ dc : \boldsymbol{T} \to \mathbb{R} : t \mapsto L(t, c(t), Dc(t))$$

la lagrangiana lungo il moto.

Sia $c^{\vee}$ un moto variato. Allora, otteniamo la variazione della lagrangiana

$$L \circ d_2 c^{\vee} : \mathbb{R} \times \boldsymbol{I} \to \mathbb{R} : (s,t) \mapsto \tfrac{1}{2} m \; g\,(D_2 c^{\vee}(s,t),\, D_2 c^{\vee}(s,t)) + U(c^{\vee}(s,t)).$$

Indichiamo inoltre con

$$\mathcal{I}^{\vee} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : s \mapsto \mathcal{I}^{\vee}(s) \equiv \int_{\boldsymbol{I}} (L \circ d_2 c^{\vee})_s \, dx^0$$

la funzione del parametro ottenuta integrando rispetto al tempo la lagrangiana lungo il moto variato.

Otteniamo allora il seguente risultato, che permette di riformulare la legge di moto in modo variazionale.

TEOREMA. *Formulazione variazionale della legge di moto.*

Siano date una massa m, una forza conservativa F ed un intervallo di tempo $\boldsymbol{I}$. Sia $c : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{P}$ un moto.

Allora le tre condizioni seguenti sono equivalenti.

1) Il moto c soddisfa la legge di Newton

$$m\ D^2 c = \bar{F} \circ c.$$

2) Il moto soddisfa le equazioni di Lagrange

$$D\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \circ dc\Big) - \frac{\partial L}{\partial x^i} = 0.$$

3) Il moto soddisfa la condizione

$$\delta \mathcal{I}^{\nu} = 0,$$

per ogni variazione ν.

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo un moto c ed una sua variazione ν e calcoliamo esplicitamente $\mathcal{I}^{\nu}$. Ricordando la regola di derivazione rispetto ad un parametro sotto segno di integrale e la regola della catena per le derivate e tenendo conto dei due lemmi, otteniamo

$$\delta \mathcal{I}^{\nu} = \int_I (m\ Dc \cdot \delta v^{\nu} + \bar{F} \circ c \cdot \nu)\ dx^0 = \int_I (m\ Dc \cdot D\nu + \bar{F} \circ c \cdot \nu)\ dx^0;$$

da cui, integrando per parti, otteniamo

$$\delta \mathcal{I}^{\nu} = \int_I (-\ m\ D^2 c + \bar{F} \circ c) \cdot \nu\ dx^0 + [m\ g(Dc, \nu)]_{t_1}^{t_2}$$

ed, infine, per l'annullarsi della variazione negli estremi dell'intervallo,

$$(*) \qquad \delta \mathcal{I}^{\nu} = \int_I (-\ m\ D^2 c + \bar{F} \circ c) \cdot \nu\ dx^0.$$

Ripetiamo il calcolo precedente usando l'espressione in coordinate delle derivate. Ricordando la regola di derivazione rispetto ad un parametro sotto segno di integrale e la regola della catena per le derivate e tenendo conto dei due lemmi, otteniamo

$$\delta \mathcal{I}^{\nu} =$$

$$= \int_I \Big(\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \circ dc\Big)\ \delta v^{\nu i} + \Big(\frac{\partial L}{\partial x^i} \circ dc\Big)\ \delta c^{\nu i} \Big)\ dx^0 = \int_I \Big(\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \circ dc\Big)\ D\nu^i + \Big(\frac{\partial L}{\partial x^i} \circ dc\Big)\ \nu^i \Big)\ dx^0;$$

da cui, integrando per parti, otteniamo

$$\delta\mathcal{I}^{\nu} = \int_I \big(- D(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \circ dc) + (\frac{\partial L}{\partial x^i} \circ dc)\big)\, \nu^i \, dx^0 + [(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \circ dc)\, \nu^i]_{t_1}^{t_2}$$

ed, infine, per l'annullarsi della variazione negli estremi dell'intervallo,

$$(**) \qquad \delta\mathcal{I}^{\nu} = \int_I \big(- D(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \circ dc) + (\frac{\partial L}{\partial x^i} \circ dc)\big)\, \nu^i \, dx^0 .$$

Dimostriamo ora l'equivalenza delle tre condizioni.

1) $\Rightarrow$ 3). Se il moto c soddisfa l'equazione di Newton, allora la formula (∗) implica $\delta\mathcal{I}^{\nu} = 0$, per ogni variazione ν.

2) $\Rightarrow$ 3). Se il moto c soddisfa l'equazione di Lagrange, allora la formula (∗∗) implica $\delta\mathcal{I}^{\nu} = 0$, per ogni variazione ν.

3) $\Rightarrow$ 1). Se $\delta\mathcal{I}^{\nu} = 0$ per *ogni* variazione ν, allora, tenendo conto di una proprietà di annullamento degli integrali, la formula (∗) implica

$$- m\, D^2 c + \bar{F} \circ c = 0 .$$

3) $\Rightarrow$ 2). Se $\delta\mathcal{I}^{\nu} = 0$ per *ogni* variazione ν, allora, tenendo conto di una proprietà di annullamento degli integrali, la formula (∗∗) implica

$$- D(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \circ dc) + (\frac{\partial L}{\partial x^i} \circ dc) = 0 . \qquad \square$$

Noi avevamo già dimostrato per altra via (tramite l'espressione covariante dell'accelerazione) l'equivalenza delle equazioni di Newton e di Lagrange nel caso di forze conservative. Quindi la precedente è una dimostrazione indipendente ed interessante, perché mostra come le equazioni di Lagrange siano direttamente collegate con un principio variazionale.

Può essere utile un'ulteriore delucidazione del principio variazionale.

Supponiamo di avere assegnato la massa e la forza. Scegliamo un intervallo di tempo. Fissiamo l'attenzione su un certo moto c in tale intervallo di tempo, variamolo con una deformazione dipendente da un parametro la quale si annulla agli estremi dell'intervallo. Calcoliamo l'integrale della lagrangiana per la famiglia dei moti variati e sviluppiamolo fino al prim'ordine rispetto al parametro nell'intorno del valore zero del parametro (cioè nell'intorno del moto c)

$$\mathcal{I}^{\nu}(s) = \mathcal{I}^{\nu}(0) + \frac{\partial \mathcal{I}^{\nu}}{\partial s}(0)\, s + o(s) .$$

In generale succederà che, per una qualche variazione del moto c, la derivata parziale non si annulla

$$\frac{\partial \mathcal{I}^{\nu}}{\partial s}(0) \neq 0,$$

ossia, nell'intorno del moto c, per una qualche variazione del moto c, c'è un differenza del prim'ordine tra l'integrale della lagrangiana per il moto variato e l'integrale della lagrangiana per il moto c.

Solamente nel caso particolare in cui il moto c soddisfi la legge di moto, questo integrale non varia al prim'ordine, nell'intorno del moto c, qualunque sia la variazione considerata del moto c. In altre parole, i moti che soddisfano la legge di moto sono caratterizzati dalla proprietà di rendere stazionario (al prim'ordine) l'integrale della lagrangiana rispetto ad una qualunque loro variazione. Spesso, questa stazionarietà corrisponde ad un minimo relativo.

3. Il problema fondamentale della dinamica

Supponiamo la forza e la massa date. Allora, la legge di moto di Newton

$$D^2 c = \frac{1}{m} \bar{F} \circ jc$$

può essere vista come un'equazione differenziale del second'ordine alle derivate ordinarie nell'incognita moto

$$c : \boldsymbol{T} \to \boldsymbol{P}.$$

Osserviamo che l'equazione di Newton è "normale" (o "normalizzabile"), cioè le derivate di ordine massimo (2° ordine) dell'incognita sono esplicitate (o esplicitabili) come funzione nota delle derivate di ordine inferiore dell'incognita, dell'incognita stessa e della variabile indipendente. Questo fatto gioca un ruolo tecnico essenziale nei risultati d'Analisi che usiamo qui di seguito.

Il problema fondamentale della dinamica è la ricerca dei moti che obbediscono alla legge di moto corrispondente ad una forza data.

Uno dei fatti più importanti della meccanica Newtoniana è che la legge di moto non determina il moto stesso; infatti esistono infinite soluzioni della legge di Newton! Per determinare il moto cercato, occorre fissare anche i dati iniziali.

Per ogni scelta dei dati iniziali esiste localmente uno ed un solo moto corrispondente a tali dati che soddisfa l'equazione di Newton. Più precisamente, si può dimostrare il seguente risultato, che enunciamo senza dimostrazione.

Teorema. *Teorema di esistenza ed unicità di Cauchy.*
Sia $m \in \mathbb{R}^+$ una massa. Sia

$$F : J\boldsymbol{P} \equiv \boldsymbol{T}\times\boldsymbol{P}\times\bar{\boldsymbol{P}} \to \bar{\boldsymbol{P}}^*$$

una forza differenziabile[5] definita su un aperto $\boldsymbol{V}$ dello spazio delle fasi.
Sia

$$(t_0, p_0, v_0) \in J\boldsymbol{P} \equiv \boldsymbol{T}\times\boldsymbol{P}\times\bar{\boldsymbol{P}}$$

un elemento dello spazio delle fasi, che chiameremo insieme di *dati iniziali*.
Allora, *esiste* un moto

$$c : \boldsymbol{I}\to\boldsymbol{P}$$

definito in un intorno $\boldsymbol{I}\subset\boldsymbol{T}$ dell'istante iniziale t_0, che soddisfa l'equazione di Newton

$$D^2c = \frac{1}{m}\bar{F}\circ jc$$

ed i *dati iniziali*

$$c(t_0) = p_0 \qquad Dc(t_0) = v_0.$$

Inoltre, tale moto è *unico* localmente, ossia, se anche

$$c' : \boldsymbol{I}'\to\boldsymbol{P}$$

è un moto definito in un intorno $\boldsymbol{I}'\subset\boldsymbol{T}$ dell'istante iniziale t_0, che soddisfa l'equazione di Newton ed i dati iniziali, allora i due moti coincidono nell'intervallo di tempo in cui sono definiti entrambi

$$c(t) = c'(t) \qquad\qquad \forall t \in \boldsymbol{I}\cap\boldsymbol{I}'.\square$$

Questo teorema può essere esteso senza difficoltà al caso (per altro frequente nella pratica) in cui la forza non sia definita su tutto lo spazio delle fasi, ma solo su un suo sottinsieme aperto.

Si noti il ruolo differente che giocano l'istante iniziale, da una parte, e la

[5] E' sufficiente che sia Lipschitziana.

posizione e la velocità iniziale, dall'altra, nei dati iniziali. Spostando l'istante iniziale di un intervallo di tempo sufficientemente piccolo e cambiando la posizione e la velocità iniziale in modo adeguato, la soluzione locale del problema del moto non cambia. Più precisamente abbiamo il seguente risultato.

OSSERVAZIONE. Siano (t_0, p_0, v_0) dei dati iniziali e sia $c : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{P}$ un moto che soddisfa l'equazione di Newton ed i dati iniziali. Sia

$$t_0' \in \boldsymbol{T}$$

un altro istante e sia

$$p_0' \equiv c(t_0') \qquad v_0' \equiv Dc(t_0').$$

Sia

$$c' : \boldsymbol{I}' \to \boldsymbol{P}$$

il moto (definito localmente) che soddisfa la legge di Newton ed i nuovi dati iniziali. Se t_0' è sufficientemente vicino a t_0, allora $t_0 \in \boldsymbol{I}'$ e quindi c' è definito in un intorno dell'istante t_0. Ma, allora, per l'unicità locale di c, c' coincide con c nell'intorno $\boldsymbol{I} \cap \boldsymbol{I}'$ di t_0.

Dunque, possiamo dire che localmente (nell'intorno di un istante iniziale) c'è una corrispondenza biunivoca tra le soluzioni del problema del moto e l'insieme delle posizioni e velocità iniziali. Pertanto, le soluzioni del problema del moto sono localmente ∞^6. ❑

Osserviamo che il teorema di esistenza ed unicità è fondamentale, perché assicura la corretta impostazione del problema del moto e la sua solubilità. Però, il teorema non è operativo, nel senso che non dice cosa occorre fare per trovare effettivamente la soluzione. In effetti, non esiste un metodo generale per risolvere l'equazione di Newton.

Innanzitutto conviene precisare l'idea di risolvere "esplicitamente" l'equazione di Newton.

Potremmo dire che risolvere esplicitamente l'equazione di Newton significa trovare soluzioni la cui espressione in coordinate è esprimibile mediante una composizione finita di funzioni elementari che assumiamo come note, quali, ad esempio, le funzioni algebriche, le funzioni trigonometriche, il logaritmo e l'esponenziale. Spesso, siamo poi interessati a trovare non solo alcune soluzioni particolari, ma tutte le soluzioni corrispondenti a tutte le possibili scelte dei dati iniziali. Potremmo dire che sappiamo risolvere esplicitamente questo problema quando sappiamo trovare la soluzione nel senso precedente dipendente in modo parametrico dai dati iniziali. Per esempio, in taluni casi notevoli (vedi) la soluzione dell'equazione di Newton può essere riportata alla soluzione di un'equazione differenziale scalare del second'ordine a coefficienti costanti ed allora l'Analisi insegna ad esprimere le soluzioni mediante funzioni elementari.

Qualora non si conoscano metodi per trovare soluzioni esplicite dell'equazione di Newton, si può ricorrere a metodi di approssimazione e cercare soluzioni numeriche rientranti entro un limite di approssimazione prefissato. A tale scopo dopo una formulazione analitica del metodo di approssimazione, può essere di valido aiuto un calcolatore.

Però, non è affatto detto che interessi sempre trovare la soluzione esplicita o approssimata del problema del moto. Molto spesso, quello che interessa di più è conoscere proprietà qualitative delle soluzioni (quali l'eventuale periodicità o non periodicità, l'eventuale confinamento in una regione finita dello spazio o, viceversa l'eventuale illimitatezza, eccetera) ed eventuali proprietà quantitative di controllo delle soluzioni (quali il fatto che la soluzione passi per un certo punto ad un qualche istante, che arrivi ad una certa distanza massima, eccetera).

4. Teorema dell'energia cinetica ed equazioni cardinali

Studiamo alcune prime conseguenze importanti delle equazioni di Newton.

L'argomento che trattiamo qui potrà anche servire come introduzione al teorema di conservazione dell'energia totale nel caso di forze conservative ed alla conservazione del momento della quantità di moto, che tratteremo nel paragrafo successivo.

Siano $m \in \mathbb{R}$ una massa ed $F : \boldsymbol{T} \times \boldsymbol{P} \times \bar{\boldsymbol{P}} \to \bar{\boldsymbol{P}}^*$ una forza differenziabile date e sia $c : \boldsymbol{T} \to \boldsymbol{P}$ un moto soluzione dell'equazione di Newton associata.

PROPOSIZIONE. *Teorema dell'energia cinetica.*
Abbiamo

$$(^\circ) \qquad D(T \circ Dc) = W \circ jc .$$

DIMOSTRAZIONE. Dall'equazione di Newton segue

$$D(T \circ Dc) \equiv D\big(\tfrac{1}{2} m\ (Dc)^2\big) = m\ D^2 c \cdot Dc = F \circ jc \cdot Dc \equiv W \circ jc. \qquad \square$$

COROLLARIO. Siano t_1, $t_2 \in \boldsymbol{T}$ e sia $L(t_1, t_2)$ il lavoro della forza F lungo il moto c tra i due istanti. Allora, abbiamo

$$(T \circ Dc)(t_2) - (T \circ Dc)(t_1) \equiv \tfrac{1}{2} m\ \big(Dc(t_2)\big)^2 - \tfrac{1}{2} m\ \big(Dc(t_2)\big)^2 = L(t_1, t_2).$$

DIMOSTRAZIONE. Segue immediatamente dal precedente teorema, integrando rispetto al tempo entrambi i membri della (°). $\square$

PROPOSIZIONE. *Prima equazione cardinale.*
Abbiamo

$$D(Q \circ Dc) \equiv D(m\ Dc) = \bar{F} \circ jc. \tag{1}$$

DIMOSTRAZIONE. Dall'equazione di Newton segue

$$D(m\ Dc) = m\ D^2 c = \bar{F} \circ jc. \qquad \square$$

Ovviamente, la prima equazione cardinale è equivalente all'equazione di Newton.

PROPOSIZIONE. *Seconda equazione cardinale.*
Consideriamo un polo $o \in \boldsymbol{P}$. Abbiamo

$$D(K \circ dc) \equiv D\big((c - o) \times m\ Dc\big) = (c - o) \times \bar{F} \circ jc \equiv M \circ jc, \tag{2}$$

dove M è il *momento della forza*

$$M : \boldsymbol{T} \times \boldsymbol{P} \times \bar{\boldsymbol{P}} \to \bar{\boldsymbol{P}} : (t, p, v) \mapsto (p - o) \times \bar{F}(t, p, v).$$

DIMOSTRAZIONE. Dall'equazione di Newton segue

$$D\big((c - o) \times m\ Dc\big) = \big((c - o) \times m\ D^2 c\big) = (c - o) \times \bar{F} \circ jc. \qquad \square$$

5. Leggi di conservazione

Lo studio delle leggi di conservazione relative alla legge di Newton è molto importante perché può facilitare la ricerca sia delle soluzioni esplicite, che delle proprietà qualitative delle soluzioni.

Siano $m \in \mathbb{R}$ una massa ed $F : \boldsymbol{T} \times \boldsymbol{P} \times \bar{\boldsymbol{P}} \to \bar{\boldsymbol{P}}^*$ una forza differenziabile date.

Integrali primi.

Incominciamo con la seguente definizione generale.

DEFINIZIONE. Un *integrale primo* dell'equazione di Newton è un'applicazione definita sullo spazio delle fasi

$$\Phi : \boldsymbol{T} \times \boldsymbol{P} \times \bar{\boldsymbol{P}} \to \boldsymbol{W}$$

a valori in uno spazio vettoriale $\boldsymbol{W}$, la quale soddisfa la seguente proprietà:

per ciascuno degli infiniti moti $c : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{P}$ soluzione dell'equazione di Newton, l'applicazione

$$\Phi \circ jc : \boldsymbol{T} \to \boldsymbol{W} : t \mapsto \Phi(t, c(t), Dc(t))$$

è costante (rispetto al tempo), ossia

$$D(\Phi \circ jc) = 0. \qquad ♣$$

Noi saremo interessati ai casi in cui $\boldsymbol{W}$ è lo spazio vettoriale $\boldsymbol{W} \equiv \mathbb{R}$, oppure $\boldsymbol{W} \equiv \bar{\boldsymbol{P}}$.

OSSERVAZIONE. Se $\Phi : \boldsymbol{T} \times \boldsymbol{P} \times \bar{\boldsymbol{P}} \to \bar{\boldsymbol{P}}$ è un integrale primo (vettoriale), allora la funzione

$$\|\Phi\| : \boldsymbol{T} \times \boldsymbol{P} \times \bar{\boldsymbol{P}} \to \mathbb{R}$$

è un integrale primo (scalare). ❑

Attenzione: affinché un'applicazione Φ sia un integrale primo, non basta verificare che essa sia costante lungo un qualche moto soluzione dell'equazione di Newton, ma occorre verificare che essa sia costante lungo ciascuno di questi infiniti (∞^6) moti! Naturalmente, se Φ è un integrale primo, il suo valore costante può cambiare quando si cambia il moto soluzione lungo il quale essa viene valutata.

Fortunatamente, per verificare se un'applicazione Φ sia un integrale primo non è necessario trovare esplicitamente le soluzioni dell'equazione di Newton. Infatti, vale il seguente risultato.

PROPOSIZIONE. Sia $\boldsymbol{W}$ uno spazio vettoriale e $\Phi : \boldsymbol{T}\times\boldsymbol{P}\times\bar{\boldsymbol{P}}\to\boldsymbol{W}$ un'applicazione differenziabile. Allora le due condizioni seguenti sono equivalenti.

1) L'applicazione Φ è un integrale primo.

2) L'applicazione Φ soddisfa l'equazione

$$(*)\qquad D_1\Phi(t,p,v) + \langle D_2\Phi(t,p,v),\, v\rangle + \langle D_3\Phi(t,p,v),\, \frac{1}{m}\bar{F}(t,p,v)\rangle = 0,$$

$$\forall (t,p,v)\in \boldsymbol{T}\times\boldsymbol{P}\times\bar{\boldsymbol{P}},$$

ossia, in coordinate,

$$(*')\qquad \frac{\partial\Phi}{\partial x^0} + \frac{\partial\Phi}{\partial x^i}\dot{x}^i + \frac{\partial\Phi}{\partial \dot{x}^i}\,(\frac{F^i}{m} - \Gamma^i{}_{hk}\,\dot{x}^h\,\dot{x}^k) = 0.$$

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo un elemento qualunque (t_0,p_0,v_0) dello spazio delle fasi. Sia $c : \boldsymbol{T}\to\boldsymbol{P}$ il moto soluzione del problema del moto corrispondente ai dati iniziali scelti e si consideri l'applicazione

$$\Phi\circ jc : t\mapsto \Phi(t,\, c(t),\, Dc(t)).$$

Calcolando la sua derivata (rispetto al tempo), mediante le regole di derivazione di un'applicazione di più variabili, otteniamo

$$D(\Phi\circ jc)(t) = D_1\Phi(t,c(t),Dc(t)) +$$

$$+ \langle D_2\Phi(t,c(t),Dc(t)),\, Dc(t)\rangle + \langle D_3\Phi(t,c(t),Dc(t)),\, D^2c(t)\rangle$$

e, dato che c soddisfa l'equazione di Newton, segue

$$(**)\qquad D(\Phi\circ jc)(t) = D_1\Phi(t,c(t),Dc(t)) +$$

$$+ \langle D_2\Phi(t,c(t),Dc(t)),\, Dc(t)\rangle + \langle D_3\Phi(t,c(t),Dc(t)),\, \frac{1}{m}\bar{F}(t,c(t),Dc(t))\rangle.$$

1) $\Rightarrow$ 2). Se Φ un integrale primo, allora

$$D(\Phi\circ jc)(t) = 0 \qquad \forall t\in \boldsymbol{I};$$

pertanto, valutando la formula (∗∗) all'istante t_0, otteniamo

$$D_1\Phi(t_0,p_0,v_0) + \langle D_2\Phi(t_0,p_0,v_0),\, v_0\rangle + \langle D_3\Phi(t_0,p_0,v_0),\, \tfrac{1}{m}\bar{F}(t_0,p_0,v_0)\rangle = 0.$$

Quindi l'equazione (∗) è verificata nell'elemento arbitrario (t_0,p_0,v_0) dello spazio delle fasi.

1) ⇒ 2). Se l'applicazione Φ soddisfa l'equazione (∗), allora, considerando l'elemento dello spazio delle fasi

$$(t,p,v) \equiv (t,c(t),Dc(t)),$$

otteniamo

$$0 = D_1\Phi\big(t,c(t),Dc(t)\big) +$$

$$+ \langle D_2\Phi\big(t,c(t),Dc(t)\big),\, Dc(t)\rangle + \langle D_3\Phi\big(t,c(t),Dc(t)\big),\, D^2c(t)\rangle.$$

Pertanto, la formula (∗∗) implica

$$D(\Phi\circ jc)(t) = 0 \qquad \forall t \in \boldsymbol{I}.\square$$

Osserviamo che la verifica della condizione (∗), ovvero (∗'), comporta solo il calcolo di tre derivate parziali e non richiede la conoscenza esplicita delle soluzioni del problema dinamico.

Il nome "integrale primo" deriva dal seguente fatto.

Supponiamo di conoscere un integrale primo. Allora, possiamo riguardare la formula (∗) come un'equazione differenziale del prim'ordine alle derivate ordinarie nell'incognita moto. Se un moto soddisfa l'equazione di Newton, allora esso soddisfa anche questa equazione; pertanto i moti soluzioni dell'equazione di Newton vanno ricercati tra le soluzioni di questa equazione (il viceversa non è detto che sia vero!). In altre parole, l'equazione (∗) è una condizione necessaria per le soluzioni dell'equazione di Newton. Quindi, l'equazione (∗), pur non essendo sufficiente a determinare le soluzioni dell'equazione di Newton, può aiutare nello scopo, in quanto condizione necessaria. E' interessante il fatto che questa condizione coinvolge solo le derivate prime del moto incognito, mentre l'equazione di Newton coinvolge anche le derivate seconde.

Conservazione dell'energia cinetica

Un interessante integrale primo è quello dell'energia cinetica, nel caso di forze a potenza nulla.

TEOREMA. *Conservazione dell'energia cinetica.*
Sia $F : \boldsymbol{T} \times \boldsymbol{P} \times \bar{\boldsymbol{P}} \to \bar{\boldsymbol{P}}^*$ una forza a potenza nulla. Allora, l'energia cinetica

$$T : \bar{\boldsymbol{P}} \to \mathbb{R}$$

è un integrale primo (scalare) dell'equazione di Newton, ossia, per ogni moto $c : \boldsymbol{T} \to \boldsymbol{P}$ soluzione dell'equazione di Newton, abbiamo

$$D(T \circ Dc) \equiv D(\tfrac{1}{2} m \; Dc^2) = 0.$$

DIMOSTRAZIONE. Dal teorema dell'energia cinetica segue immediatamente, per ogni moto c soggetto alla forza a potenza nulla,

$$D(T \circ Dc) = W \circ dc = 0. \qquad \square$$

OSSERVAZIONE. Il precedente teorema può essere anche dimostrato verificando la condizione $(*)$.
Infatti, abbiamo

$$D_1 T(t,p,v) + \langle D_2 T(t,p,v), \, v \rangle + \langle D_3 T(t,p,v), \; \frac{1}{m} \bar{F}(t,p,v) \rangle =$$

$$= 0 + 0 + \langle m \; g(v), \, \frac{1}{m} \bar{F}(t,p,v) \rangle = 0 + 0 + \langle F(t,p,v), \, v \rangle = 0. \qquad \square$$

ESEMPIO. Il teorema di conservazione dell'energia cinetica vale per la forza di Lorentz

$$\bar{F}(t,p,v) \equiv k \; v \times B(t,p) \qquad \forall (t,p,v) \in \boldsymbol{T} \times \boldsymbol{P} \times \bar{\boldsymbol{P}},$$

dove

$$k \in \mathbb{R} \qquad B(t,p) \in \bar{\boldsymbol{P}}. \qquad \square$$

Osserviamo che la conservazione dell'energia cinetica è equivalente alla conservazione della norma della velocità.

Conservazione dell'energia

Un importante integrale primo è quello dell'energia totale, nel caso di forze conservative.

DEFINIZIONE. Sia $F : \boldsymbol{P} \to \bar{\boldsymbol{P}}^*$ una forza conservativa e sia $U : \boldsymbol{P} \to \mathbb{R}$ il suo potenziale (definito a meno di una costante additiva).

L'*energia potenziale* è la funzione (definita a meno di una costante additiva)

$$V \equiv -U : \boldsymbol{P} \to \mathbb{R}.$$

L'*energia totale* è la funzione (definita a meno di una costante additiva)

$$E \equiv T + V : \boldsymbol{P} \times \bar{\boldsymbol{P}} \to \mathbb{R} : (p,v) \mapsto \frac{1}{2} m\, g(v,v) + V(p).$$

Se $c : \boldsymbol{T} \to \boldsymbol{P}$ è un moto, allora l'*energia totale lungo il moto* è la funzione del tempo

$$E \circ dc : \boldsymbol{T} \to \mathbb{R} : t \mapsto \frac{1}{2} m\, Dc(t) \cdot Dc(t) + V(c(t)).$$ ❑

TEOREMA. *Conservazione dell'energia totale.*

Sia $F : \boldsymbol{P} \to \bar{\boldsymbol{P}}^*$ una forza conservativa e sia $U : \boldsymbol{P} \to \mathbb{R}$ il suo potenziale. Allora, l'energia totale

$$E : \boldsymbol{P} \times \bar{\boldsymbol{P}} \to \mathbb{R}$$

è un integrale primo (scalare) dell'equazione di Newton, ossia, per ogni moto $c : \boldsymbol{T} \to \boldsymbol{P}$ soluzione dell'equazione di Newton, abbiamo

$$D(E \circ dc) \equiv D(\frac{1}{2} m\, Dc^2 + V \circ c) = 0.$$

DIMOSTRAZIONE. Il teorema è un corollario del teorema dell'energia cinetica. Infatti, se la forza è conservativa, allora la potenza lungo un qualunque moto c è data, per la regola della catena, da

$$W \circ dc \equiv \langle F \circ c, Dc \rangle \equiv \langle DU \circ c, Dc \rangle = D(U \circ c).$$

Pertanto, dal teorema dell'energia cinetica segue la seguente formula, per ogni moto c soggetto alla forza conservativa,

$$D(T \circ Dc) = W \circ dc = D(U \circ c),$$

da cui otteniamo

$$0 = D(T \circ Dc) - D(U \circ c) = D\big((T - U) \circ dc\big) \equiv D(E \circ dc).$$ ❑

OSSERVAZIONE. Il precedente teorema può essere anche dimostrato verificando la condizione $(*)$.

Infatti, abbiamo

$$D_1 E(t,p,v) + \langle D_2 E(t,p,v),\, v\rangle + \langle D_3 E(t,p,v),\, \frac{1}{m}\,\bar{F}(t,p,v)\rangle =$$

$$= 0 + \langle DV(p), v\rangle + \langle m\; g(v),\, \frac{1}{m}\,\bar{F}(p)\rangle =$$

$$= 0 + \langle DV(p), v\rangle + \langle F(p),\, v\rangle =$$

$$= 0. \qquad \square$$

A titolo d'esempio, deduciamo due importanti conseguenze geometriche dal teorema di conservazione dell'energia totale.

PROPOSIZIONE. Sia F una forza conservativa centrale e radiale, di centro o, la cui energia potenziale V sia una funzione monotona crescente della distanza r da o. Indichiamo con

$$L \equiv \lim_{r\to\infty} V$$

il limite finito o infinito dell'energia potenziale.

Sia c un moto soluzione dell'equazione di Newton, tale che il relativo valore dell'energia totale (che dipende dai dati iniziali) soddisfi la condizione

$$E_0 < L.$$

Allora, c si svolge all'interno di una sfera di centro o e raggio finito.

DIMOSTRAZIONE. Per la conservazione dell'energia abbiamo

$$\frac{1}{2}\, m\; Dc(t)\cdot Dc(t) + V(c(t)) = E_0$$

da cui segue che l'energia potenziale lungo il moto è limitata superiormente da una costante che dipende dai dati iniziali

$$V(c(t)) \le E_0.$$

Pertanto, dalle ipotesi di dipendenza di V dalla distanza da o, segue che tale distanza è pure limitata superiormente. $\square$

ESEMPIO. Si consideri l'energia potenziale elastica

$$V = \frac{1}{2} k\, r^2 \qquad k>0$$

per cui

$$L \equiv \lim_{r \to \infty} V = \infty .$$

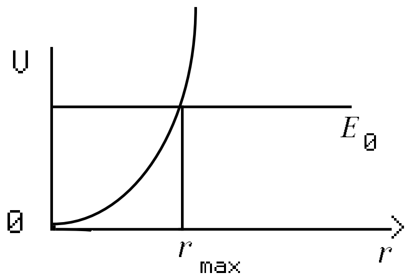

Fig. 4. Energia potenziale in funzione del raggio

Dunque, in questo caso il teorema vale per ogni moto c soluzione dell'equazione di Newton qualunque sia la sua energia totale E_0. ❑

ESEMPIO. Si consideri l'energia potenziale gravitazionale, o coulombiana nel caso attrattivo,

$$V = -\, k\, \frac{1}{r} \qquad k>0$$

per cui

$$L \equiv \lim_{r \to \infty} V = 0 .$$

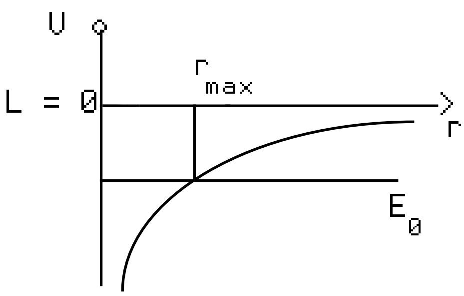

Fig. 5. Energia potenziale in funzione del raggio

Dunque, in questo caso il teorema vale per ogni moto c soluzione dell'equazione di Newton, la cui energia totale E_0 sia negativa. ❑

PROPOSIZIONE. Sia F una forza conservativa centrale e radiale, di centro o, la cui energia potenziale V sia una funzione monotona decrescente della distanza r da o. Indichiamo con

$$L \equiv \lim_{r\to 0} V$$

il limite finito o infinito dell'energia potenziale.

Sia c un moto soluzione dell'equazione di Newton, tale che il relativo valore dell'energia totale (che dipende dai dati iniziali) soddisfi la condizione

$$E_0 < L.$$

Allora, c si svolge all'esterno di una sfera di centro o e raggio non nullo.

DIMOSTRAZIONE. Per la conservazione dell'energia abbiamo

$$\frac{1}{2} m \; Dc(t)\cdot Dc(t) + V(c(t)) = E_0$$

da cui segue che l'energia potenziale lungo il moto è limitata superiormente da una costante che dipende dai dati iniziali

$$V(c(t)) \leq E_0.$$

Pertanto, dalle ipotesi di dipendenza di V dalla distanza da o, segue che tale distanza è pure limitata inferiormente. ❑

ESEMPIO. Si consideri l'energia potenziale coulombiana nel caso repulsivo

$$V = k \, \frac{1}{r} \qquad k>0$$

per cui

$$L \equiv \lim_{r\to 0} V = \infty.$$

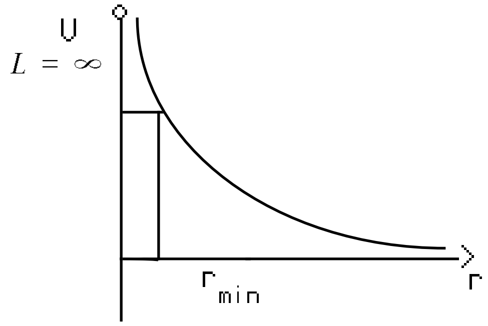

Fig. 6. Energia potenziale in funzione del raggio

Dunque, in questo caso il teorema vale per ogni moto c soluzione dell'equazione di Newton, qualunque sia l'energia totale E_0 (che può essere solo positiva). ❑

Conservazione della quantità di moto

Un altro importante integrale primo è quello della quantità di moto, nel caso di forza nulla.

Teorema. Se la forza è nulla, $F = 0$, allora la quantità di moto

$$Q : \bar{\boldsymbol{P}} \to \bar{\boldsymbol{P}} : v \mapsto m\, v$$

è un integrale primo dell'equazione di Newton, ossia, per ogni moto $c : \boldsymbol{T} \to \boldsymbol{P}$ soluzione dell'equazione di Newton, abbiamo

$$D(Q \circ Dc) = 0.$$

Dimostrazione. Il teorema è un banale corollario della prima equazione cardinale (vedi). Infatti, se la forza è nulla, la prima equazione cardinale diventa

$$D(Q \circ Dc) = 0.$$ ❑

Osservazione. Il precedente teorema può essere anche dimostrato verificando la condizione $(*)$.

Infatti, abbiamo

$$D_1 Q(t,p,v) + \langle D_2 Q(t,p,v),\, v\rangle + \langle D_3 Q(t,p,v),\, \frac{1}{m}\bar{F}(t,p,v)\rangle =$$

$$= 0 - \langle 0,v\rangle + \langle m\, v,\, 0\rangle = 0.$$ ❑

Analogamente, se la componente della forza $\langle F, e\rangle = 0$ in una certa direzione $e \in \bar{\boldsymbol{P}}$ è nulla, allora la componente della quantità di moto $Q \cdot e$ nella stessa direzione è un integrale primo (scalare) dell'equazione di Newton.

Conservazione del momento della quantità di moto

Un terzo integrale primo importante è quello del momento della quantità di moto, nel caso di forza centrale.

TEOREMA. Sia F una forza centrale rispetto al polo $o \in \boldsymbol{P}$. Allora il momento della quantità di moto rispetto al polo o

$$K : \boldsymbol{P} \times \bar{\boldsymbol{P}} \to \bar{\boldsymbol{P}} : (p, v) \mapsto (p - o) \times mv$$

è un integrale primo dell'equazione di Newton, ossia, per ogni moto $c : \boldsymbol{T} \to \boldsymbol{P}$ soluzione dell'equazione di Newton, abbiamo

$$D(K \circ dc) \equiv D\big((c - o) \times m\, Dc\big) = 0.$$

DIMOSTRAZIONE. Il teorema è un corollario della seconda equazione cardinale. Infatti, se la forza è centrale, il momento della forza lungo un qualunque moto c è nullo

$$M \circ jc \equiv (c - o) \times \bar{F} \circ jc = 0.$$

Pertanto, dalla seconda equazione cardinale segue la seguente formula, per ogni moto c soggetto alla forza centrale,

$$D(K \circ dc) = M \circ jc = 0. \qquad \square$$

OSSERVAZIONE. Il precedente teorema può essere anche dimostrato verificando la condizione $(*)$.

Infatti, abbiamo

$$D_1 K(t,p,v) + \langle D_2 K(t,p,v),\, v\rangle + \langle D_3 K(t,p,v),\, \frac{1}{m}\bar{F}(t,p,v)\rangle =$$

$$= 0 - [mv \times v] + [f(t,p,v)\,(p - o) \times (p - o)] = 0 - 0 + 0 = 0. \qquad \square$$

OSSERVAZIONE. Supponiamo che il momento della quantità di moto K sia un integrale primo (vettoriale). Allora, abbiamo anche l'integrale primo (scalare)

$$\|K\| : \boldsymbol{P} \times \bar{\boldsymbol{P}} \to \mathbb{R}.$$

Inoltre, la direzione del momento della quantità di moto

$$\mathrm{dir}(K) : \boldsymbol{P} \times \bar{\boldsymbol{P}} \to \bar{\boldsymbol{P}} : (p,v) \mapsto \mathrm{dir}\big((p - o) \times mv\big)$$

è costante lungo ciascuno degli infiniti moti soluzione dell'equazione di Newton (generalizzando il concetto di integrale primo, possiamo dire che $\mathrm{dir}(K)$ è un *integrale primo proiettivo*).

Studiamo le conseguenze principali dell'eventuale conservazione della direzione del momento della quantità di moto.

Una prima conseguenza dell'eventuale conservazione della direzione del momento della quantità di moto riguarda la giacitura della traiettoria.

Proposizione. Sia F una forza centrale rispetto al polo $o \in \boldsymbol{P}$, sia $c : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{P}$ un moto soluzione dell'equazione di Newton e sia $K \in \bar{\boldsymbol{P}}$ il valore costante del momento della quantità di moto lungo il moto c. Allora, abbiamo i casi seguenti.

1) Se $K \neq 0$, allora la traiettoria del moto c è contenuta nel piano passante per o ed ortogonale a K.

2) Se $K = 0$ e, per ogni $t \in \boldsymbol{I}$, $c(t) \neq o$, allora la traiettoria del moto c è contenuta in una retta passante per o.

3) Se $K = 0$ e, per un certo $t_0 \in \boldsymbol{I}$, $c(t) = o$, $Dc(t_0) \neq 0$, allora la traiettoria del moto c è contenuta in una retta passante per o.

4) Se $K = 0$ e, per un certo $t_0 \in \boldsymbol{I}$, $c(t) = o$, $Dc(t_0) = 0$, allora la traiettoria del moto c è ridotta al punto o.

Dimostrazione.

1) Per ogni $t \in \boldsymbol{I}$, il vettore $c(t) - o$ è ortogonale a K e quindi il punto $c(t)$ appartiene al piano ortogonale a K e passante per o.

1) Scelto un istante iniziale $t_0 \in \boldsymbol{I}$ esiste una base ortogonale (e_i) tale che

$$c(t_0) = o + a(t_0)\, e_1.$$

Pertanto, possiamo scrivere

$$c(t) = o + a(t)\, e_1 + b(t)\, e_2 + c(t)\, e_3, \qquad \forall t \in \boldsymbol{I},$$

con la condizione

$$(*) \qquad a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$$

e con le condizioni iniziali

$$(**) \qquad a(t_0) \neq 0, \quad b(t_0) = 0, \quad c(t_0) = 0.$$

Allora, si verifica facilmente che $K = 0$ se e solo se

$$a\, Db = b\, Da, \qquad aDc = c\, Da, \qquad b\, Dc = c\, Db.$$

Ma, tenendo conto delle condizioni $(*)$ e $(**)$ e della continuità di a, b, c, si può vedere che le soluzioni di questo sistema sono tali che

$$a \neq 0, \qquad b = c = 0.$$

Perciò, otteniamo

$$c(t) = o + a(t)\, e_1, \qquad \forall t \in \boldsymbol{I}.$$

3) Il risultato si dimostra raccordando all'istante t_0 le soluzioni destra e sinistra del caso precedente.

4) Il moto costante $c(t) \equiv o$ è l'unica soluzione dell'equazione di Newton corrispondente ai dati iniziali considerati (dato che una forza centrale soddisfa la condizione $F(t,o,v) = 0$). ❑

Una seconda conseguenza dell'eventuale conservazione della direzione del momento della quantità di moto è che possiamo separare le variabili spaziali ed il tempo nell'equazione di Newton, in modo da ridurre il problema fondamentale della dinamica alla ricerca della traiettoria e del moto unidimensionale lungo la traiettoria.

Consideriamo ora un moto $c : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{P}$ e supponiamo che il momento della quantità di moto lungo il moto sia costante e diverso da zero

$$0 \neq K \in \bar{\boldsymbol{P}}.$$

Sia (ρ, φ, Z) un sistema di coordinate cilindrico con l'origine in o e con l'asse delle Z parallelo ed equiverso a K_0.

OSSERVAZIONE. L'espressione costante del momento della quantità di moto lungo il moto è

$$K = (c^\rho)^2\, Dc^\varphi\, e_Z.$$

Pertanto, la funzione

$$\varkappa \equiv \|K\| = (c^\rho)^2\, |Dc^\varphi| : \boldsymbol{I} \to \mathbb{R}^+$$

è costante. Dato che la funzione Dc^{φ} è continua e non nulla, possiamo scegliere l'orientazione dell'angolo φ in modo tale che $Dc^{\varphi}>0$; in tal modo scriveremo

$$\varkappa \equiv \|K\| = (c^{\varphi})^2 \, Dc^{\varphi} : \boldsymbol{I} \to \mathbb{R}^+ \qquad \square$$

Lemma. La funzione

$$c^{\varphi} : \boldsymbol{I} \to (2,\pi) \subset \mathbb{R}$$

è invertibile.

Dimostrazione. Infatti la sua derivata è diversa da zero, $Dc^{\varphi} \neq 0$. $\square$

Allora introduciamo la seguente notazione *[facoltativo]*. Se γ é un'applicazione che dipende dal tempo, indichiamo con γ' l'applicazione corrispondente, che dipende dall'angolo, ottenuta componendo γ con l'applicazione $(c^{\varphi})^{-1} : (2,\pi) \to \boldsymbol{I}$.

In particolare, indichiamo con

$$c' \equiv c \circ (c^{\varphi})^{-1} : (0,2\pi) \to \boldsymbol{P}$$

$$(Dc)' \equiv Dc \circ (c^{\varphi})^{-1} : (0,2\pi) \to \bar{\boldsymbol{P}}$$

$$(D^2c)' \equiv D^2c \circ (c^{\varphi})^{-1} : (0,2\pi) \to \bar{\boldsymbol{P}}$$

le applicazioni date dalle composizioni

$$\begin{tikzcd} (0,2\pi) \arrow[rr, "c'"] \arrow[dr, "(c^{\varphi})^{-1}"'] & & \boldsymbol{P} \\ & \boldsymbol{I} \arrow[ur, "c"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (0,2\pi) \arrow[rr, "(Dc)'"] \arrow[dr, "(c^{\varphi})^{-1}"'] & & \bar{\boldsymbol{P}} \\ & \boldsymbol{I} \arrow[ur, "Dc"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (0,2\pi) \arrow[rr, "(D^2c)'"] \arrow[dr, "(c^{\varphi})^{-1}"'] & & \bar{\boldsymbol{P}} \\ & \boldsymbol{I} \arrow[ur, "D^2c"'] & \end{tikzcd}$$

che rappresentano il moto e le sue derivate espresse in funzione dell'angolo. Con notazione, meno precisa, ma più tradizionale, si scriverebbe

$$c' \equiv c(\varphi) \qquad (Dc)' \equiv (\frac{dc}{dt})(\varphi) \qquad (D^2c)' \equiv (\frac{d^2c}{dt^2})(\varphi)$$

ed, inoltre,

$$D(c') \equiv (\frac{dc}{d\varphi})(\varphi) \qquad D^2(c') \equiv (\frac{d^2c}{d\varphi^2})(\varphi).$$

Allora possiamo ricavare delle formule che esprimono le derivate del moto rispetto all'angolo φ, anziché rispetto al tempo. Queste formule possono essere utilizzate per eliminare il tempo e scrivere l'equazione (geometrica) della traiettoria. Per riottenere poi il legame tra l'angolo ed il tempo (e quindi completare le informazioni geometriche per ottenere informazioni cinematiche), potremo utilizzare l'integrale primo $\varkappa$.

PROPOSIZIONE. *[facoltativo]* Valgono le seguenti formule

$$(') \qquad (Dc)' = \varkappa\left(-D\,(\frac{1}{c'^{\rho}})(e_{\rho}\circ c') + \frac{1}{c'^{\rho}}\,(e_{\varphi}\circ c')\right)$$

$$('') \qquad (D^2c)' = -\frac{\varkappa^2}{(c'^{\rho})^2}\left(D^2(\frac{1}{c'^{\rho}}) + \frac{1}{c'^{\rho}}\right)(e_{\rho}\circ c').$$

DIMOSTRAZIONE. *[Facoltativa]* Dalla definizione di k, segue

$$(0) \qquad (Dc^{\varphi})' = \frac{\varkappa}{(c'^{\rho})^2}.$$

Inoltre, per la regola della catena e tendendo conto di (0), otteniamo

$$(1) \qquad (Dc^{\rho})' = D(c'^{\rho})\,(Dc^{\varphi})'.$$

Tenendo conto di (0), la (1) diventa

$$(Dc^{\rho})' = D(c'^{\rho})\,\frac{\varkappa}{(c'^{\rho})^2} = -\varkappa\,D(\frac{1}{c'^{\rho}})$$

da cui, derivando otteniamo

$$(D^2c^{\rho})' = -\varkappa\,D^2(\frac{1}{c'^{\rho}})\,(Dc^{\varphi})'$$

e, tenendo conto di (0),

$$(2) \qquad (D^2c^{\rho})' = -\frac{\varkappa^2}{(c'^{\rho})^2}\;D^2(\frac{1}{c'^{\rho}}).$$

Dimostriamo la formula ('). Dall'espressione della velocità per un moto piano

$$Dc = Dc^{\rho}\,(e_{\rho} \circ c) + c^{\rho}\, Dc^{\varphi}\,(e_{\varphi} \circ c),$$

segue

$$(Dc)' = (Dc^{\rho})'\,(e_{\rho} \circ c') + c'^{\rho}\,(Dc^{\varphi})'\,(e_{\varphi} \circ c'),$$

da cui, tendendo conto di (1), segue

$$(Dc)' = (Dc^{\varphi})'\,\big((Dc^{\rho})'\,(e_{\rho} \circ c') + c'^{\rho}\,(e_{\varphi} \circ c')\big)$$

e, finalmente, tenendo conto di (0), otteniamo

$$(Dc)' = \frac{\varkappa}{(c'^{\rho})^2}\,\big((Dc^{\rho})'\,(e_{\rho} \circ c') + c'^{\rho}\,(e_{\varphi} \circ c')\big),$$

che è equivalente a (').

Dimostriamo la formula ("). Dall'espressione dell'accelerazione per un moto centrale

$$D^2 c = \big(D^2 c^{\rho} - c^{\rho}\,(Dc^{\varphi})^2\big)\,(e_{\rho} \circ c),$$

segue

$$(D^2 c)' = \big((D^2 c^{\rho})' - c'^{\rho}\,(Dc^{\varphi})'^2\big)(e_{\rho} \circ c'),$$

da cui, tenendo conto di (2) e di (0), segue

$$(D^2 c)' = -\frac{\varkappa^2}{(c'^{\rho})^2}\,\Big(D^2\big(\frac{1}{c'^{\rho}}\big) + \frac{1}{c'^{\rho}}\Big)\,(e_{\rho} \circ c'). \qquad \square$$

Conservazione dei momenti cinetici

Infine, consideriamo un integrale primo che compare nel caso di forze conservative quando la lagrangiana è costante rispetto ad una certa coordinata.

Proposizione. Sia F una forza conservativa ed, in un certo sistema di coordinate, sia

$$(+) \qquad \frac{\partial L}{\partial x^i} = 0.$$

Allora, la funzione

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^i} : \boldsymbol{P} \times \bar{\boldsymbol{P}} \to \mathbb{R}$$

è un integrale primo dell'equazione di Newton (di Lagrange).

DIMOSTRAZIONE. Sia $c : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{P}$ un moto soluzione dell'equazione di Lagrange

$$D(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \circ dc) - \frac{\partial L}{\partial x^i} \circ dc = 0.$$

Allora, la formula (+) implica

$$D\Big(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^i} \circ dc\Big) \equiv D\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \circ dc\Big) = 0. \qquad \square$$

ESEMPIO. Sia (x^1, x^2, x^3) un sistema di coordinate cartesiane e supponiamo che la forza F sia conservativa ed il suo potenziale U non dipenda da una certa coordinata x^i. Allora, dal teorema precedente ritroviamo la conservazione della componente i-ma della quantità di moto in forma covariante. Infatti, in questo caso abbiamo

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^i} = m\, g_{ij}\, \dot{x}^j \equiv Q_i. \qquad \square$$

ESEMPIO. Supponiamo che la forza F sia centrale e radiale rispetto al polo o e sia (r, ϑ, φ) un sistema di coordinate sferiche con origine in o. Allora, dal teorema precedente troviamo la conservazione della componente assiale del momento della quantità di moto

$$K^Z \equiv m\, \rho^2\, \dot{\varphi}.$$

Infatti, l'energia cinetica ed il potenziale

$$T = \tfrac{1}{2} m\, (\dot{r}^2 + r^2\, \dot{\vartheta}^2 + r^2\, \mathrm{sen}^2\vartheta\, \dot{\varphi}^2) \qquad U = f \circ r$$

non dipendono dalla coordinata φ. Pertanto, il teorema fornisce il seguente integrale primo

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = m\ r^2\ \mathrm{sen}^2\vartheta\ \dot{\varphi} \equiv m\ \varrho^2\ \dot{\varphi} \equiv K^Z. \qquad \square$$

6. Il problema fondamentale della statica

Il problema della statica è un caso particolare del problema della dinamica.

Consideriamo una massa $m \in \mathbb{R}$ ed una forza indipendente dal tempo

$$F : \boldsymbol{P} \times \bar{\boldsymbol{P}} \to \bar{\boldsymbol{P}}^*.$$

DEFINIZIONE. Una *configurazione d'equilibrio* è una posizione $o \in \boldsymbol{P}$, tale che l'unico moto $c : \boldsymbol{T} \to \boldsymbol{P}$ soluzione dell'equazione di Newton e corrispondente ai dati iniziali $(t_0, o, 0) \in \boldsymbol{P} \times \bar{\boldsymbol{P}}$ sia il moto "fermo"

$$c : \boldsymbol{T} \to \boldsymbol{P} : t \mapsto o. \qquad \clubsuit$$

OSSERVAZIONE. Nel caso di una forza indipendente dal tempo, i dati iniziali $(t_0', p, v) \in \boldsymbol{T} \times \boldsymbol{P} \times \bar{\boldsymbol{P}}$ e $(t_0'', p, v) \in \boldsymbol{T} \times \boldsymbol{P} \times \bar{\boldsymbol{P}}$ determinano due soluzioni che differiscono solo per una traslazione temporale. Perciò, se c' è il moto associato ai dati iniziali $(t_0', o, 0)$ ed è fermo, allora anche il moto c'' associato ai dati iniziali $(t_0'', o, 0)$ è fermo. $\square$

PROPOSIZIONE. Le due condizioni seguenti sono equivalenti.
1) La posizione $o \in \boldsymbol{P}$ è una configurazione d'equilibrio.
2) La forza si annulla in $(o, 0) \in \boldsymbol{P} \times \bar{\boldsymbol{P}}$, ossia

$$F(o, 0) = 0. \tag{.}$$

DIMOSTRAZIONE. 1) $\Rightarrow$ 2). Da

$$0 \equiv m\ D^2 c(t) = F(c(t), Dc(t)) \equiv F(o, 0)$$

otteniamo

$$0 = F(o, 0).$$

2) $\Rightarrow$ 1). Se

$$F(o,0) = 0$$

allora il moto

$$c : \boldsymbol{T} \to \boldsymbol{P} : t \mapsto o$$

soddisfa l'equazione di Newton ed i dati iniziali (o,0). ❑

In particolare, nel caso in cui la forza sia posizionale, la condizione (.) diventa

$$(:) \qquad F(o) = 0.$$

DEFINIZIONE. Supponiamo che $o \in \boldsymbol{P}$ sia una configurazione di equilibrio. Allora, diciamo che l'equilibrio è *stabile* se, per ogni intorno $\varepsilon \subset \boldsymbol{P}$ di $o \in \boldsymbol{P}$, esiste un intorno $\delta \subset \boldsymbol{P}\times\bar{\boldsymbol{P}}$ di $(o,0) \in \boldsymbol{P}\times\bar{\boldsymbol{P}}$, tale che il moto soluzione dell'equazione di Newton e corrispondente a dati iniziali $(p,v) \in \delta$ abbia valori in ε. ♣

In particolare, se o è una configurazione di equilibrio stabile, allora esiste un intorno $\delta' \subset \bar{\boldsymbol{P}}$ di $0 \in \bar{\boldsymbol{P}}$, tale che il moto soluzione dell'equazione di Newton e corrispondente a dati iniziali (o,v) con $v \in \delta'$ ha valori in ε.

Nel caso di forze conservative le condizioni per l'equilibrio e l'equilibrio stabile possono essere formulate in modo interessante.

Sia dunque $F : \boldsymbol{P}\to\bar{\boldsymbol{P}}^*$ una forza conservativa e siano $U : \boldsymbol{P}\to\mathbb{R}$ il suo potenziale e $V \equiv -U$ la sua energia potenziale.

PROPOSIZIONE. Le due condizioni seguenti sono equivalenti.
1) La configurazione $o \in \boldsymbol{P}$ è di equilibrio.
2) Il potenziale è stazionario in $o \in \boldsymbol{P}$, cioè

$$DU(o) = 0,$$

ossia, in coordinate,

$$\frac{\partial U}{\partial x^i}(o) = 0 \qquad 1 \le i \le 3. ❑$$

PROPOSIZIONE. Supponiamo che $o \in \boldsymbol{P}$ sia un punto di minimo relativo stretto di V; ossia supponiamo che esista un intorno aperto $\varepsilon \subset \boldsymbol{P}$ di o, tale che, per ogni p appartenente ad ε e diverso da o, sia

$$V(p) > V(o).$$

Allora, o è una posizione di equilibrio stabile.

DIMOSTRAZIONE. *[Facoltativa]* Consideriamo la funzione

$$f \equiv E - V(o) : \boldsymbol{P}\times\bar{\boldsymbol{P}} \to \mathbb{R} : (p,v) \mapsto \frac{1}{2} m\, v^2 + V(p) - V(o).$$

Sia $\varepsilon \subset \boldsymbol{P}$ un intorno sferico del punto o (sufficientemente piccolo, in modo che in ε sia $V - V(o) > 0$). Poiché la frontiera $\partial\varepsilon$ di ε è compatta, la funzione continua $V - V(o)$ assume un minimo $M > 0$ su $\partial\varepsilon$. Dunque, abbiamo la disuguaglianza

(1) $$f(p,v) \equiv \frac{1}{2} m\, v^2 + V(p) - V(o) \geq V(p) - V(o) \geq M > 0$$

$$\forall (p,v) \in \partial\varepsilon\times\bar{\boldsymbol{P}}.$$

D'altra parte, dato che la funzione f è continua nel punto $(o,0)\in\boldsymbol{P}\times\bar{\boldsymbol{P}}$, esiste un intorno $\delta \subset \boldsymbol{P}\times\bar{\boldsymbol{P}}$ del punto $(o,0)$ tale che

(2) $$f(p,v) \equiv f(p,v) - f(o,0) < M \qquad \forall (p,v) \in \delta.$$

Sia ora $c : \boldsymbol{T} \to \boldsymbol{P}$ il moto soluzione dell'equazione di Newton corrispondente ai dati iniziali $(p,v) \in \delta$. Dalla conservazione dell'energia e da (2) otteniamo

(3) $$f(c(t), Dc(t)) = f(c(t_0), Dc(t_0)) < M \qquad \forall t \in \boldsymbol{T}.$$

Allora, confrontando (1) e (3), deduciamo che il moto c non può raggiungere la frontiera $\partial\varepsilon$ e quindi rimarrà all'interno dell'intorno ε. ❑

4. Moti notevoli

Concludiamo lo studio della meccanica di una particella libera analizzando i moti soggetti ad alcuni tipi di forze fondamentali. Questi esempi serviranno ad illustrare la teoria generale; alcuni di essi sono importanti per conto proprio.

1. Moti soggetti ad una forza costante

Dedichiamo questo paragrafo allo studio dei moti soggetti ad una forza costante. Per fissare le idee, possiamo pensare al moto di un proiettile sotto l'azione della forza peso.

Consideriamo una massa $m \in \mathbb{R}^+$ ed una forza F costante ovvero del tipo

$$\bar{F} = - m \, \gamma \, e,$$

dove

$$e \in \bar{\boldsymbol{P}} \qquad \|e\| = 1 \qquad \gamma \in \mathbb{R}^+,$$

e studiamo i moti associati.

L'equazione di moto di Newton è

$$(*) \qquad D^2 c = - \gamma \, e.$$

Scegliamo un sistema di coordinate cartesiane (X, Y, Z) tale che

$$e_Z = e.$$

L'espressione in coordinate dell'equazione di moto è

$$(Ex) \qquad D^2 c^X = 0$$

$$(Ey) \qquad D^2 c^Y = 0$$

$$(Ez) \qquad D^2 c^Z = - \gamma .$$

Cerchiamo le soluzioni del sistema (Ex), (Ey), (Ez). Le tre equazioni sono disaccoppiate e si integrano con quadrature. Quindi, le soluzioni dell'equazione di Newton sono tutti e soli i moti del tipo

$$(.) \qquad c(t) = o + v_0 \, (t - t_0) - \tfrac{1}{2} \gamma \, (t - t_0)^2 \, e \qquad \forall t \in \boldsymbol{T},$$

dove i parametri

$$t_0 \in \boldsymbol{T} \qquad o \in \boldsymbol{P} \qquad v_0 \in \bar{\boldsymbol{P}}$$

sono i dati iniziali.

Studiamo la traiettoria di tali moti *[facolativo]* .

Se $v_0 \neq \lambda \, e$, allora la traiettoria è contenuta nel piano passante per o e che contiene v_0 ed e.

Se $v_0 = \lambda \, e$, allora la traiettoria è contenuta nella retta passante per o e che contiene e.

Se i dati iniziali sono fissati, scegliamo il sistema di coordinate in modo che l'origine coincida con o e $v_0^Y = 0$. Allora, possiamo scrivere

$$v_0 = \|v_0\| \, (\cos\alpha \; e_X + \operatorname{sen}\alpha \; e_Z) \qquad 0 \le \alpha < 2\pi,$$

dove l'angolo α è chiamato la "gittata del tiro".

Se $\alpha = \pm\pi/2$, allora la traiettoria è contenuta nella retta (o, e). La massima "quota" raggiunta dal moto è

$$h = \frac{\|v_0\|^2}{2\,\gamma} \,.$$

Se $\alpha \neq \pm\pi/2$, allora la traiettoria soddisfa l'equazione

$$Z = -\frac{\gamma}{2\|v_0\|^2 \cos^2\alpha} \, X^2 + \operatorname{tg}\alpha \; X,$$

quindi è una parabola il cui asse è parallelo ad e ed il cui vertice è

$$a \equiv o + \frac{l}{2} \, e_X + h \; e_Z = \frac{\|v_0\|^2 \operatorname{sen} 2\alpha}{2\,\gamma} \, e_Z + \frac{\|v_0\|^2 \operatorname{sen}^2\alpha}{2\,\gamma} \, e_Z.$$

La "gittata", ossia la massima distanza da o raggiunta dal moto, durante il tempo in cui $c^Z \ge 0$, è

$$l = \frac{\|v_0\|^2 \operatorname{sen} 2\alpha}{2\,\gamma}$$

e la massima "quota" raggiunta dal moto è

$$h = \frac{\|v_0\|^2 \operatorname{sen}^2\alpha}{2\,\gamma} \,.$$

Discutiamo la gittata in funzione dell'angolo di tiro. Fissiamo la velocità iniziale v_0. Variando l'inclinazione α del tiro, si ottiene la gittata massima

$$L = \frac{v_0^{\;2}}{\gamma}$$

per

$$\alpha = \pi/4.$$

Inoltre, fissata una gittata $l \leq L$, si trova che essa può essere ottenuta dai due angoli di tiro

$$\alpha = \pi/4 \pm \tfrac{1}{2} \operatorname{arc\,cos}\,(l/L).$$

Infine, al variare dell'angolo di tiro α, le traiettorie costituiscono una famiglia di parabole, il cui inviluppo è la parabola di equazione

$$2\,Z = -\frac{1}{L} X^2 + L,$$

che è chiamata “parabola di sicurezza”, perché, (fissato v_0) il moto non può toccare punti esterni ad essa, qualunque sia l'angolo di tiro.

Ritornando al caso generale, osserviamo che l'energia totale

$$E = \tfrac{1}{2} m\,(Dc)^2 + m\,\gamma\,c^Z$$

si conserva lungo i moti soluzione dell'equazione di Newton. Perciò otteniamo la seguente relazione tra la velocità e la quota

$$\|v\| = \sqrt{2\,\gamma\,(h - c^Z)}\;.$$

2. Moti elastici

Dedichiamo questo paragrafo allo studio dei moti soggetti ad una forza elastica. L'argomento è importante perché coinvolge un tipo di equazione di moto che si ripresenta ed ha un ruolo notevole in vari campi della meccanica e della fisica.

Consideriamo una massa $m \in \mathbb{R}^+$ ed una forza F elastica ovvero del tipo

$$\overline{F}(p) = -\,k\,(p - o) \qquad\qquad \forall p \in \boldsymbol{P},$$

dove

$$o \in \boldsymbol{P} \qquad\qquad k \in \mathbb{R}^+$$

e studiamo i moti associati.

L'equazione di Newton è

$$(*) \qquad\qquad D^2 c + \omega^2\,(c - o) = 0,$$

dove

$$\omega^2 \equiv \frac{k}{m} \in \mathbb{R}^+.$$

Scegliamo un sistema di coordinate cartesiane (X, Y, Z) con l'origine in o.

L'espressione in coordinate dell'equazione di moto è

$$(Ex) \qquad D^2 c^X + \omega^2 c^X = 0$$

$$(Ey) \qquad D^2 c^Y + \omega^2 c^Y = 0$$

$$(Ez) \qquad D^2 c^Z + \omega^2 c^Z = 0$$

Lo studio di questo sistema può essere semplificato, riducendo il problema tridimensionale ad un problema piano. Infatti, dato che la forza è centrale e quindi abbiamo la conservazione del momento della quantità di moto (vedi), se fissiamo i dati iniziali, allora conosciamo il (o un) piano su cui si svolge il moto. Pertanto, conviene fissare i dati iniziali e scegliere il sistema di coordinate in modo che il moto corrispondente si svolga sul piano (o,X,Y). Con tale scelta il sistema di tre equazioni (Ex), (Ey), (Ez) si riduce al sistema di due equazioni

$$(Ex) \qquad D^2 c^X + \omega^2 c^X = 0$$

$$(Ey) \qquad D^2 c^Y + \omega^2 c^Y = 0$$

in quanto l'uguaglianza (Ez) è soddisfatta dal moto che corrisponde ai dati iniziali fissati, per il quale è

$$c^Z = 0.$$

Cerchiamo le soluzioni del sistema (Ex), (Ey).

Osserviamo che le due equazioni (Ex) ed (Ey) sono disaccoppiate e sono tutte e due del tipo

$$(') \qquad D^2 f + \omega^2 \mathrm{f} = 0 \qquad \mathrm{f} : \boldsymbol{T} \to \mathbb{R}.$$

Scegliamo un origine dei tempi $\tau \in \boldsymbol{T}$. L'Analisi insegna che le soluzioni complesse dell'equazione (') sono tutte e sole le funzioni del tipo

$$f(t) = A' \, e^{\rho'(t-\tau)} + A'' \, e^{\rho''(t-\tau)} \qquad A', A'' \in \mathbb{C},$$

dove ρ', $\rho'' \in \mathbb{C}$ sono le radici complesse dell'equazione algebrica

$$\rho^2 + \omega^2 = 0,$$

ed i coefficienti A', A'' sono determinati dai dati iniziali; dunque, le soluzioni complesse dell'equazione (') sono tutte e sole le funzioni del tipo

$$f(t) = A' \, e^{i\omega(t-\tau)} + A'' \, e^{-i\omega(t-\tau)} \qquad A', A'' \in \mathbb{C}.$$

Perciò, si può dimostrare che le soluzioni reali dell'equazione (') sono tutte e sole le funzioni del tipo

$$f(t) = A \cos\big(\omega(t-\tau) + \vartheta\big) \qquad A \in \mathbb{R},\ 0 \le \vartheta < 2\pi.$$

Inoltre, la soluzione che corrisponde ai dati iniziali

$$f(t_0) = u \qquad Df(t_0) = v$$

soddisfa le condizioni

$$A \cos\big(\omega(t_0-\tau) + \vartheta\big) = u \qquad -\,\omega\, A \,\mathrm{sen}\big(\omega(t_0-\tau) + \vartheta\big) = v;$$

pertanto, essa è determinata dai seguenti valori dei parametri:

- per $u = 0,\ v = 0$

$$A = 0;$$

- per $u \neq 0$ oppure $v \neq 0$

$$A = \Big(u^2 + \frac{v^2}{\omega^2}\Big)^{1/2}$$

e ϑ è determinato dalle condizioni

$$\cos\big(\omega(t_0-\tau) + \vartheta\big) = \frac{u}{A} \qquad \mathrm{sen}\big(\omega(t_0-\tau) + \vartheta\big) = -\,\frac{v}{\omega A}\,.$$

Quindi, le soluzioni dell'equazione di Newton (corrispondenti ai dati iniziali del tipo considerato) sono tutti e soli i moti del tipo

$$(.) \qquad c(t) = o + A \cos\big(\omega(t-t_0) + \alpha\big)\, e_X + B \cos\big(\omega(t-t_0) + \beta\big)\, e_Y \qquad \forall t \in \boldsymbol{T},$$

dove i parametri sono determinati dai dati iniziali, separatamente per ogni componente, secondo il metodo precedente.

Ovviamente, tra le soluzioni c'è anche la soluzione banale

$$c(t) = o \qquad \forall t \in \boldsymbol{T}.$$

Analiziamo le soluzioni non banali.

La formula (.) mostra che la proiezione di ciascuna soluzione su una qualunque retta passante per o è un moto armonico. Inoltre ciascuno di tali moti è periodico, con periodo

$$T = 2\pi/\omega.$$

Dimostriamo che le traiettorie delle soluzioni sono ellissi di centro o *[facoltativo]*. Infatti, da (.) otteniamo

$$\frac{c^X(t-t_0)}{A} = \cos\omega(t-t_0)\cos\alpha - \operatorname{sen}\omega(t-t_0)\operatorname{sen}\alpha$$

$$\frac{c^Y(t-t_0)}{B} = \cos\omega(t-t_0)\cos\beta - \operatorname{sen}\omega(t-t_0)\operatorname{sen}\beta$$

da cui, eliminando il primo ed il secondo termine del secondo membro, otteniamo

$$\frac{c^X(t-t_0)}{A}\cos\beta - \frac{c^Y(t-t_0)}{B}\cos\alpha = -\operatorname{sen}\omega(t-t_0)\operatorname{sen}(\alpha-\beta)$$

$$\frac{c^X(t-t_0)}{A}\operatorname{sen}\beta - \frac{c^Y(t-t_0)}{B}\operatorname{sen}\alpha = -\cos\omega(t-t_0)\operatorname{sen}(\alpha-\beta)$$

da cui, quadrando e sommando membro a membro, otteniamo

$$(*) \qquad \Big(\frac{c^X(t-t_0)}{A}\Big)^2 + \Big(\frac{c^Y(t-t_0)}{B}\Big)^2 - 2\,\frac{c^X(t-t_0)}{A}\,\frac{c^Y(t-t_0)}{B}\cos(\alpha-\beta) =$$

$$= \operatorname{sen}^2(\alpha-\beta).$$

In particolare, abbiamo i seguenti casi speciali notevoli.

– Se le due componenti del moto sono in fase ($\alpha - \beta = 0$) o in opposizione di fase ($\alpha - \beta = \pm\pi$), allora l'equazione $(*)$ diventa

$$\frac{c^X(t-t_0)}{A} - \frac{c^Y(t-t_0)}{B} = 0 \qquad \text{o} \qquad \frac{c^X(t-t_0)}{A} + \frac{c^Y(t-t_0)}{B} = 0$$

e, quindi, la traiettoria è rettilinea. In tal caso, possiamo scegliere il sistema di coordinate in modo che uno degli assi coordinati coincida con la retta contenente la traiettoria; si vede allora immediatamente che il moto è armonico.

– Se le due componenti del moto sono in quadratura di fase ($\alpha-\beta = \pm\pi/2$), allora l'equazione (§) diventa

$$\left(\frac{c^X(t-t_0)}{A}\right)^2 + \left(\frac{c^Y(t-t_0)}{B}\right)^2 = 1$$

e, quindi, la traiettoria è un ellisse i cui assi principali coincidono con gli assi coordinati. Se, inoltre $A = B$, allora la traiettoria è una circonferenza; in tal caso, la conservazione del momento assiale della quantità di moto (vedi)

$$K^Z = m\,\rho^2\,\dot{\varphi}$$

implica che il moto circolare è uniforme.

3. Moti elastici smorzati

Dedichiamo questo paragrafo allo studio dei moti soggetti ad una forza elastica più una resistenza viscosa. Anche questo argomento è importante perché coinvolge un tipo di equazione di moto che si ripresenta ed ha un ruolo notevole in vari campi della meccanica e della fisica.

Consideriamo una massa $m \in \mathbb{R}^+$ ed una forza F elastica con resistenza viscosa ovvero del tipo

$$\bar{F}(p,v) = -\,k\,(p-o) - \lambda\,v \qquad \forall(p,v) \in \boldsymbol{P}\times\bar{\boldsymbol{P}},$$

dove

$$o \in \boldsymbol{P} \qquad k,\ \lambda \in \mathbb{R}^+$$

e studiamo i moti associati.

L'equazione di moto di Newton è

$$(*) \qquad D^2c + 2\varepsilon\,Dc + \omega^2\,(c-o) = 0,$$

dove

$$\varepsilon \equiv \frac{\lambda}{2m} \in \mathbb{R}^+ \qquad \omega^2 \equiv \frac{k}{m} \in \mathbb{R}^+.$$

Scegliamo un sistema di coordinate cartesiane (X, Y, Z) con l'origine in o.

L'espressione in coordinate dell'equazione di moto è

$$(Ex) \qquad D^2c^X + 2\varepsilon\, Dc^X + \omega^2\, c^X = 0$$

$$(Ey) \qquad D^2c^Y + 2\varepsilon\, Dc^Y + \omega^2\, c^Y = 0$$

$$(Ez) \qquad D^2c^Z + 2\varepsilon\, Dc^Z + \omega^2\, c^Z = 0$$

Come nel caso elastico, lo studio di questo sistema può essere semplificato, riducendo il problema tridimensionale ad un problema piano. Infatti, dall'equazione di moto $(*)$ segue immediatamente la formula

$$D(K \circ dc) = - \lambda\, (K \circ dc),$$

la quale implica la conservazione della direzione del momento della quantità di moto. Quindi (vedi), se fissiamo i dati iniziali, allora conosciamo il (o un) piano su cui si svolge il moto. Pertanto, conviene fissare i dati iniziali e scegliere il sistema di coordinate in modo che il moto corrispondente si svolga sul piano (o,X,Y). Con tale scelta il sistema di tre equazioni (Ex), (Ey), (Ez) si riduce al sistema di due equazioni

$$(Ex) \qquad D^2c^X + 2\varepsilon\, Dc^X + \omega^2\, c^X = 0$$

$$(Ey) \qquad D^2c^Y + 2\varepsilon\, Dc^Y + \omega^2\, c^Y = 0$$

in quanto l'uguaglianza (Ez) è soddisfatta dal moto che corrisponde ai dati iniziali fissati, per il quale è

$$c^Z = 0.$$

Cerchiamo le soluzioni del sistema (Ex), (Ey).

Osserviamo che le due equazioni (Ex) ed (Ey) sono disaccoppiate e sono tutte e due del tipo

$$(') \qquad D^2 f + 2\varepsilon\, Df + \omega^2\, \mathrm{f} = 0.$$

Scegliamo un origine dei tempi $\tau \in \boldsymbol{T}$. L'Analisi insegna che le soluzioni complesse dell'equazione (') sono tutte e sole le funzioni dl tipo

$$f(t) = A'\, e^{\rho'(t-\tau)} + A''\, e^{\rho''(t-\tau)} \qquad A', A'' \in \mathbb{C},$$

o del tipo

$$f(t) = A' \, e^{\varrho(t-\tau)} + A'' \, e^{\varrho(t-\tau)}(t-\tau) \qquad\qquad A', A'' \in \mathbb{C},$$

dove $\varrho', \varrho'' \in \mathbb{C}$ e $\varrho \equiv \varrho' \equiv \varrho'' \in \mathbb{C}$ sono le radici complesse dell'equazione algebrica

$$\varrho^2 + 2\varepsilon\varrho + \omega^2 = 0,$$

secondo che le due radici siano distinte o coincidano, ed i coefficienti A', A'' sono determinati dai dati iniziali; dunque, le soluzioni complesse dell'equazione (′) sono tutte e sole le funzioni dei seguenti tipi:

- se $\omega \neq \varepsilon$

$$f(t) = A' \, e^{-\varepsilon(t-\tau)} \, e^{i\nu(t-\tau)} + A'' \, e^{-\varepsilon(t-\tau)} \, e^{-i\nu(t-\tau)}$$

$$\nu \equiv (\omega^2 - \varepsilon^2)^{1/2} \qquad\qquad A', A'' \in \mathbb{C};$$

- se $\omega = \varepsilon$

$$f(t) = A' \, e^{-\varepsilon(t-\tau)} + A'' \, e^{-\varepsilon(t-\tau)}(t-\tau) \qquad\qquad A', A'' \in \mathbb{C}.$$

Perciò, le soluzioni reali dell'equazione (′) sono tutte e sole le funzioni dei seguenti tipi:

- se $\omega > \varepsilon$ (caso oscillatorio smorzato)

$$f(t) = A \, e^{-\varepsilon(t-\tau)} \cos \nu(t-\tau') \qquad\qquad A \in \mathbb{R}, \; \tau, \tau' \in \boldsymbol{T},$$

dove

$$\nu \equiv (\omega^2 - \varepsilon^2)^{1/2};$$

- se $\omega < \varepsilon$ (caso aperiodico)

se $f \neq 0$ $$f(t) = A \, e^{-\varepsilon(t-\tau)} \cosh n(t - \tau') \qquad\qquad A \in \mathbb{R}, \; \tau, \tau' \in \boldsymbol{T},$$

se $f(\tau')=0$ $$f(t) = A \, e^{-\varepsilon(t-\tau)} \operatorname{senh} n(t - \tau') \qquad\qquad A \in \mathbb{R}, \; \tau, \tau' \in \boldsymbol{T},$$

dove

$$n \equiv (\varepsilon^2 - \omega^2)^{1/2};$$

- se $\omega = \varepsilon$ (caso limite)

$$f(t) = A \, e^{-\varepsilon(t-\tau)} \, (t - \tau') \qquad\qquad A \in \mathbb{C}, \; \tau' \in \boldsymbol{T}.$$

Osserviamo che la condizione

$$\omega > \varepsilon$$

significa

$$\sqrt{k} > \lambda/2\sqrt{m}\,;$$

quindi il caso oscillatorio smorzato si verifica quando la forza elastica "prevale" sullo smorzamento.

Limitiamoci a considerare il caso oscillatorio smorzato, lasciando lo studio degli altri due casi al lettore.

Quindi, nel caso

$$\omega > \varepsilon,$$

le soluzioni dell'equazione di Newton sono tutti e soli i moti del tipo

$$c(t) = o + e^{-\varepsilon(t-t_0)}\left[A \cos\left(\nu\,(t - t_0) + \alpha\right) e_X + B \cos\left(\nu\,(t - t_0) + \beta\right) e_Y\right] \qquad \forall t \in \boldsymbol{T},$$

dove i parametri sono determinati dai dati iniziali, separatamente per ogni componente, secondo il metodo precedente.

Ovviamente, tra le soluzioni c'è anche la soluzione banale (in tutti e tre i casi)

$$c(t) = o \qquad \forall\, t \in \boldsymbol{T}.$$

Analiziamo le soluzioni non banali.

Il moto assomiglia a quello del caso elastico, con la differenza principale di uno smorzamento. Il moto non è più periodico; tuttavia, vale una periodicità in senso ristretto. Distinguiamo due casi. Supponiamo prima che il moto sia rettilineo; allora, i passaggi per o e le elongazioni (con segno) massime e minime si verificano ad istanti in successione periodica con periodo

$$T = 2\pi/\nu.$$

Supponiamo poi che il moto non sia rettilineo e consideriamo una qualunque semiretta con origine in o giacente sul piano del moto; allora, i passaggi per la semiretta si verificano ad istanti in successione periodica con periodo

$$T = 2\pi/\nu.$$

Notiamo che tale periodo è maggiore rispetto al caso puramente elastico. In entrambi i casi, il valore assoluto delle elongazioni decresce ad ognuno degli istanti della successione secondo un fattore di smorzamento

$$\sigma \equiv e^{-2\pi\varepsilon/\nu}.$$

Pertanto, al tendere del tempo all'infinito, il moto tende all'origine o. Il comportamento ora descritto giustifica la dizione "oscillazioni smorzate".

4. Moti elastici smorzati e forzati

Dedichiamo questo paragrafo allo studio dei moti soggetti ad una forza elastica più una resistenza viscosa, più una forza dipendente dal tempo sinuisodalmente. Anche questo argomento è importante perché coinvolge un tipo di equazione di moto che si ripresenta ed ha un ruolo notevole in vari campi della meccanica e della fisica.

Consideriamo una massa $m \in \mathbb{R}^+$ ed una forza F elastica con resistenza viscosa e con un termine "forzante" dipendente sinuisodalmente dal tempo, ovvero del tipo

$$\bar{F}(t,p,v) = -k\,(p-o) - \lambda\, v + \bar{f}\ \mathrm{sen}\ \mu(t-t_0)$$

$$\forall (t,p,v) \in \boldsymbol{T} \times \boldsymbol{P} \times \bar{\boldsymbol{P}},$$

dove

$$o \in \boldsymbol{P} \qquad k,\ \lambda,\ \mu \in \mathbb{R}^+ \qquad 0 \neq \bar{f} \in \bar{\boldsymbol{P}} \qquad t_0 \in \boldsymbol{T}$$

e studiamo i moti associati.

L'equazione di moto di Newton è

$$(*) \qquad D^2c(t) + 2\varepsilon\, Dc(t) + \omega^2\,(c(t) - o) = \bar{\eta}\ \mathrm{sen}\ \mu(t-t_0) \qquad \forall t \in \boldsymbol{T}$$

dove

$$\varepsilon \equiv \frac{\lambda}{2m} \in \mathbb{R}^+ \qquad \omega^2 \equiv \frac{k}{m} \in \mathbb{R}^+ \qquad \bar{\eta} \equiv \frac{\bar{f}}{m} \in \bar{\boldsymbol{P}}.$$

Scegliamo un sistema di coordinate cartesiane (X, Y, Z) con l'origine in o.

L'espressione in coordinate dell'equazione di moto è costituito dal sistema di tre equazioni disaccoppiate

$$(Ex) \qquad D^2c^X + 2\varepsilon\, Dc^Y + \omega^2\, c^X = \eta^X\ \mathrm{sen}\ \mu(t-t_0)$$

(Ey) $$D^2c^Y + 2\varepsilon\, Dc^Y + \omega^2\, c^Y = \eta^Y \operatorname{sen} \mu(t-t_0)$$

(Ez) $$D^2c^Z + 2\varepsilon\, Dc^Z + \omega^2\, c^Z = \eta^Z \operatorname{sen} \mu(t-t_0)$$

Se scegliamo l'asse delle X in modo che

$$\eta^Y = 0 \qquad \eta^Z = 0,$$

allora, il sistema (Ex), (Ey), (Ez) diventa

(Ex) $$D^2c^X + 2\varepsilon\, Dc^X + \omega^2\, c^X = \eta^X \operatorname{sen} \mu(t-t_0)$$

(Ey) $$D^2c^Y + 2\varepsilon\, Dc^Y + \omega^2\, c^Y = 0$$

(Ez) $$D^2c^Z + 2\varepsilon\, Dc^Z + \omega^2\, c^Z = 0$$

Questo sistema mostra immediatamente che la traiettoria della soluzione corrispondente a dati iniziali del tipo

$(^\circ)$ $$c(t_0) = o + a\, \bar\eta \qquad v(t_0) = b\, \bar\eta,$$

è contenuta nell'asse delle X. Quindi, se fissiamo i dati iniziali di questo tipo, allora il sistema di tre equazioni (Ex), (Ey), (Ez) si riduce all'equazione

(Ex) $$D^2c^X + 2\varepsilon\, Dc^X + \omega^2\, c^X = \eta^X \operatorname{sen} \mu(t-t_0)$$

in quanto le uguaglianze (Ey), (Ez) sono soddisfatte dal moto che corrisponde ai dati iniziali fissati, per il quale è

$$c^Y = 0 \qquad c^Z = 0.$$

Limitiamoci a studiare i moti corrispondenti a dati iniziali del tipo $(^\circ)$ e cerchiamo le soluzioni dell'equazione (Ex).

L'Analisi insegna che le soluzioni (reali) di un'equazione del tipo

$(.)$ $$D^2f(t) + 2\varepsilon\, Df(t) + \omega^2\, \mathrm{f}(\mathrm{t}) = \eta \operatorname{sen} \mu(t-t_0) \qquad t \in \boldsymbol{T}$$

sono tutte e sole le funzioni dl tipo

$$f = f' + f'',$$

dove f' è una soluzione dell'equazione omogenea

$$D^2 f + 2\varepsilon\, Df + \omega^2 f = 0$$

e f'' è una soluzione particolare, comunque fissata, dell'equazione (.). In particolare, la funzione

$$f''(t) \equiv B \operatorname{sen}\,(\mu(t-t_0)-\beta)$$

è una soluzione dell'equazione (.) se

$$('') \qquad B = \frac{\eta}{\sqrt{(\omega^2-\mu^2)^2+4\varepsilon^2\mu^2}} \qquad \beta = \operatorname{arctg} \frac{2\varepsilon\mu}{\omega^2-\mu^2}\,.$$

Limitiamoci a considerare il caso $\omega > \varepsilon$, lasciando lo studio degli altri due casi al lettore.

Quindi, nel caso

$$\omega > \varepsilon,$$

le soluzioni dell'equazione di Newton, corrispondenti ai dati iniziali del tipo (°), sono tutti e soli i moti del tipo

$$c(t) = o + \left(e^{-\varepsilon(t-t_0)} A \cos\left(\nu(t-t_0) + \alpha\right) + B \cos\left(\mu(t-t_0) - \beta\right)\right) e_X \qquad \forall t \in \boldsymbol{T},$$

dove B e β sono dati dalle formule ('') e gli altri parametri sono determinati dai dati iniziali.

Dunque, un moto di questo tipo è composto da un'oscillazione smorzata più un'oscillazione “permanente” con periodi e fasi diverse.

Esaminiamo l'oscillazione permanente.

La frequenza dell'oscillazione permanente è uguale a quella del termine forzante.

Studiamo la dipendenza del ritardo di fase β dell'oscillazione permanente rispetto alla frequenza μ del termine forzante. Si vede facilmente che β è una funzione monotona di μ e che

$$\beta = 0 \text{ per } \mu = 0 \qquad \beta = \pi/2 \text{ per } \mu = \omega \qquad \beta \to \infty \text{ per } \mu \to \infty.$$

Studiamo la dipendenza dell'ampiezza B dell'oscillazione permanente rispetto alla frequenza μ del termine forzante. Si vede facilmente che valgono i seguenti casi:

- se

$$\omega > \sqrt{2}\,\varepsilon,$$

allora, quando μ cresce da 0 a $\sqrt{\omega^2 - 2\varepsilon^2}$, B cresce in modo monotono

$$\text{da} \quad B_0 = \frac{\eta}{\omega} \qquad \text{a} \quad B_{\max} = \frac{\eta}{2\varepsilon\sqrt{\omega^2 - \varepsilon^2}}$$

e, quando μ cresce da $\sqrt{\omega^2 - 2\varepsilon^2}$ ad ∞, B decresce asintoticamente in modo monotono

$$\text{da} \quad B_{\max} = \frac{\eta}{2\varepsilon\sqrt{\omega^2 - \varepsilon^2}} \qquad \text{a} \quad B_\infty = 0;$$

inoltre, osserviamo che il valore massimo $B_{\max}$ assunto da B (corrispondentemente a $\mu = \sqrt{\omega^2 - 2\varepsilon^2}$) tende all'infinito quando ε tende a zero; questo importante fenomeno è chiamato "risonanza";

- se

$$\omega \leq \sqrt{2}\,\varepsilon,$$

allora, quando μ cresce da 0 a ∞, B decresce asintoticamente in modo monotono

$$\text{da} \quad B_0 = \frac{\eta}{\omega} \qquad \text{a} \quad B_\infty = 0.$$

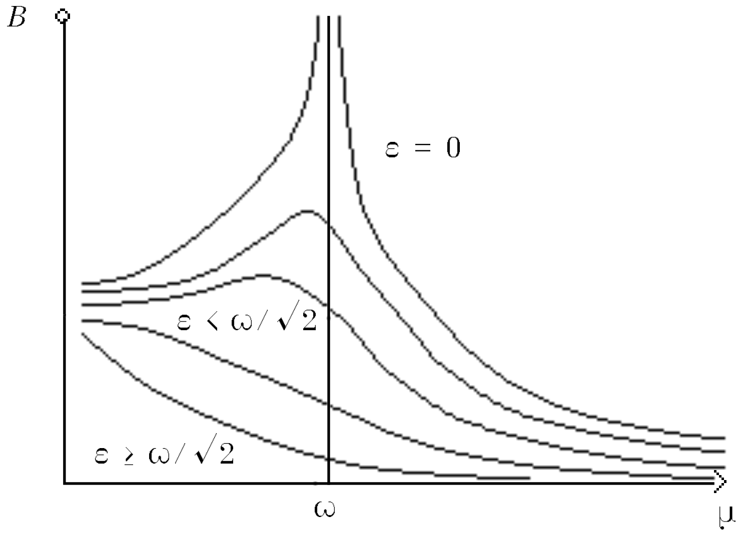

Fig. 7. Fenomeno della risonanza

5. Moti newtoniani e coulombiani

Dedichiamo questo paragrafo allo studio dei moti soggetti ad una forza newtoniana o coulombiana. E' ovvia l'importanza storica di questo argomento.

Consideriamo una massa $m \in \mathbb{R}^+$ ed una forza F newtoniana o coulombiana, ovvero del tipo

$$\bar{F}(p) = -k \frac{1}{(p-o)^2} \frac{p-o}{\|p-o\|} \qquad \forall p \in \boldsymbol{P}-\{o\},$$

dove

$$o \in \boldsymbol{P} \qquad 0 \neq k \in \mathbb{R}$$

e studiamo i moti associati. Se la forza è newtoniana, allora essa è attrattiva e $k > 0$; se la forza è coulombiana, allora essa può essere sia attrattiva che repulsiva e $k > 0$ o $k < 0$. Osserviamo che la forza non è definita in o, dove diverge in modo essenziale.

L'equazione di moto di Newton è

$$(*) \qquad D^2 c + \lambda \frac{1}{(c-o)^2} \frac{c-o}{\|c-o\|} = 0 \qquad c \neq o,$$

dove

$$\lambda \equiv k/m .$$

I moti soluzione possono avere valori in tutto lo spazio **P**, tranne che nel punto o (dove il problema dinamico “diverge”).

Scegliamo un sistema di coordinate cartesiane (r, ϑ, φ) con l'origine in o.

La funzione lagrangiana è

$$L = \frac{1}{2} m \, (\dot{r}^2 + r^2 \, \dot{\vartheta}^2 + r^2 \operatorname{sen}^2\vartheta \, \dot{\varphi}^2) + \lambda \frac{1}{r} .$$

Pertanto, l'espressione in coordinate dell'equazione di moto è data dalle seguenti equazioni di Lagrange

$$(Er) \qquad D^2 c^r - c^r \, (Dc^\vartheta)^2 - c^r \operatorname{sen}^2 c^\vartheta \, (Dc^\varphi)^2 + \lambda \frac{1}{(c^r)^2} = 0$$

$$(E\vartheta) \qquad (c^r)^2 \, D^2 c^\vartheta + 2 \, c^r \, Dc^r \, Dc^\vartheta - (c^r)^2 \operatorname{sen} c^\vartheta \cos c^\vartheta \, (Dc^\varphi)^2 = 0$$

$$(E\varphi) \qquad D\big((c^r)^2 \operatorname{sen}^2 c^\vartheta \, Dc^\varphi)\big) = 0.$$

Lo studio di questo sistema può essere semplificato, riducendo il problema tridimensionale ad un problema piano. Infatti, dato che la forza è centrale e quindi abbiamo la conservazione del momento della quantità di moto (vedi), se fissiamo i dati iniziali, allora conosciamo il (o un) piano su cui si svolge il moto. Pertanto, conviene fissare i dati iniziali e scegliere il sistema di coordinate in modo che il moto corrispondente si svolga sul piano di equazione $\vartheta = \pi/2$. Con tale scelta il sistema di tre equazioni (Er), $(E\vartheta)$, $(E\varphi)$ si riduce al sistema di due equazioni

$$(E\rho) \qquad D^2c^\rho - c^\rho\,(Dc^\varphi)^2 + \lambda\,\frac{1}{(c^\rho)^2} = 0$$

$$(E\varphi) \qquad D\big((c^\rho)^2\, Dc^\varphi)\big) = 0$$

in quanto l'uguaglianza $(E\vartheta)$ è soddisfatta dal moto che corrisponde ai dati iniziali fissati, per il quale è

$$c^\vartheta = \pi/2 \qquad Dc^\vartheta = 0 \qquad D^2c^\vartheta = 0.$$

Studiamo il sistema $(E\rho)$, $(E\varphi)$ ricordando i risultati validi in generale per le forza centrali (vedi).

L'equazione $(E\varphi)$ non è altro che l'espressione della conservazione del momento assiale della quantità di moto; dunque, essa fornisce l'integrale primo

$$(+) \qquad k^Z = \rho^2\,\dot{\varphi}^2.$$

Allora, possiamo separare le variabili tempo ed angolo.

Incominciamo a trovare l'equazione della traiettoria *[facoltativo]* .Tenendo conto di un risultato generale valido per i moti centrali (vedi), indicando con

$$c'^\rho \equiv c^\rho \circ (c^\varphi)^{-1} : (0,2\pi) \to \mathbb{R}$$

l'espressione di ρ, lungo il moto soluzione dell'equazione di Newton, in funzione dell'angolo, otteniamo da $(E\rho)$ la seguente equazione della traiettoria

$$-\frac{\varkappa^2}{(c'^\rho)^2}\Big(D^2\big(\frac{1}{c'^\rho}\big) + \frac{1}{c'^\rho}\Big) + \lambda\,\frac{1}{(c'^\rho)^2} = 0,$$

dove

$$\varkappa \equiv \|K\| = (c^\rho)^2\, Dc^\varphi = \mathrm{cost},$$

ossia

$$(°) \qquad D^2\xi + \xi = \frac{1}{p},$$

dove

$$\xi \equiv \frac{1}{c^{\prime\varphi}} : (0,2\pi) \to \mathbb{R} \qquad 1/p \equiv \lambda/\varkappa^2.$$

L'Analisi insegna che le soluzioni (reali) dell'equazione (°) sono tutte e sole le funzioni del tipo

$$\xi = \xi' + \xi'',$$

dove ξ' è una soluzione dell'equazione omogenea

$$D^2\xi + \xi = 0,$$

già studiata precedentemente (vedi) e ξ'' è una soluzione particolare, comunque fissata, dell'equazione (°). In particolare, la funzione costante

$$\xi''(\alpha) \equiv \frac{1}{p} \qquad p \in \mathbb{R}^+$$

è una soluzione dell'equazione (°). Quindi, le soluzioni dell'equazione (°) sono tutte e sole le funzioni del tipo

$$\xi(\alpha) = a \cos(\alpha + \beta) + \frac{1}{p} \qquad \forall\alpha \in (0,2\pi)$$

con

$$a \geq 0 \qquad \beta \in \mathbb{R}.$$

Dato che r ha valori positivi, noi siamo interessati solo alle soluzioni positive $\xi : (0,2\pi) \to \mathbb{R}^+$.

Pertanto, le traiettorie dei moti soluzione dell'equazione di Newton e corrispondenti ai dati iniziali scelti, soddisfano l'equazione (con una scelta opportuna dell'asse delle x)

$$(.) \qquad \rho = \frac{p}{1 + e\cos\varphi}$$

con le seguenti restrizioni

– se $p > 0$ (forza attrattiva)

$$0 \leq e < 1 \qquad\qquad 0 \leq \varphi < 2\pi$$

oppure

$$1 \leq e \qquad\qquad \cos\varphi > -1/e,$$

– se $p < 0$ (forza repulsiva)

$$0 \leq e < 1 \qquad\qquad \cos\varphi < -1/e,$$

dove le costanti e, p sono determinate dai dati iniziali.

Si può vedere che una traiettoria che soddisfa l'equazione (.) è una conica con uno dei due fuochi in o e con eccentricità e; più precisamente,

– se $0 = e$, la traiettoria è una circonferenza (è chiusa ed r è costante);
– se $0 \leq e < 1$, la traiettoria è un ellisse (è chiusa);
– se $e = 1$, la traiettoria è una parabola (è chiusa all'infinito);
– se $1 < e$, la traiettoria è un'iperbole (è aperta).

E' interessante legare le costanti p ed e all'energia totale del moto considerato.

L'energia totale (tenendo conto della scelta del sistema di coordinate adattata ai dati iniziali) è la funzione

$$E = \frac{1}{2} m \, (\dot\rho^2 + \rho^2 \; \dot\varphi^2) - k \, \frac{1}{\rho} \, .$$

Si noti che, nel caso di forza repulsiva, E è definita positiva.

Tenendo conto dell'equazione (.), l'energia totale può essere espressa, lungo le nostre soluzioni c, in funzione dell'angolo, come segue (vedi)

$$E = \frac{1}{2} m \, \varkappa^2 \left((D(\frac{1}{c'\rho}))^2 + (\frac{1}{c'\rho})^2 \right) - k \, \frac{1}{c'\rho}$$

$$= \frac{m \varkappa^2}{2p^2} \, (e^2 - 1).$$

Perciò,
– se $E < 0$, allora $0 \leq e < 1$, quindi la traiettoria è un ellisse,
– se $E = 0$, allora $e = 1$, quindi la traiettoria è una parabola,
– se $0 < E$, allora $1 < e$, quindi la traiettoria è un'iperbole.

In particolare, ne segue che nel caso di forza repulsiva la traiettoria può essere solo una parabola o un'iperbole. Questi risultati si accordano con un teorema generale che lega l'energia totale alla eventuale finitezza del moto, nel caso in cui l'energia potenziale sia una funzione monotona di r (vedi).

Infine, quando la traiettoria è stata determinata dai dati iniziali, il moto lungo la traiettoria può essere determinato mediante l'integrale primo (+).

6. Moti soggetti alla forza di Lorentz

Concludiamo con un esempio tratto dalla teoria dell'elettromagnetismo: il moto di una particella carica soggetta ad un campo magnetico.

Consideriamo una massa $m \in \mathbb{R}^+$ ed una forza F di Lorentz generata da un campo magnetico costante, ovvero del tipo

$$\bar{F}(v) = k\, v \times B \qquad \forall v \in \bar{\boldsymbol{P}},$$

dove

$$B \equiv b\, e \in \bar{\boldsymbol{P}} \qquad h \in \mathbb{R}^+ \qquad e \in \bar{\boldsymbol{P}} \qquad \|e\| = 1 \qquad 0 \neq k \in \mathbb{R},$$

e studiamo i moti associati.

L'equazione di moto di Newton è

$$(*) \qquad D^2 c - \lambda\, Dc \times e = 0,$$

dove

$$\lambda \equiv kh/m \in \mathbb{R}^+.$$

Consideriamo un sistema di coordinate cartesiano (X,Y,Z) tale che $e_Z = e$. Allora, l'espressione in coordinate dell'equazione di Newton è

$$(Ex) \qquad D^2 c^X - \lambda\, Dc^Y = 0$$

$$(Ey) \qquad D^2 c^Y + \lambda\, Dc^X = 0$$

$$(Ez) \qquad D^2 c^Z = 0$$

Il sistema (Ex), (Ey) e l'equazione (Ez) sono disaccoppiati.

Le soluzioni dell'equazione (Ez) sono tutte e sole le funzioni del tipo

$$(Sz) \qquad c^Z(t) = p^Z + v^Z\,(t - t_0) \qquad a^Z,\ v^Z \in \mathbb{R},\ t_0 \in \mathbb{R}.$$

Studiamo ora il sistema (Ex), (Ey). Esso è equivalente al sistema

$(E'x)$ $$D(Dc^X - \lambda\, c^Y) = 0$$

$(E'y)$ $$D(Dc^Y + \lambda\, c^X) = 0$$

Le soluzioni di questo sistema sono tutte e sole le coppie di funzioni (c^X, c^Y) che soddisfano le condizioni

$(E''x)$ $$Dc^X - \lambda\, c^Y = b \in \mathbb{R}$$

$(E''y)$ $$Dc^Y + \lambda\, c^X = a \in \mathbb{R}$$

dove i numeri $a,b \in \mathbb{R}$ dipendono dai dati iniziali di ciascuna soluzione.
Sostituendo (E") in (Ex), (Ey), troviamo il sistema

$(E^o x)$ $$D^2 c^X + \lambda^2\, c^X = \lambda\, a$$

$(E^o y)$ $$D^2 c^Y + \lambda^2\, c^Y = -\lambda\, b$$

dove i numeri $a,b \in \mathbb{R}$ dipendono dai dati iniziali di ciascuna soluzione tramite le formule (E''). Abbiamo già studiato (vedi) le soluzioni del sistema (E^o), che si trovano sommando la soluzione generale del sistema omogeneo ed una soluzione particolare del sistema completo: dunque, le soluzioni del sistema (E^o) sono tutte e sole le coppie di funzioni del tipo

$$c^X(t) = A \cos\big(\lambda(t - t_0) + \alpha\big) + a/\lambda$$

$$c^Y(t) = B \cos\big(\lambda(t - t_0) + \beta\big) - b/\lambda$$

con la seguente condizione, data da (E"),

– $$A = B = 0,$$

oppure

– $$B \cos\big(\lambda(t - t_0) + \beta\big) = - A \operatorname{sen}\big(\lambda(t - t_0) + \alpha\big)$$

Quindi, le soluzioni del sistema (E^o) sono tutte e sole le coppie di funzioni del tipo

$$c^X(t) = A \cos\big(\lambda(t - t_0) + \alpha\big) + a/\lambda$$

$$c^Y(t) = -A \operatorname{sen}\big(\lambda(t - t_0) + \alpha\big) - b/\lambda$$

ovvero, invertendo il verso dell'asse delle Y,

$$(Sx) \qquad c^X(t) = A \cos\big(\lambda(t - t_0) + \alpha\big) + a/\lambda$$

$$(Sy) \qquad c^Y(t) = A \operatorname{sen}\big(\lambda(t - t_0) + \alpha\big) + b/\lambda$$

In conclusione, le tre formule (S) mostrano che i moti soluzione dell'equazione di Newton sono tutti e soli i moti elicoidali con asse parallelo a B e passante per il punto di coordinate $(a/\lambda,\, b/\lambda,\, 0)$ e con pulsazione $\omega \equiv \lambda$.

Osserviamo che alcuni dei risultati precedenti potevano essere dedotti immediatamente esaminando alcuni integrali primi interessanti.

Innanzitutto, osserviamo che la forza F non è conservativa (dipende dalla velocità e non dalla posizione); però, la potenza è nulla, perché è ortogonale alla velocità. Quindi, per il teorema dell'energia cinetica (vedi), l'energia cinetica è un integrale primo. In altre parole, le soluzioni dell'equazione di Newton sono moti uniformi, cioè la norma della loro velocità è costante rispetto al tempo.

Inoltre, l'accelerazione è ortogonale a B. Quindi, la componente parallela a B della velocità delle soluzioni dell'equazione di Newton è costante rispetto al tempo. Per il risultato precedente, anche la norma della componente ortogonale a B della velocità delle soluzioni dell'equazione di Newton è costante rispetto al tempo.