CORSO DI MECCANICA RAZIONALE

Complementi di Algebra

CAPITOLO DELLE DISPENSE PER IL CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA PER L'AMBIENTE ED IL TERRITORIO

Marco Modugno

12 aprile 2002

Università di Firenze
Facoltà di Ingegneria
Dipartimento di Matematica Applicata
Via S. Marta 3, 50139 Firenze

Questo capitolo delle dispense contiene complementi di algebra lineare e geometria che sono utili per una chiara comprensione di vari argomenti del corso di Meccanica Razionale.

Tuttavia, questo capitolo non costituisce interamente parte essenziale del programma di esame del corso di Meccanica Razionale. E` sufficiente che lo studente legga questo capitolo ed acquisisca le nozioni elementari e pratiche utili per il corso, via via che queste si presentano nello svolgimento del corso. Altre nozioni contenute nel capitolo possono servire come riferimento negli anni successivi.

Indice

1. Il gruppo ortogonale

In questo capitolo studiamo le trasformazioni di uno spazio vettoriale euclideo in se stesso, che conservano il prodotto scalare. Queste trasformazioni risultano automaticamente lineari ed invertibili. L'insieme di tali trasformazioni ha una struttura interessante.

Le trasformazioni ortogonali hanno un ruolo geometrico importante; in particolare, i cambiamenti da una base ortonormale ad un'altra sono descritti da trasformazioni ortogonali.

Dal punto di vista della meccanica, le trasformazioni ortogonali costituiscono la prima tappa dello studio dei moti rigidi. Infatti, esse possono essere considerate come trasformazioni rigide con un punto fisso. In seguito studieremo, più in generale, le trasformazioni rigide ed infine i moti rigidi.

La lettura di questo capitolo presuppone una conoscenza sicura degli spazi vettoriali, degli endomorfismi lineari, degli autovettori ed autovalori, del determinante degli endomorfismi, delle basi, della rappresentazione matriciale degli endomorfismi, degli spazi vettoriali euclidei, delle basi ortonormali, della trasposizione metrica e delle proprietà analitiche elementari delle funzioni sen e cos.

La nostra trattazione è basata su un linguaggio algebrico ed assiomatico. Infatti, questa è l'unica via per trattare in modo sufficientemente chiaro concetti delicati come quello di angolo. Una conseguenza di questo approccio è che certe nozioni o risultati che tradizionalmente sono primitivi diventano per noi teoremi, e viceversa. Tutto il contenuto del capitolo ha un importantissimo valore intuitivo e, perciò, raccomandiamo allo studente di illustrare ogni passo algebrico formale con dei disegni intuitivi. Le costruzioni logiche algebriche devono servire a dare un fondamento sicuro e chiaro al nostro modello, ma non devono distruggere l'intuizione; anzi, la devono rafforzare, guidandola per sentieri sicuri.

In questo capitolo ci riferiamo ad uno *spazio vettoriale euclideo* , cioè uno spazio vettoriale V, di dimensione finita $n \geq 1$, dotato di una metrica euclidea

$$g : V \times V \to \mathbb{R} : (u,v) \mapsto u \cdot v.$$

1. Endomorfismi ortogonali

Innanzitutto, definiamo gli endomorfismi ortogonali e studiamo le loro prime proprietà generali.

TEOREMA. Sia $\varphi : V \to V$ un'applicazione che conserva i prodotti scalari, ossia tale che

$$\varphi(u)\cdot\varphi(v) = u\cdot v \qquad \forall u,v \in V.$$

Allora, φ è lineare.

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo una base ortonormale $(e_1, \dots, e_n)$. Dato che φ conserva i prodotti scalari, anche i vettori trasformati $\big(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)\big)$ costituiscono una base ortonormale.

Inoltre, per ogni $u \in V$, otteniamo

$$\varphi(u) = \sum_i \varphi(u)^i\, \varphi(e_i) = \sum_i \big(\varphi(u)\cdot\varphi(e_i)\big)\, \varphi(e_i) = \sum_i (u\cdot e_i)\, \varphi(e_i) = \sum_i u^i\, \varphi(e_i).$$

Pertanto, l'applicazione

$$\varphi : V \to V : u \equiv \sum_i u^i e_i \mapsto \sum_i u^i\, \varphi(e_i)$$

risulta essere lineare. ❑

DEFINIZIONE. Un *endomorfismo ortogonale* è definito come un'applicazione (lineare) $\varphi : V \to V$, che conserva i prodotti scalari, ossia tale che

$$\varphi(u)\cdot\varphi(v) = u\cdot v \qquad \forall u,v \in V. \clubsuit$$

Come gli endomorfismi lineari sono le applicazioni privilegiate di uno spazio vettoriale in se stesso (perché conservano la struttura vettoriale), così gli endomorfismi ortogonali sono le applicazioni privilegiate di uno spazio vettoriale euclideo in se stesso (perché conservano la struttura vettoriale euclidea).

PROPOSIZIONE. Sia $\varphi : V \to V$ un'applicazione. Allora, le tre condizioni seguenti sono equivalenti:

1) φ conserva i prodotti scalari, ossia

$$\varphi(u)\cdot\varphi(v) = u\cdot v \qquad \forall u,v \in V;$$

2) φ conserva le lunghezze, ossia

$$\|\varphi(u)\| = \|u\| \qquad \forall u \in V;$$

3) φ conserva le lunghezze unitarie, ossia

$$\|\varphi(u)\| = 1 \qquad \forall u \in V \mid \|u\| = 1.$$

DIMOSTRAZIONE. 1) $\Rightarrow$ 2) per la definizione di norma:

$$\|\varphi(u)\| \equiv \sqrt{\varphi(u)\cdot\varphi(u)} = \sqrt{u\cdot u} = \|u\|.$$

2) $\Rightarrow$ 1) per il teorema di Carnot:

$$\varphi(u)\cdot\varphi(v) = \frac{1}{2}\left(\|\varphi(u) + \varphi(v)\|^2 - \|\varphi(u)\|^2 - \|\varphi(v)\|^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\|\varphi(u + v)\|^2 - \|\varphi(u)\|^2 - \|\varphi(v)\|^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\|u + v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2\right) = u\cdot v.$$

2) $\Leftrightarrow$ 3) segue immediatamente da $\|\lambda\, u\| = |\lambda|\, \|u\|$. ❑

Il termine "ortogonale" richiama il fatto che gli endomorfismi ortogonali conservano l'ortogonalità. Però, un endomorfismo che conserva l'ortogonalità, non necessariamente è ortogonale; per esempio, basta considerare un endomorfismo del tipo $\varphi = \lambda\, \mathrm{id}_V$, con $\lambda \neq 1, 0$. Pertanto, il termine "ortogonale", ormai universalmente accettato in letteratura, non è tanto felice e non deve trarre in inganno.

In pratica, per vedere se un'applicazione lineare è ortogonale è conveniente verificare la proprietà stabilita nella seguente proposizione.

PROPOSIZIONE. Sia $\varphi : V \to V$ un'applicazione lineare. Allora, le due condizioni seguenti sono equivalenti:

1) φ conserva i prodotti scalari, ossia

$$\varphi(u)\cdot\varphi(v) = u\cdot v \qquad \forall u,v \in V;$$

2) φ è invertibile e l'inversa coincide con la trasposta metrica, ossia

$$\varphi^{-1} = \varphi^t.$$

DIMOSTRAZIONE. 1) $\Rightarrow$ 2). Per 1) e per la definizione di endomorfismo trasposto, otteniamo

$$u \cdot v = \varphi(u) \cdot \varphi(v) = u \cdot \big(\varphi^t(\varphi(v))\big) \qquad \forall u, v \in V,$$

che implica (dato che g è non degenere)

$$\varphi^t(\varphi(v)) = v \qquad \forall v \in V.$$

2) $\Rightarrow$ 1). Per 2) e per la definizione di endomorfismo trasposto, otteniamo

$$u \cdot v = u \cdot \big(\varphi^{-1}(\varphi(v))\big) = u \cdot \big(\varphi^t(\varphi(v))\big) = \varphi(u) \cdot \varphi(v).$$ ❑

Dunque, ogni endomorfismo ortogonale è un automorfismo lineare.

Osserviamo che la proprietà 1) è adatta a mettere in evidenza il significato intuitivo degli endomorfismi ortogonali, mentre la proprietà 2) ha un valore tecnico e sarà utilizzata per la classificazione degli endomorfismi ortogonali.

COROLLARIO. Ogni endomorfismo ortogonale $\varphi : V \to V$ ha determinante uguale a ± 1, secondo che esso conservi o non conservi l'orientazione dello spazio.

DIMOSTRAZIONE. L'applicazione φ trasforma una base ortonormale $(e_1, \dots, e_n)$ nella base ortonormale $\big(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)\big)$. Perciò, il determinante di φ, che è uguale al rapporto dei volumi orientati tra la base trasformata e la base originale, è uguale a ± 1. ❑

In altre parole, gli endomorfismi ortogonali conservano i volumi in valore assoluto. Si noti, che, viceversa, non è sempre vero che un endomorfismo lineare che conserva i volumi conservi anche i prodotti scalari.

COROLLARIO. Sia $\varphi : V \to V$ un'endomorfismo ortogonale e supponiamo che esso abbia un autovalore reale λ. Allora, abbiamo

$$\lambda = \pm 1.$$

DIMOSTRAZIONE. Se u è un autovettore corrispondente a λ, allora abbiamo

$$u \cdot u = \varphi(u) \cdot \varphi(u) = \lambda^2 \, u \cdot u$$

da cui segue

$$\lambda^2 = 1. \qquad \square$$

TEOREMA. Sia (e_i) una base ortonormale e $\varphi : V \to V$ un endomorfismo lineare. Allora, le due condizioni seguenti sono equivalenti:
1) φ è ortogonale;
2) $\big(\varphi(e_i)\big)$ è una base ortonormale.

DIMOSTRAZIONE. 1) $\Rightarrow$ 2) perché

$$\varphi(e_i)\cdot\varphi(e_j) = e_i\cdot e_j = \delta_{ij}.$$

2) $\Rightarrow$ 1) perché

$$\varphi(u)\cdot\varphi(v) = u^i\, v^j\, \varphi(e_i)\cdot\varphi(e_j) = u^i\, v^j\, \delta_{ij} = u^i\, v^j\, e_i\cdot e_j = u\cdot v. \qquad \square$$

2. Il gruppo degli endomorfismi ortogonali

Ora, consideriamo l'insieme degli endomorfismi ortogonali e studiamo le loro proprietà algebriche e geometriche generali.

Premettiamo dei richiami su alcuni spazi fondamentali associati allo spazio vettoriale V.

Lo spazio

$$\mathrm{End}(V) \equiv L(V,V) \equiv \{f : V \to V\}$$

è definito come l'insieme costituito dagli endomorfismi lineari di V, ossia dalle applicazioni lineari $f : V \to V$.

Lo spazio

$$\mathrm{Auto}(V) \equiv \mathrm{Iso}(V) \subset \mathrm{End}(V)$$

è definito come il sottinsieme costituito dagli automorfismi lineari di V, ossia dagli isomorfismi lineari $f : V \to V$, ossia dagli endomorfismi lineari invertibili, ossia dagli endomorfismi lineari a determinante non nullo.

Lo spazio

$$\mathrm{SAuto}(V) \subset \mathrm{Auto}(V)$$

è definito come il sottinsieme costituito dagli automorfismi lineari di V a determinante positivo.

Analiziamo la struttura algebrica di questi spazi.

Lo spazio End(V) è un algebra con unità. In altre parole, in End(V) abbiamo le operazioni di addizione, moltiplicazione per gli scalari e composizione

$$\mathrm{Endo}(V)\times\mathrm{Endo}(V) \to \mathrm{Endo}(V) : (\varphi,\psi) \mapsto \varphi + \psi$$

$$\mathbb{R}\times\mathrm{Endo}(V) \to \mathrm{Endo}(V) : (\lambda,\varphi) \mapsto \lambda\,\varphi$$

$$\mathrm{Endo}(V)\times\mathrm{Endo}(V) \to \mathrm{Endo}(V) : (\varphi,\psi) \mapsto \psi \circ \varphi$$

ed i seguenti elementi privilegiati

$$0 \in \mathrm{Endo}(V) \qquad \mathrm{id}_V \in \mathrm{Endo}(V).$$

Però, non tutti gli elementi $\varphi \in \mathrm{Endo}(V)$ sono invertibili.

Lo spazio Auto(V) è un gruppo. In altre parole, in Auto(V) abbiamo le operazioni di composizione e di inversione

$$\mathrm{Auto}(V)\times\mathrm{Auto}(V) \to \mathrm{Auto}(V) : (\varphi,\psi) \mapsto \psi \circ \varphi$$

$$\mathrm{Auto}(V) \to \mathrm{Auto}(V) : \varphi \mapsto \varphi^{-1}$$

ed il seguente elemento privilegiato

$$\mathrm{id}_V \in \mathrm{Auto}(V).$$

Invece, Auto(V) non è chiuso rispetto all'operazione di somma e prodotto per gli scalari e l'applicazione nulla non appartiene ad Auto(V).

Lo spazio SAuto(V) è un sottogruppo di Auto(V). In altre parole, l'insieme SAuto(V) è chiuso rispetto alle operazioni di composizione e di inversione ed $\mathrm{id}_V \in S\mathrm{Auto}(V)$.

Esaminiamo ora l'insieme degli endomorfismi ortogonali.

Indichiamo l'insieme degli endomorfismi ortogonali con

$$O(V) \equiv \{\varphi \in \mathrm{End}(V) \mid \varphi \text{ ortogonale}\}$$

e l'insieme degli endomorfismi ortogonali a determinante 1 con

$$SO(V) \equiv \{\varphi \in O(V) \mid \det\varphi = 1\}.$$

Proposizione. L'applicazione $\mathrm{id}_V : V\to V$ è un endomorfismo ortogonale a determinante 1.

Se $\varphi : V \to V$ e $\psi : V \to V$ sono due endomorfismi ortogonali, allora $\psi \circ \varphi : V \to V$ è un endomorfismo ortogonale.

Se $\varphi : V \to V$ è un endomorfismo ortogonale, allora $\varphi^{-1} : V \to V$ è un endomorfismo ortogonale. ❑

COROLLARIO. Abbiamo la seguente catena di inclusioni naturali

$$\begin{array}{ccccc} SO(V) & \hookrightarrow & SAuto(V) & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ O(V) & \hookrightarrow & \mathrm{Auto}(V) & \hookrightarrow & \mathrm{Endo}(V) \end{array}$$

Inoltre, $O(V)$ è un sottogruppo di $\mathrm{Auto}(V)$ e $SO(V)$ è un sottogruppo di $O(V)$. ❑

Nel caso in cui $\dim V = 1$ il gruppo ortogonale è particolarmente semplice.

LEMMA. Se $\dim V = 1$, allora

$$\mathrm{End}(V) \simeq \mathbb{R} \qquad \mathrm{Auto}(V) \simeq \mathbb{R} - \{0\} \qquad \mathrm{SAuto}(V) \simeq \mathbb{R}^+.$$

DIMOSTRAZIONE. Infatti, ogni endomorfismo lineare $\varphi : V \to V$ può essere univocamente scritto come $\varphi : V \to V : v \mapsto \lambda v$, dove $\lambda \in \mathbb{R}$. Viceversa, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, l'applicazione $\varphi : V \to V : v \mapsto \lambda v$ è lineare. Inoltre, il determinante dell'endomorfismo $\varphi = \lambda\, \mathrm{id}_V$ è uguale a λ stesso. ❑

PROPOSIZIONE. Se $\dim V = 1$, allora

$$O(V) \simeq \{1, -1\} \qquad SO(V) \simeq \{1\}.$$

DIMOSTRAZIONE. Infatti, il trasposto dell'endomorfismo $\varphi = \lambda$ è uguale a λ stesso (qualunque sia la metrica euclidea g considerata). ❑

Si noti che $O(V)$ ed $SO(V)$ rimangono invariati se si cambia la metrica euclidea g.

Vogliamo ora determinare gli endomorfismi ortogonali nei casi in cui $\dim V = 2, 3$.

3. Il gruppo degli endomorfismi ortogonali nel caso dim V = 2

Consideriamo uno spazio vettoriale V, tale che $\dim V = 2$.

Lemma. Con riferimento ad una base qualunque (b_1, b_2), possiamo scrivere:

$$\mathrm{End}(V) \simeq \{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \}$$

$$\mathrm{Auto}(V) \simeq \{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R},\ ad - bc \neq 0 \}$$

$$\mathrm{SAuto}(V) \simeq \{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R},\ ad - bc > 0 \}.$$

Dimostrazione. Infatti, sappiamo che l'applicazione

$$\mathrm{End}(V) \to \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 : \varphi \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \varphi(b_1)^1 & \varphi(b_2)^1 \\ \varphi(b_1)^2 & \varphi(b_2)^2 \end{pmatrix}$$

è un isomorfismo lineare.

Inoltre, abbiamo

$$\det \varphi = ad - bc. \qquad \square$$

Per studiare il gruppo ortogonale abbiamo bisogno di alcune premessa algebriche.

Consideriamo la seguente relazione di equivalenza nell'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali

$$r \backsim s \qquad \Leftrightarrow \qquad r = s + k\, 2\, \pi, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Abbiamo così l'insieme quoziente

$$\mathbb{R}/2\pi \equiv \{[r]\}$$

costituito dalle classi di equivalenza dei numeri reali modulo 2π e la proiezione

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}/2\pi : r \mapsto [r].$$

Possiamo dotare l'insieme $\mathbb{R}/2\pi$ di una struttura di gruppo commutativo in modo naturale, considerando l'elemento

$$[0] \in \mathbb{R}/2\pi$$

e le operazioni

$$\mathbb{R}/2\pi \times \mathbb{R}/2\pi \to \mathbb{R}/2\pi : ([r], [s]) \mapsto [r] + [s] \equiv [r + s]$$

$$\mathbb{R}/2\pi \to \mathbb{R}/2\pi : [r] \mapsto - [r] \equiv [- r],$$

che risultano ben definite, in quanto le formule precedenti non dipendono dalla scelta dei rappresentanti delle classi di equivalenza.

La successiva trattazione algebrica permetterà di descrivere geometricamente questi risultati rappresentando $\mathbb{R}/2\pi$ mediante la circonferenza unitaria S_1 ed $\mathbb{R}$ mediante un'elica cilindrica che si proietta su S_1.

Le funzioni

$$\text{sen} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad \cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

sono periodiche con periodo 2π; pertanto, possiamo definire le corrispondenti funzioni su $\mathbb{R}/2\pi$ come segue:

$$\text{sen} : \mathbb{R}/2\pi \to \mathbb{R} : [r] \mapsto \text{sen}\, r \qquad \cos : \mathbb{R}/2\pi \to \mathbb{R} : [r] \mapsto \cos r.$$

Inoltre, facciamo due utili osservazioni.

- Se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}/2\pi$, allora

$$\text{sen}\,\alpha = \text{sen}\,\beta, \quad \cos\alpha = \cos\beta \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = \beta.$$

- Se $a, b \in \mathbb{R}$ sono tali che

$$a^2 + b^2 = 1,$$

allora il grafico delle funzioni sen e cos mostra che esiste un unico $\vartheta \in \mathbb{R}/2\pi$ tale che

$$a = \cos\vartheta \qquad b = - \text{sen}\,\vartheta$$

ed esiste un unico $\vartheta' \in \mathbb{R}/2\pi$ tale che

$$a = \cos\vartheta' \qquad b = \text{sen}\,\vartheta';$$

inoltre,

$$\vartheta' = - \vartheta.$$

PROPOSIZIONE. Con riferimento ad una base ortonormale (e_1,e_2), possiamo scrivere:

$$O(V) \simeq \{ \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R}/2\pi \}.$$

$$SO(V) \simeq \{ \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R}/2\pi \}.$$

DIMOSTRAZIONE. Infatti,

$$(\varphi) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad (\varphi^t) = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.$$

Pertanto, φ è ortogonale se e solo se $\varphi \circ \varphi^t = \mathrm{id}_V$, cioè se e solo se

$$(s) \begin{cases} (s_1) & a^2 + b^2 = 1 \\ (s_2) & ac + bd = 0 \\ (s_3) & c^2 + d^2 = 1. \end{cases}$$

Dunque, gli endomorfismi ortogonali sono dati esattamente dalle soluzioni del sistema (s) (non lineare !) di tre equazioni nelle quattro incognite $a,b,c,d \in \mathbb{R}$. Risolviamo tale sistema.

L'equazione

$$(s_2) \qquad ac = -\,bd$$

implica

$$a^2 c^2 = b^2 d^2,$$

che, insieme ad (s_1) ed (s_3), implica

$$(s_4) \qquad a^2 = d^2 \qquad c^2 = b^2.$$

Inoltre, (s_1) implica che a e b possono essere scritti nella forma

$$a = \cos\alpha \quad b = -\operatorname{sen}\alpha \qquad \alpha \in \mathbb{R}/2\pi.$$

Tenendo poi conto di (s_4) ed (s_2), la soluzione del sistema va cercata tra gli elementi di uno dei due tipi

$$a = \cos\alpha \quad b = -\operatorname{sen}\alpha \quad c = \operatorname{sen}\alpha \quad d = \cos\alpha,$$

$$a = \cos\alpha \quad b = \operatorname{sen}\alpha \quad c = \operatorname{sen}\alpha \quad d = -\cos\alpha.$$

In effetti, si verifica immediatamente che le matrici precedenti sono soluzioni del sistema (s). Abbiamo così determinato $SO(V)$. ❑

PROPOSIZIONE. Sia φ l'endomorfismo ortogonale la cui matrice nella base (e_1,e_2) è

$$(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Allora φ ha autovalori reali (entrambi uguali a 1 o a -1) se e solo se $\alpha = 0$ o $\alpha = \pi$. Nel primo caso entrambi gli autovalori sono uguali a 1 e quindi $\varphi = \mathrm{id}_V$; nel secondo caso entrambi gli autovalori sono uguali a -1 e quindi $\varphi = -\mathrm{id}_V$. ❑

PROPOSIZIONE. Sia φ l'endomorfismo ortogonale la cui matrice nella base (e_1,e_2) è

$$(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Allora φ è simmetrico e quindi ha autovalori reali.
Infatti, se $\alpha = 0$, allora φ ha
- autovalore $+1$ con autovettore e_1,
- autovalore -1 con autovettore e_2.

Inoltre, se $\alpha = \pi$, allora φ ha
- autovalore $+1$ con autovettore e_2,
- autovalore -1 con autovettore e_1.

Infine, se $\alpha \neq 0,\pi$, allora φ ha
- autovalore $+1$ con autovettore $-\operatorname{sen}\alpha\, e_1 + (\cos\alpha - 1)\, e_2$,
- autovalore -1 con autovettore $-\operatorname{sen}\alpha\, e_1 + (\cos\alpha + 1)\, e_2$. ❑

LEMMA. Per $\alpha,\beta \in \mathbb{R}/2\pi$, abbiamo

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta & -\operatorname{sen}\beta \\ \operatorname{sen}\beta & \cos\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\operatorname{sen}(\alpha+\beta) \\ \operatorname{sen}(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(-\alpha) & -\operatorname{sen}(-\alpha) \\ \operatorname{sen}(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{pmatrix}$$ ❑

LEMMA. Per $\alpha, \beta \in \mathbb{R}/2\pi$, abbiamo

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta & -\operatorname{sen}\beta \\ \operatorname{sen}\beta & \cos\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\operatorname{sen}\beta \\ \operatorname{sen}\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$ ❑

LEMMA. Se (e_1, e_2) ed (e'_1, e'_2) sono due basi ortonormali con la stessa orientazione e $\varphi \in SO(V)$, allora le matrici di φ nelle due basi sono uguali.

DIMOSTRAZIONE. Sappiamo che la trasformazione dalla prima alla seconda base è un endomorfismo ortogonale a determinante positivo e la trasformazione inversa è l'endomorfismo trasposto (vedi). Perciò, se la matrice di φ nella prima base è

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

e la matrice di trasformazione dalla prima alla seconda base è

$$\begin{pmatrix} \cos\beta & -\operatorname{sen}\beta \\ \operatorname{sen}\beta & \cos\beta \end{pmatrix},$$

allora la matrice di φ nella seconda base è

$$\begin{pmatrix} \cos\beta & \operatorname{sen}\beta \\ -\operatorname{sen}\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta & -\operatorname{sen}\beta \\ \operatorname{sen}\beta & \cos\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$ ❑

TEOREMA. La scelta di un'orientazione di V determina una biiezione naturale

$$\hat{\ } : SO(V) \to \mathbb{R}/2\pi : \varphi \mapsto \hat{\varphi} \equiv \alpha,$$

che è un isomorfismo di gruppi, ossia soddisfa le seguenti proprietà

$$\widehat{\mathrm{id}_V} = 0 \qquad \widehat{(\varphi + \varphi')} = \hat{\varphi} + \hat{\varphi}' \qquad \widehat{\varphi^{-1}} \mapsto -\hat{\varphi}.$$ ❑

DEFINIZIONE. Scelta un'orientazione di V, l'*angolo orientato* associato all'endomorfismo ortogonale a determinante positivo $\varphi \in SO(V)$ è definito come il numero modulo 2π

$$\alpha \equiv \hat{\varphi} \in \mathbb{R}/2\pi. \qquad ♣$$

E' facile vedere che, cambiando l'orientazione di V, l'angolo orientato α di φ cambia in $-\alpha$.

COROLLARIO. Il gruppo $SO(V)$ è commutativo. ❑

La biiezione naturale $SO(V) \to \mathbb{R}/2\pi$ ci permette di affermare che $SO(V)$ è una *varietà differenziabile* (vedi ...) di dimensione 1.

LEMMA. Sia $u \in V$ un vettore unitario. Se (e_1, e_2) è una base ortonormale, allora esiste un unico

$$\vartheta \in \mathbb{R}/2\pi,$$

tale che

$$u = \cos\vartheta\; e_1 + \operatorname{sen}\vartheta\; e_2.$$

DIMOSTRAZIONE. Infatti, per ipotesi abbiamo

$$1 = u^2 = (u^1)^2 + (u^2)^2,$$

da cui, per un'osservazione precedente, esiste un unico $\vartheta \in \mathbb{R}/2\pi$ tale che

$$u^1 = \cos\vartheta \qquad u^2 = \operatorname{sen}\vartheta. \qquad ❑$$

LEMMA. Dati due vettori unitari v e w, esiste un unico $\varphi \in SO(V)$, tale che $\varphi(v) = w$.

Inoltre, scelta un'orientazione di V e con riferimento ad una qualunque base ortonormale (e_1, e_2) con orientazione positiva, scrivendo (in accordo al lemma precedente)

$$u = \cos\beta\; e_1 + \operatorname{sen}\beta\; e_2 \qquad v = \cos\gamma\; e_1 + \operatorname{sen}\gamma\; e_2,$$

segue che l'angolo $\alpha = \hat{\varphi}$ associato a φ è dato da

$$\alpha = \gamma - \beta.$$

DIMOSTRAZIONE. Sia φ l'endomorfismo ortogonale la cui matrice nella base (e_1, e_2) è

$$(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Allora, $\varphi(u) = v$ se e solo se

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta \\ \operatorname{sen}\beta \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) \\ \operatorname{sen}(\alpha+\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\gamma \\ \operatorname{sen}\gamma \end{pmatrix};$$

si vede subito che l'unica soluzione $\alpha \in \mathbb{R}/2\pi$ del sistema precedente è

$$\alpha = \gamma - \beta.$$ ❑

DEFINIZIONE. Scelta un'orientazione di V e dati due vettori unitari v e w, l'angolo orientato di rotazione $\alpha = \hat{}\varphi$ associato all'unico $\varphi \in SO(V)$ tale che $\varphi(v) = w$, è detto *l'angolo orientato* tra i vettori v e w (nell'ordine). ♣

LEMMA. Abbiamo

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\alpha) & \operatorname{sen}(-\alpha) \\ \operatorname{sen}(-\alpha) & -\cos(-\alpha) \end{pmatrix}$$ ❑

PROPOSIZIONE. Scelta una base ortonormale di V, otteniamo una biiezione di $O(V)$ con l'unione disgiunta di $\mathbb{R}/2\pi$ con $\mathbb{R}/2\pi$.

DIMOSTRAZIONE. Infatti, abbiamo già mostrato la biiezione naturale $SO(V) \simeq \mathbb{R}/2\pi$. Inoltre, scelta una base ortonormale, ogni endomorfismo ortogonale a determinante negativo può essere visto come la composizione di un endomorfismo ortogonale a determinante positivo con una simmetria rispetto ad una retta. ❑

Possiamo quindi dimostrare che $O(V)$ è una varietà differenziabile (vedi) composta di due componenti connesse, ciascuna delle quali è diffeomorfa ad $\mathbb{R}/2\pi$.

4. Il gruppo degli endomorfismi ortogonali nel caso dim V = 3

Consideriamo uno spazio vettoriale V, tale che $\dim V = 3$.

LEMMA. Ogni endomorfismo ortogonale φ ha almeno un asse principale (il cui autovalore è ± 1).

DIMOSTRAZIONE. Infatti, per il teorema fondamentale dell'algebra, il polinomio caratteristico di φ è di terzo grado (dispari) e, perciò ha almeno una radice reale, che, per quanto visto nel §1, ha modulo 1. ❑

Più precisamente, si vede facilmente che possono capitare solo i seguenti tre casi:

1) φ ha un solo asse principale con autovalore ± 1;

2) φ ha tre assi principali ortogonali, di cui due hanno lo stesso autovalore distinto dall'autovalore dell'altro;

3) $\varphi = \pm \, \mathrm{id}_V$, per cui tutti gli assi sono principali con lo stesso autovalore ± 1.

LEMMA. Sia φ un endomorfismo ortogonale, r un suo asse principale (il cui autovalore è ± 1) e π il piano ortogonale ad r. Allora, φ trasforma il piano π in se stesso e la restrizione $\varphi^{\perp} : \pi \to \pi$ di φ a π è ancora un endomorfismo ortogonale.

DIMOSTRAZIONE. Sia $0 \neq u \in r$. Se $v \in \pi$, allora

$$\varphi(v) \in \pi$$

perché

$$\varphi(v) \cdot \varphi(u) = v \cdot (\pm\, u) = \pm\, v \cdot u = 0.$$

Dunque, φ si restringe a π. Ovviamente la sua restrizione $\varphi^{\perp} : \pi \to \pi$ conserva i prodotti scalari perché $\varphi : V \to V$ conserva i prodotti scalari. ❑

Dunque, φ risulta decomposto nella somma diretta

$$\varphi = \pm\, \mathrm{id}_V \oplus \varphi^{\perp}.$$

In altre parole, per ogni $v \in V$, se $v^{\parallel} \in r$ e $v^{\perp} \in \pi$ sono le componenti di v relative ad r e π, allora abbiamo

$$\varphi(v) = \pm\, v^{\parallel} + \varphi^{\perp}(v^{\perp}).$$

Pertanto, lo studio degli endomorfismi ortogonali nel caso $\dim V = 3$ è rimandato al caso $\dim V = 2$.

PROPOSIZIONE. Sia φ un endomorfismo ortogonale. Se (e_1, e_2, e_3) è una base ortonormale tale che e_3 sia un autovettore di φ, allora la matrice di φ è di uno dei seguenti quattro tipi

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha & 0 \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha & 0 \\ \operatorname{sen}\alpha & -\cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \qquad \alpha \in \mathbb{R}/2\pi.$$

Inoltre, se φ ha determinante positivo, allora la sua matrice è di uno dei seguenti due tipi

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha & 0 \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha & 0 \\ \operatorname{sen}\alpha & -\cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \alpha \in \mathbb{R}/2\pi.$$

DIMOSTRAZIONE. Segue immediatamente dai due lemmi precedenti. ❑

Osserviamo che la scelta di un'orientazione di V e di un sottospazio vettoriale r di dimensione 1 determina un'orientazione del sottospazio vettoriale π ortogonale ad r. Infatti, se (e_1, e_2, e_3) è una base ortonormale di V orientata positivamente, tale che (e_3) sia una base di r pure orientata positivamente, allora la base (e_1, e_2) induce un'orientazione su π; inoltre, tale orientazione non dipende dalla scelta della base iniziale.

DEFINIZIONE. Una *rotazione attorno all'asse* r è definita come un endomorfismo ortogonale φ a determinante positivo, tale che r sia un asse principale con autovalore 1. Inoltre, scelta un'orientazione di V e di r, l'*angolo di rotazione* di φ è definito come l'angolo orientato

$$\hat{}\varphi \equiv \hat{}(\varphi^{\perp}) \in \mathbb{R}/2\pi$$

associato all'endomorfismo ortogonale $\varphi^{\perp} : \pi \to \pi$, rispetto all'orientazione indotta su π. ♣

LEMMA. Abbiamo

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha & 0 \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha & 0 \\ -\cos\alpha & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \qquad \square$$

I risultati precedenti ci permettono di dimostrare che $SO(V)$ è una *varietà di dimensione* 3 connessa (vedi ...). Infatti, occorrono due angoli per determinare l'asse principale r ed un angolo per determinare la rotazione attorno a tale asse. Il fatto che gli endomorfismi ortogonali a determinante positivo dei due tipi

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha & 0 \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha & 0 \\ \operatorname{sen}\alpha & -\cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \alpha \in \mathbb{R}/2\pi$$

appartengano alla stessa componente connessa è in accordo con il fatto che possiamo trovare una trasformazione continua dall'uno all'altro, per esempio ruotando attorno ad e_1 come suggerito dal lemma precedente.

Analogamente, si può dimostrare che $O(V)$ è una varietà di dimensione 3 con due componenti connesse.

2. Spazi ed applicazioni affini

1. Spazi affini

DEFINIZIONE. Uno *spazio affine* è costituito da un insieme A, detto *l'insieme dei punti*, da uno spazio vettoriale $\bar{A}$, detto lo spazio dei *vettori liberi*, e da un'applicazione

$$\tau : A \times \bar{A} \to A : (p, v) \mapsto p + v \equiv \tau(p, v),$$

detta la *traslazione*, che soddisfa le seguenti proprietà:

1) $$(p + v) + w = p + (v + w) \qquad \forall p \in A,\ \forall v, w \in \bar{A};$$

2) $$p + 0 = p \qquad \forall p \in A;$$

3) $$p + v = p \quad \Rightarrow v = 0 \qquad p \in A,\ v \in \bar{A};$$

4) $$p, q \in A \quad \Rightarrow \exists\, v \mid q = p + v. \qquad \clubsuit$$

Osserviamo che la somma tra vettori e la traslazione di un punto tramite un vettore sono in principio operazioni diverse. Ma esse sono state indicate con lo stesso simbolo +, perché non sorge alcuna ambiguità, grazie alla proprietà 1), che è una sorta di proprietà associativa. Grazie a questa proprietà, si possono anche eliminare le parentesi e scrivere semplicemente

$$(p + v) + w = p + v + w = p + (v + w).$$

La seconda proprietà dice che il vettore nullo induce la *traslazione nulla*, ossia la trasformazione identica di A. Più precisamente, la terza proprietà dice che solo il vettore nullo ha questa proprietà: se un certo vettore v non sposta effettivamente un certo punto p, allora esso è il vettore nullo.

La quarta proprietà dice che se partiamo da un punto p, allora possiamo raggiungere ogni altro punto q dello spazio mediante un'opportuna traslazione v.

Dunque, uno spazio affine è stato definito come una terna $(A, \bar{A}, \tau)$. D'ora in poi, per semplificare la notazione, quando non c'è pericolo di confusione, diremo semplicemente che A è uno spazio affine, sottintendendo lo spazio dei vettori liberi $\bar{A}$ e la traslazione τ.

ESEMPIO. Ogni spazio vettoriale V diventa uno spazio affine in modo naturale, ponendo

$$A := V \qquad \bar{A} := V \qquad \tau := +,$$

dove $+$ indica l'operazione di addizione in V. ◇

Consideriamo uno spazio affine A.

Un *vettore applicato* è definito come una coppia

$$(p,v) \in A \times \bar{A}.$$

PROPOSIZIONE. Siano $p,q \in A$ due punti. Allora, il vettore $v \in \bar{A}$ tale che

$$q = p + v$$

è unico.

DIMOSTRAZIONE. Se

$$q = p + v \qquad q = p + w,$$

allora, utilizzando le proprietà 1), 2), 3), possiamo scrivere

$$p + v = p + w \quad \Rightarrow p + v - w = p + 0 \quad \Rightarrow p + (v - w) = p \quad \Rightarrow v - w = 0. \qquad ❑$$

L'unico vettore $v \in \bar{A}$ tale che $q = p + v$ sarà indicato con il simbolo

$$v \equiv q - p.$$

In principio, tale simbolo non va confuso con la differenza tra vettori. Però, la differenza tra punti si comporta in modo analogo alla differenza tra vettori e permette di intuire la veridicità di alcune uguaglianze. Per esempio, vale:

$$p = q + (p - q).$$

Dunque, la scelta di *un'origine* $o \in A$, determina la biiezione

$$A \to \bar{A} : p \mapsto (p - o).$$

Questo fatto mostra che, in un certo senso, uno spazio affine può essere visto come uno spazio vettoriale in cui si sia perso il privilegio del vettore nullo. Infatti, in uno spazio affine (senza ulteriori strutture aggiuntive) nessun punto ha alcuna proprietà che lo privilegi rispetto agli altri.

Se $\bar{A}$ ha dimensione n, allora diciamo anche che lo spazio affine A ha *dimensione* n.

Gli spazi affini di dimensione 0 risultano essere costituiti da un solo punto.

Una *retta* è definita come uno spazio affine di dimensione 1; un *piano* è definito come uno spazio affine di dimensione 2.

Se A e B sono spazi affini, allora il loro prodotto cartesiano $A \times B$ risulta essere in modo naturale uno spazio affine il cui spazio dei vettori liberi è il prodotto cartesiano $\bar{A} \times \bar{B}$ degli spazi dei vettori liberi di A e B e la traslazione è data da

$$(A \times B) \times (\bar{A} \times \bar{B}) \to (A \times B) : (p,q;\, u,v) \mapsto (p + u,\ q + v).$$

Queste considerazioni si estendono immediatamente al prodotto cartesiano di un numero qualunque di spazi affini.

2. Sottospazi affini

Consideriamo uno spazio affine A.

Se $\bar{B} \subset \bar{A}$ è un sottospazio vettoriale e $p \in A$, allora poniamo

$$B = p + \bar{B} \equiv \{p + v \mid v \in \bar{B}\} \subset A.$$

In particolare, per ogni $p \in A$, possiamo scrivere

$$A = p + \bar{A}.$$

DEFINIZIONE. Un *sottospazio affine* è definito come un sottinsieme $B \subset A$, del tipo

$$B = p + \bar{B},$$

dove $\bar{B} \subset \bar{A}$ è un sottospazio vettoriale e $p \in A$. ♣

Se $B \subset A$ è un sottospazio affine e $p \in B$, allora si dice che B *passa per* p.

PROPOSIZIONE. Sia $B = p + \bar{B}$ un sottospazio affine. Allora, valgono i seguenti fatti:

1) per ogni $q \in B$, abbiamo

$$B = q + \overline{B};$$

2) se $B = p + \overline{B}'$, allora

$$\overline{B}' = \overline{B};$$

3) la terna $(B, \overline{B}, \tau)$ risulta essere uno spazio affine. □

DEFINIZIONE. Siano B e C due sottospazi affini di A. Si dice che B e C sono *paralleli* se uno dei due spazi vettoriali $\overline{B}$ o $\overline{C}$ è un sottospazio vettoriale dell'altro. ♣

Dunque, se B e C sono due sottospazi affini di A paralleli, abbiamo esattamente tre casi:

1) $\dim B = \dim C \quad \Leftrightarrow \quad \overline{B} = \overline{C};$

2) $\dim B < \dim C \quad \Leftrightarrow \quad \overline{B} \subset \overline{C};$

3) $\dim B > \dim C \quad \Leftrightarrow \quad \overline{B} \supset \overline{C}.$

Se $B \subset A$ è un sottospazio affine e $p \in A$, allora esiste un unico sottospazio affine $C \subset A$ con la stessa dimensione di B e passante per p; esattamente, abbiamo:

$$C = p + \overline{B}.$$

LEMMA. Se $\overline{A}$ si decompone nella somma diretta di due sottospazi vettoriali

$$\overline{A} = \overline{B} \oplus \overline{C}$$

e $B \subset A$ è un sottospazio affine, allora ogni punto p di A si scrive in uno ed in solo modo come la somma

$$p = q + v$$

di un punto q di B e di un vettore v di $\overline{C}$.

Viceversa, se ogni punto p di A si scrive in uno ed in solo modo come la somma

$$p = q + v$$

di un punto q di un sottospazio affine $B \subset A$ e di un vettore v di un sottospazio vettoriale $\overline{C} \subset \overline{A}$, allora $\overline{A}$ si decompone nella somma diretta dei due sottospazi vettoriali $\overline{B}$ e $\overline{C}$

$$\overline{A} = \overline{B} \oplus \overline{C}.$$ ❑

DEFINIZIONE. Quando le condizioni precedenti sono verificate diciamo che A è la *somma diretta* del sottospazio affine $B \subset A$ e del sottospazio vettoriale $\overline{C} \subset \overline{A}$ e scriviamo

$$A = B \oplus \overline{C}.$$ ♣

PROPOSIZIONE. Se A si decompone nella somma diretta

$$A = B \oplus \overline{C},$$

allora abbiamo le due proiezioni naturali

$$A \to B : p \mapsto q \qquad A \to \overline{C} : p \mapsto v.$$

Abbiamo inoltre l'inclusione naturale

$$B \hookrightarrow A;$$

invece, non abbiamo un'inclusione naturale $\overline{C} \hookrightarrow A$; tuttavia, la scelta di un punto $q \in B$, induce l'inclusione

$$\overline{C} \hookrightarrow A : v \mapsto q + v.$$ ❑

Si noti che, per gli spazi vettoriali, abbiamo la nozione di decomposizione in somma diretta di due sottospazi vettoriali; invece, per gli spazi affini, abbiamo la nozione di decomposizione in somma diretta di un sottospazio affine e di un sottospazio vettoriale (dello spazio dei vettori liberi). La differenza dei due casi consiste nel fatto che abbiamo la somma di due vettori e di un punto e di un vettore, ma non di due punti.

3. Applicazioni affini

Consideriamo due spazi affini A e B.

LEMMA. Sia $f : A \to B$ un'applicazione, $\overline{f} : \overline{A} \to \overline{B}$ ed $\overline{f}' : \overline{A} \to \overline{B}$ due applicazioni lineari e $p \in A$ un punto, tali che

$$f(p+h) = f(p) + \bar{f}(h) \qquad f(p+h) = f(p) + \bar{f}'(h) \qquad \forall h \in \bar{A}.$$

Allora,

$$\bar{f} = \bar{f}'.$$

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo

$$0 = f(p+h) - f(p+h) = f(p) + \bar{f}(h) - f(p) - \bar{f}'(h) = \bar{f}(h) - \bar{f}'(h),$$

da cui segue

$$\bar{f}(h) = \bar{f}'(h).$$ ❑

LEMMA. Sia $f : A \to B$ un'applicazione, $\bar{f} : \bar{A} \to \bar{B}$ un'applicazione lineare e $p \in A$ un punto, tali che

$$f(p+h) = f(p) + \bar{f}(h) \qquad \forall h \in \bar{A}.$$

Allora, per ogni altro punto $q \in A$, abbiamo

$$f(q+h) = f(q) + \bar{f}(h) \qquad \forall h \in \bar{A}.$$

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo

$$f(q+h) = f(p+q-p+h) = f(p) + \bar{f}(q-p+h) = f(p) + \bar{f}(q-p) + \bar{f}(h) =$$

$$= f(q) + \bar{f}(h).$$ ❑

DEFINIZIONE. Un'applicazione $f : A \to B$ è detta *affine* se

$$f(p+h) = f(p) + \bar{f}(h) \qquad \forall h \in \bar{A},$$

dove

$$\bar{f} : \bar{A} \to \bar{B}$$

è un'applicazione lineare e $p \in A$. L'applicazione lineare $\bar{f}$, che è univocamente definita e non dipende da $p \in A$ (in virtù dei lemmi precedenti), è detta la *derivata* di f. ♣

Dunque, un'applicazione affine $f : A \to B$ determina i seguenti oggetti:

- il valore $f(p) \in B$ che essa assume in un certo punto (comunque scelto) $p \in A$,
- la sua "*derivata*" $\bar{f} : \bar{A} \to \bar{B}$.

Viceversa, comunque scelti, un punto $p \in A$, un punto $b \in B$ ed un'applicazione lineare $\bar{f} : \bar{A} \to \bar{B}$, otteniamo l'applicazione affine

$$f : A \to B : q \mapsto b + \bar{f}(q - p).$$

Indichiamo l'insieme delle applicazioni affini $A \to B$ con

$$\mathcal{A}(A,B) \equiv \{f : A \to B \mid f \text{ affine}\}.$$

Si vede facilmente che l'insieme $\mathcal{A}(\mathrm{A},\bar{B})$ delle applicazioni affini $A \to \bar{B}$ risulta essere in modo naturale uno spazio vettoriale.

Inoltre, l'insieme $\mathcal{A}(A,B)$ delle applicazioni affini $f : A \to B$ risulta essere in modo naturale uno spazio affine il cui spazio dei vettori liberi è lo spazio vettoriale $\mathcal{A}(\mathrm{A},\bar{B})$ delle applicazioni affini $A \to \bar{B}$.

Pertanto, se

$$\dim A = n \quad \dim B = m,$$

allora

$$\dim \mathcal{A}(A,B) = n + n\, m.$$

PROPOSIZIONE. Ogni applicazione costante $f : A \to B$ è affine e la sua derivata è l'applicazione nulla $0 = \bar{f} : \bar{A} \to \bar{B}$.

Ogni applicazione lineare $f : \bar{A} \to \bar{B}$ è affine e coincide con la propria derivata.

L'applicazione identità $\mathrm{id}_A : A \to A$ è affine e la sua derivata è l'applicazione identità

$$\mathrm{id}_{\bar{A}} : \bar{A} \to \bar{A}.$$

Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ sono applicazioni affini, allora la loro composizione $g \circ f : A \to C$ è un'applicazione affine e la sua derivata è la composizione delle derivate

$$\bar{g} \circ \bar{f} : \bar{A} \to \bar{C}. \qquad \square$$

PROPOSIZIONE. Sia $f : A \to B$ un'applicazione affine.

Se $A' \subset A$ è un sottospazio affine, allora l'immagine $f(A') \subset B$ è un sottospazio affine il cui spazio dei vettori liberi è il sottospazio vettoriale $\bar{f}(\bar{A}') \subset \bar{B}$.

Se $B' \subset B$ è un sottospazio affine, allora la preimmagine $f^{-1}(B') \subset A$ è un sottospazio affine il cui spazio dei vettori liberi è il sottospazio vettoriale $\bar{f}^{-1}(\bar{B}') \subset \bar{A}$. ❑

COROLLARIO. Sia $f : A \to B$ un'applicazione affine e $b \in B$. Allora, la preimmagine $f^{-1}(b) \subset A$ è un sottospazio affine il cui spazio dei vettori liberi è il sottospazio vettoriale $\ker \bar{f} \subset \bar{A}$. Pertanto, possiamo scrivere

$$f^{-1}(b) = a + \ker \bar{f},$$

dove $p \in A$ è un qualunque punto tale che $f(a) = b$. ❑

Il precedente risultato non è altro che la generalizzazione del teorema di Rouché-Capelli agli spazi affini.

PROPOSIZIONE. Sia $f : A \to B$ un'applicazione affine.

Allora f è, rispettivamente, iniettiva, suriettiva, biiettiva se e solo se la sua derivata è iniettiva, suriettiva, biiettiva. ❑

Le proiezioni di un prodotto cartesiano tra spazi affini

$$pr_1 : A \times B \to A \qquad pr_2 : A \times B \to B$$

sono applicazioni affini ,le cui derivate sono le proiezioni

$$pr_1 : \bar{A} \times \bar{B} \to \bar{A} \qquad pr_2 : \bar{A} \times \bar{B} \to \bar{B}.$$

3. Primi esempi di applicazioni affini

Incominciamo a considerare il caso $A = \mathbb{R} = B$.

ESEMPIO. La più generale applicazione affine $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è del tipo

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \lambda \mapsto b + a\,\lambda$$

dove $a,b \in \mathbb{R}$. Essa è dunque un polinomio di primo grado.

Naturalmente, otteniamo

$$b = f(0) \qquad a = \frac{f(\lambda) - f(0)}{\lambda}, \quad \forall \lambda \neq 0.$$

Inoltre, f è invertibile se e solo se $a \neq 0$. ◇

Consideriamo poi il caso $A = \mathbb{R}$.

ESEMPIO. La più generale applicazione affine $f : \mathbb{R} \to B$ è del tipo

$$f : \mathbb{R} \to B : \lambda \mapsto b + v\,\lambda$$

dove $b \in B$, $v \in \bar{B}$. Essa rappresenta dunque un moto rettilineo uniforme con velocità v.

Naturalmente, otteniamo

$$b = f(0) \qquad v = \frac{f(\lambda) - f(0)}{\lambda}, \quad \forall \lambda \neq 0.$$ ◇

Consideriamo ora il caso $B = \mathbb{R}$.

ESEMPIO. La più generale applicazione affine $f : A \to \mathbb{R}$ è del tipo

$$f : A \to \mathbb{R} : p \mapsto b + \alpha(p-o)$$

dove $b \in \mathbb{R}$, $o \in A$, $\alpha \in \bar{A}^*$. Ovviamente, risulta $b = f(o)$.

Descriviamo geometricamente il comportamento della funzione f. Possono capitare solo i seguenti due casi.

- Sia $\alpha = 0$. Allora f è l'applicazione costante $f = b$.

- Sia $\alpha \neq 0$. Allora f è suriettiva. Inoltre, il nucleo di α è un sottospazio vettoriale $V \subset \bar{A}$ di dimensione $n - 1$. Pertanto, la funzione f è costante su ciascuno dei sottospazi affini di A (paralleli tra loro), il cui spazio dei vettori liberi è V. Inoltre, se consideriamo una qualunque retta trasversale rispetto a V, allora il valore assunto da f su ciascuno dei precedenti sottospazi affini è proporzionale allo spostamento su questa retta. E questo esaurisce lo studio della funzione. ◇

OSSERVAZIONE. Riferiamoci ancora all'esempio precedente e supponiamo che A sia uno spazio affine euclideo, ossia che sia data una metrica euclidea $g : \bar{A} \times \bar{A} \to \mathbb{R}$.

Allora, l'isomorfismo lineare

$$g^{\neq} : \bar{A}^* \to \bar{A} : \alpha \mapsto g^{\neq}(\alpha) \equiv v$$

caratterizzato da

$$g(v, h) = \alpha(h) \qquad \forall h \in \bar{A},$$

permette di riscrivere l'espressione di f nella forma

$$f : A \to \mathbb{R} : p \mapsto b + v \cdot (p - o).$$

Descriviamo geometricamente il comportamento della funzione f. Possono capitare solo i seguenti due casi.

- Sia $v = 0$. Allora f è l'applicazione costante $f = b$.

- Sia $v \neq 0$. Allora f è suriettiva. Inoltre, la funzione f è costante su ciascuno dei sottospazi affini di A (paralleli tra loro) di dimensione $n - 1$, che sono ortogonali a v. La variazione del valore assunto da f sui precedenti sottospazi affini è proporzionale alla distanza tra questi sottospazi. La direzione parallela a v è quella per la quale la precedente variazione è massima, a parità di spostamento. La norma di v è data dal rapporto

$$\|v\| = \frac{f(p + \lambda n) - f(p)}{\lambda}, \quad \forall \lambda \neq 0,$$

dove n è il versore di v (definito a meno del segno). E questo esaurisce lo studio della funzione. ◇

Il precedente vettore v è detto il *gradiente* della funzione f. Questo concetto può essere generalizzato facilmente al caso delle funzioni differenziabili.

Consideriamo infine il caso $A = B$.

ESEMPIO. Il più generale endomorfismo affine $f : A \to A$ è del tipo

$$f : A \to A : p \mapsto q + \varphi(p - o)$$

dove $b \in \mathbb{R}$, $o \in A$, $\varphi \in \mathrm{End}(\bar{A}) = \bar{A}^* \otimes \bar{A}$. Ovviamente, risulta $q = f(o)$.

La descrizione geometrica del comportamento dell'endomorfismo affine f può essere svolto in modo analogo ai casi precedenti, basandosi sullo studio dell'endomorfismo lineare φ. Negli esempi precedenti il rango della derivata poteva essere 0 o 1; ora il rango di φ può variare da 0 a n. ◇

OSSERVAZIONE. C'è un modo alternativo di descrivere gli endomorfismi affini. Infatti, un endomorfismo $f : A \to A$ determina l'applicazione

$$F : A \to \bar{A} : p \mapsto f(p) - p;$$

viceversa, un'applicazione affine $F : A \to \bar{A}$ determina l'endomorfismo

$$f : A \to A : p + F(p).$$

Ovviamente, le corrispondenze

$$f \mapsto F \qquad F \mapsto f$$

costituiscono una biiezione. Inoltre, F è un'applicazione affine se e solo se f è un'applicazione affine. ❑

4. Riflessioni e simmetrie [facoltativo]

Consideriamo una spazio affine A.

DEFINIZIONE. Una *riflessione* è definita come un'applicazione

$$f : A \to A$$

- affine, ossia tale che

$$f(q) = f(p) + Df(q - p) \qquad \forall p,q \in A,\ Df \in L(\bar{A},\bar{A}),$$

- involutiva, ossia tale che

$$f \circ f = \mathrm{id}_A,$$

ossia tale che

$$f(p) = q \qquad \Rightarrow \qquad f(q) = p \qquad\qquad \forall p \in A. ♣$$

Da queste due semplici proprietà seguono interessanti conseguenze. Cerchiamo di analizzarle, in modo da capire come operano geometricamente le riflessioni. Conviene fare questo studio da un punto di vista algebrico, ma, contemporaneamente, si può seguire ogni passo formale mediante una rappresentazione grafica, come indicato dalle figure.

Sia f una riflessione.

Innanzitutto, possiamo individuare due sottinsiemi privilegiati associati ad f. Denotiamo con

1) $$I \equiv \{p \in A \mid f(p) = p\} \subset A$$

il sottinsieme di A costituito dai punti che rimangono invariati sotto l'azione di f e con

2) $$\overline{S} \equiv \{h \in \overline{A} \mid h = f(p) - p,\ p \in A\} \subset \overline{A}$$

il sottinsieme di $\overline{A}$ costituito dai vettori che separano ciascun punto dalla sua immagine.

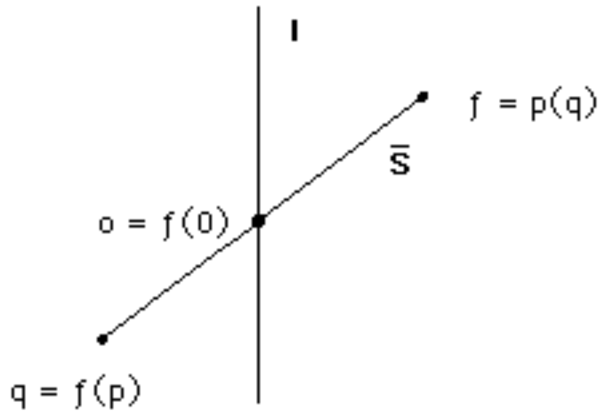

Fig.1. Riflessione; caso dim I = 1.

PROPOSIZIONE. Sia f una riflessione.
1) L'applicazione f è una biiezione e l'inversa è f stessa. Pertanto,

$$Df : \overline{A} \to \overline{A}$$

è un isomorfismo.
2) Il sottinsieme $I \subset A$ è un sottospazio affine.
3) Il sottinsieme $\overline{S} \subset \overline{A}$ è un sottospazio vettoriale.
4) Il sottospazio $\overline{I} \subset \overline{A}$ è un autospazio di Df con autovalore +1.
5) Il sottospazio $\overline{S} \subset \overline{A}$ è un autospazio di Df con autovalore −1.
6) Le due applicazioni

$$A \to I : p \mapsto p + \tfrac{1}{2}(f(p) - p) \qquad A \to \overline{S} : p \mapsto -\tfrac{1}{2}(f(p) - p)$$

mostrano che lo spazio affine A si decompone nella somma diretta

$$A = I \oplus \overline{S}.$$

7) Se

$$h \equiv f(p) - p \in \overline{S} \qquad e \qquad u \in \overline{I},$$

allora

$$h = f(p + u) - (p + u).$$

DIMOSTRAZIONE.
1) Segue immediatamente dalla definizione.
2) e 3) L'applicazione

$$\delta \equiv f - \mathrm{id}_A : A \to \bar{A} : p \mapsto f(p) - p$$

è affine perché è la differenza di due applicazioni affini. Inoltre, per definizione, I è il nucleo di δ ed $\bar{S}$ è l'immagine di δ.
4) Se $f(o) = o$, $f(o') = o'$, $h \equiv o' - o$, allora

$$Df(h) = Df(o' - o) = f(o') - f(o) = o' - o = h.$$

5) Se $h \equiv f(p) - p$, abbiamo

$$Df(h) = Df(f(p) - p) = f(f(p)) - f(p) = p - f(p) = -h.$$

6) Il punto $o \equiv p + \frac{1}{2}(f(p) - p) \in I$, perché

$$f(o) - o = f(p) - \frac{1}{2}(f(p) - p) - p - \frac{1}{2}(f(p) - p) = 0$$

ed il vettore $h \equiv -\frac{1}{2}(f(p) - p) \in \bar{S}$ per definizione. Inoltre, abbiamo

$$p = \left(p + \frac{1}{2}(f(p) - p)\right) - \frac{1}{2}(f(p) - p) \qquad \forall p \in A.$$

Infine, $\bar{I} \cap \bar{S} = \{0\}$, perché i due sottospazi sono autospazi con autovalori diversi.
7) Infatti

$$f(p + u) - (p + u) = f(p) + Df(u) - p - u = f(p) + u - p - u = f(p) - u. \qquad \square$$

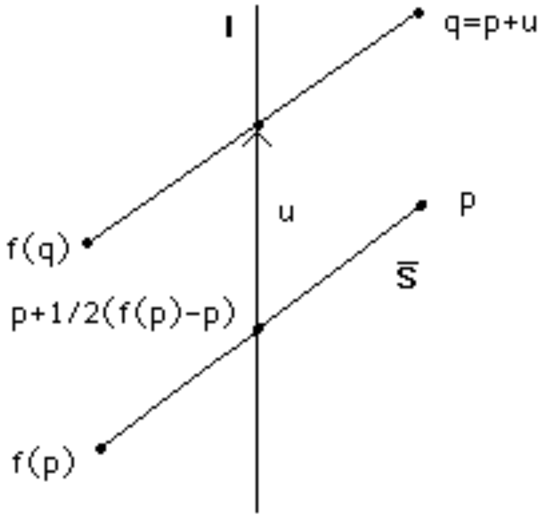

Fig.2. Proprietà della riflessione.

Il concetto di riflessione non dipende dalla metrica, ma solo dalla struttura affine di A. Se poi consideriamo supponiamo che A sia dotato di una metrica, allora possiamo individuare una famiglia privilegiata di riflessioni.

Supponiamo dunque che A sia uno spazio affine euclideo.

DEFINIZIONE. Una *simmetria* è definita come una riflessione

$$f : A \to A$$

tale che Df sia un'applicazione ortogonale. ♣

Dalla definizione segue immediatamente il seguente risultato.

PROPOSIZIONE. Se $f : A \to A$ è una simmetria, allora I ed $\bar{S}$ sono ortogonali. Pertanto f è completamente determinata da I. ❑

La proprietà precedente giustifica la terminologia corrente secondo cui si dice che f è una *simmetria rispetto ad* I. Così, secondo la dimensione di I, f può essere una simmetria rispetto ad un punto, o ad una retta, o ad un piano, eccetera. La simmetria rispetto a tutto lo spazio non è altro che l'identità.

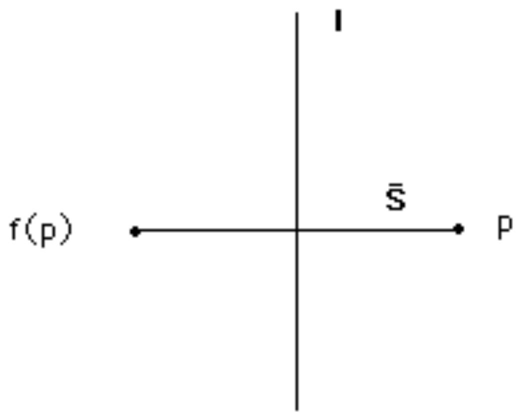

Fig. 3. Simmetria; caso dim I = 1.

Osserviamo che ogni riflessione f, per cui dim $I = 0$, è una simmetria rispetto ad un punto.

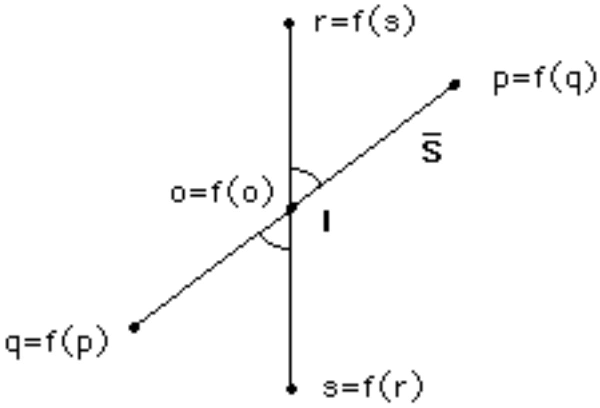

Fig.4. Simmetria rispetto ad un punto.

4. Trasformazioni rigide

Questo capitolo ha un'importante valore introduttivo per lo studio dei moti rigidi.

Sia A uno spazio affine euclideo.

DEFINIZIONE. Una *trasformazione rigida* di A è un'applicazione $f : A \to A$ che conserva le distanze, ossia tale che

$$\|f(q) - f(p)\| = \|q - p\|, \qquad \forall p,q \in A. ♣$$

LEMMA. Un'applicazione $f : A \to A$ conserva le distanze se e solo se conserva i prodotti scalari. Ossia, le due condizioni seguenti sono equivalenti

1) $$\|f(q) - f(p)\| = \|q - p\|, \qquad \forall p,q \in A;$$

2) $$\big(f(p+h) - f(p)\big) \cdot \big(f(p+k) - f(p)\big) = h \cdot k, \quad \forall p \in A,\ h,k \in \bar{A}.$$

DIMOSTRAZIONE. 1) ⇒ 2). Tenendo conto successivamente della bilinearità del prodotto scalare (teorema di Carnot) e della 1), abbiamo

$$2\,\big(f(p+h) - f(p)\big) \cdot \big(f(p+k) - f(p)\big) =$$

$$= -\Big(\big(f(p+h) - f(p)\big) - \big(f(p+k) - f(p)\big)\Big)^2$$

$$+ \big(f(p+h) - f(p)\big)^2 + \big(f(p+k) - f(p)\big)^2 \equiv$$

$$\equiv -\big(f(p+h) - f(p+k)\big)^2 + \big(f(p+h) - f(p)\big)^2 + \big(f(p+k) - f(p)\big)^2 =$$

$$= -\big((p+h) - (p+k)\big)^2 + \big((p+h) - p\big)^2 + \big((p+k) - p\big)^2 \equiv$$

$$\equiv -(h-k)^2 + h^2 + k^2 = = 2\,h \cdot k.$$

2) ⇒ 1). Per la definizione di norma abbiamo

$$\|f(q) - f(p)\|^2 := \big(f(p + (q-p)) - f(p)\big)^2 := (q-p)^2 = \|q - p\|^2.$$ ❑

TEOREMA. Un'applicazione $f : A \to A$ è rigida se e solo se è affine e la sua derivata $\bar{f} : \bar{A} \to \bar{A}$ è un endomofismo ortogonale. Ossia le due condizioni seguenti sono equivalenti:

1) $$\|f(q) - f(p)\| = \|q - p\|, \qquad \forall p,q \in A;$$

2) $$f(q) = f(p) + \bar{f}(q - p), \qquad \forall p,q \in A,$$

$$\bar{f}(h) \cdot \bar{f}(k) = h \cdot k, \qquad \forall h,k \in \bar{A}.$$

DIMOSTRAZIONE. 1) ⇒ 2). Sia $p \in \bar{A}$ e poniamo

$$\bar{f}(p) : \bar{A} \to \bar{A} : h \mapsto f(p+h) - f(p).$$

Allora, per il lemma precedente, $\bar{f}(p)$ conserva il prodotto scalare e, perciò, è anche un'applicazione lineare (vedi). D'altra parte, sappiamo che, se $f : A \to A$ è un'applicazione del tipo

$$f(q) = f(p) + \bar{f}(p)(q - p), \qquad \forall q \in A,$$

dove $\bar{f}(p) : \bar{A} \to \bar{A}$ è un'applicazione lineare, allora $\bar{f}(p)$ non dipende da p.

2) $\Rightarrow$ 1). Abbiamo

$$\|f(q) - f(p)\| = \|\bar{f}(q - p)\| = \|q - p\|. \qquad \square$$

Esempio. Sia $f : A \to A$ una trasformazione rigida. Supponiamo che l'endomorfismo ortogonale $\bar{f} : \bar{A} \to \bar{A}$ abbia un solo asse principale $r \subset \bar{A}$; supponiamo anche che l'autovalore di $\bar{f}$ sia 1 ed il determinante di f sia 1.

Descriviamo geometricamente l'applicazione f tramite l'applicazione associata (vedi)

$$F : A \to \bar{A} : p \mapsto f(p) - p.$$

Indichiamo con i simboli $^{\parallel}$ e $^{\perp}$ le proiezioni parallela ed ortogonale rispetto ad r.

Il nucleo dell'applicazione $\bar{F} : \bar{A} \to \bar{A}$ è la retta r, perché

$$\bar{F}(h) = \bar{f}(h) - h = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \bar{f}(h) = h.$$

L'immagine dell'applicazione $\bar{F} : \bar{A} \to \bar{A}$ è il sottospazio ortogonale ad r, perché

$$\bar{F}(h) = \bar{f}(h) - h = \bar{f}(h^{\parallel} + h^{\perp}) - h^{\parallel} - h^{\perp} = \bar{f}(h^{\parallel}) + \bar{f}(h^{\perp}) - h^{\parallel} - h^{\perp} = \bar{f}(h^{\perp}) - h^{\perp};$$

pertanto $\bar{F}^{\perp}$ risulta essere un endomorfismo del sottospazio ortogonale ad r, il quale, essendo iniettivo, risulta anche suriettivo.

Decomponiamo F nelle sue componenti parallela ed ortogonale ad r

$$F = F^{\parallel} + F^{\perp}.$$

Allora, l'applicazione $F^{\parallel} : A \to \bar{A}$ è costante, perché

$$F^{\parallel}(p + h) = F^{\parallel}(p) + \bar{F}^{\parallel}(h) = F^{\parallel}(p).$$

Inoltre, l'insieme dei punti $p \in A$, tali che $F^{\perp}(p) = 0$, ossia l'insieme dei punti soluzioni dell'equazione

$$F^{\perp}(p) \equiv F^{\perp}(o) + \bar{F}(p - o) = 0,$$

è una retta di A il cui spazio dei vettori liberi è r.

Questa retta è detta l'*asse di rotazione* di f.

Dunque, f risulta essere una rotazione di un angolo

$$\alpha = \hat{}(\bar{f}^{\perp})$$

intorno al suo asse di rotazione. ◇

Un procedimento simile sarà adottato per descrivere la velocità di un moto rigido. Anzi, il secondo procedimento potrebbe essere collegato direttamente al precedente, tramite una derivata rispetto al tempo di questo.

I risultati precedenti permettono di dimostrare che l'insieme delle trasformazioni rigide di uno spazio affine euclideo di dimensione 3 è una varietà differenziabile di dimensione 6.

Infatti, se utiliziamo la formula

$$f(p) = f(o) + \bar{f}(p - o),$$

allora 3 parametri servono per determinare $f(o)$ e 3 per determinare $\bar{f}$.

Se utiliziamo la formula

$$F(p) = F^{\parallel}(p) + F^{\perp}(p),$$

allora 4 parametri servono per determinare l'asse di rotazione, 1 parametro serve per determinare l'angolo di rotazione ed 1 parametro serve per determinare la componente traslatoria $F^{\parallel}$.