

Geometria delle masse

Marco Modugno

Dipartimento di Matematica Applicata “G. Sansone”

Via S. Marta 3, Firenze, Italia

email: marco.modugno@unifi.it

Appunti per gli studenti dei Corsi di Laurea in
“Ingegneria per l’Ambiente, le Risorse ed il Territorio”
“Ingegneria Edile”

Le illustrazioni grafiche sono state eseguite da D. Canarutto

Versione del 2012.09.20. - 12.25.

INDICE

1	Trasformazioni dello spazio	4
1.1	Trasformazioni	5
1.2	Applicazioni involutive	5
1.3	Applicazioni affini	5
1.4	Riflessioni	6
1.5	Trasformazioni ortogonali	9
1.5.1	Definizione e caratterizzazione	9
1.5.2	Determinante ed autovalori	9
1.5.3	Classificazione	10
1.6	Trasformazioni rigide	13
1.6.1	Definizione e caratterizzazione	13
1.6.2	Rotazioni	13
1.7	Simmetrie	15
2	Sistemi di masse	17
2.1	Sistemi di masse	18
2.1.1	Sistemi discreti di masse	18
2.1.2	Sistemi continui di masse	19
2.2	Invarianza dei sistemi di masse	20
2.3	Massa totale	23
3	Centro di massa	24
3.1	Definizione di centro di massa	25
3.2	Proprietà del centro di massa	28
3.2.1	Proprietà distributiva del centro di massa	28
3.2.2	Proprietà di convessità del centro di massa	29
3.2.3	Proprietà di invarianza del centro di massa	30
3.3	Esempi di centro di massa	31
4	Tensore d'inerzia	36
4.1	Definizioni basilari	37
4.2	Proprietà fondamentali	41
4.3	Rappresentazione matriciale	44

4.3.1	Rappresentazione in una base ortonormale	44
4.3.2	Cambiamento di base	48
4.3.3	Invarianti	51
4.4	Autovalori ed autovettori	53
4.4.1	Definizioni basilari	53
4.4.2	Ricerca degli autovalori ed autovettori	56
4.5	Rappresentazione grafica	60
4.6	Spostamento del polo	64
4.7	Proprietà di invarianza	67
4.7.1	Assi principali ed invarianza rispetto a simmetrie	67
4.7.2	Assi principali ed invarianza rispetto a rotazioni	68
4.8	Tensore d'inerzia di sistemi piani	72
4.9	Confronto tra i tensori delle tensioni e d'inerzia	76
4.10	Esempi di tensori d'inerzia	79

CAPITOLO 1

TRASFORMAZIONI DELLO SPAZIO

L'ambiente in cui studiamo la geometria delle masse è lo spazio affine euclideo \mathbf{P} della fisica classica.

Indichiamo lo spazio dei vettori liberi di \mathbf{P} con $\bar{\mathbf{P}}$.

Ci riferiremo ad un sistema di coordinate cartesiano $(x^1, x^2, x^3) = (x, y, z)$, di centro $o \in \mathbf{P}$, generato dalla base ortonormale $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3) = (\bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{e}_z) \subset \bar{\mathbf{P}}$.

In vista dello studio delle proprietà di invarianza dei sistemi di masse, introduciamo preliminarmente la nozione di trasformazione dello spazio \mathbf{P} , con particolare attenzione alle riflessioni, alle trasformazioni rigide ed alle simmetrie.

1.1 Trasformazioni

Introduciamo la nozione di trasformazione dello spazio dei punti e del relativo sottinsieme invariante.

1.1.1 Definizione. Un'applicazione $f : \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P}$ è detta una *trasformazione* se è invertibile. \square

1.1.2 Definizione. Data una trasformazione $f : \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P}$, definiamo il sottinsieme $I \subset \mathbf{P}$ dei *punti invarianti* rispetto all'azione di f

$$I := \{p \in \mathbf{P} \mid f(p) = p\} . \square$$

1.2 Applicazioni involutive

In vista del concetto di “riflessione”, introduciamo le trasformazioni involutive.

1.2.1 Definizione. Un'applicazione $f : \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P}$ è detta *involutiva* se, per ogni $p \in \mathbf{P}$,

$$f(p) = q \quad \Rightarrow \quad f(q) = p . \square$$

1.2.2 Proposizione. Un'applicazione involutiva $f : \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P}$ è invertibile e la sua inversa è

$$f^{-1} = f .$$

DIMOSTRAZIONE. Infatti, per ogni $p \in \mathbf{P}$, abbiamo

$$f(f(p)) = p . \text{ QED}$$

1.3 Applicazioni affini

Introduciamo ora la nozione di trasformazione affine.

1.3.1 Definizione. Un'applicazione $f : \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P}$ è detta *affine* se, per ogni $p \in \mathbf{P}$ ed $\bar{h} \in \bar{\mathbf{P}}$, vale l'uguaglianza

$$f(p + \bar{h}) = f(p) + Df(\bar{h}) ,$$

dove l'applicazione

$$Df : \bar{\mathbf{P}} \rightarrow \bar{\mathbf{P}} : \bar{h} \mapsto Df(\bar{h}) ,$$

detta la “derivata” di f , è un'applicazione lineare, ossia tale che, per ogni $\bar{h}, \bar{k} \in \bar{\mathbf{P}}$ e per ogni $r \in \mathbb{R}$, valgono le uguaglianze

$$Df(\bar{h} + \bar{k}) = Df(\bar{h}) + Df(\bar{k}) \quad \text{e} \quad Df(r\bar{h}) = r Df(\bar{h}) . \square$$

1.3.2 Proposizione. Se $f : \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P}$ è un'applicazione affine invertibile, allora anche l'inversa $f^{-1} : \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P}$ è affine. Inoltre, la sua derivata $Df : \bar{\mathbf{P}} \rightarrow \bar{\mathbf{P}}$ è invertibile e

$$(Df)^{-1} = D(f^{-1}).$$

DIMOSTRAZIONE. Segue facilmente dalla regola della catena per le derivate. QED

1.4 Riflessioni

Poi studiamo le riflessioni dello spazio \mathbf{P} rispetto ad un piano, o ad una retta, o ad un punto.

Al primo impatto gli aspetti formali di questo argomento possono apparire astratti e difficili, ma le illustrazioni grafiche ne mostrano gli aspetti semplici ed intuitivi.

1.4.1 Definizione. Definiamo *riflessione* un'applicazione involutiva ed affine

$$f : \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P} . \square$$

Vedi Figura 1.4.6.

1.4.2 Definizione. Data una riflessione $f : \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P}$, definiamo (oltre al sottinsieme $\mathbf{I} \subset \mathbf{P}$ dei *punti invarianti* rispetto all'azione di f) il sottinsieme $\bar{\mathbf{S}} \subset \bar{\mathbf{P}}$ dei *vettori separatori*, che separano ciascun punto dalla sua immagine rispetto all'azione di f

$$\bar{\mathbf{S}} := \{ \bar{v} \in \bar{\mathbf{P}} \mid \bar{v} = f(p) - p, p \in \mathbf{P} \} . \square$$

1.4.3 Proposizione. Data una riflessione $f : \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P}$, valgono i seguenti fatti.

- 1) Il sottinsieme $\mathbf{I} \subset \mathbf{P}$ è un sottospazio affine (cioè, tutto lo spazio, o un piano, o una retta, o un punto).
- 2) Il sottinsieme $\bar{\mathbf{S}} \subset \bar{\mathbf{P}}$ è un sottospazio vettoriale.
- 3) Lo spazio affine \mathbf{P} si decompone nella somma diretta

$$\mathbf{P} = \mathbf{I} \oplus \bar{\mathbf{S}} ;$$

cioè, ogni punto $p \in \mathbf{P}$ si può scrivere in uno ed in solo modo come una somma del tipo

$$p = \overset{\circ}{p} + \bar{p}, \quad \text{con} \quad \overset{\circ}{p} \in \mathbf{I}, \quad \bar{p} \in \bar{\mathbf{S}} .$$

Più esplicitamente, per ogni $p \in \mathbf{P}$, abbiamo

$$\overset{\circ}{p} = p + \frac{1}{2} (f(p) - p) \quad \text{e} \quad \bar{p} = \frac{1}{2} (p - f(p)) .$$

- 4) Per ogni $p \in \mathbf{P}$, il punto $\overset{\circ}{p}$ è il punto medio del segmento $(p, f(p))$ ed è il punto d'intersezione di tale segmento con il sottospazio $\mathbf{I} \subset \mathbf{P}$.

DIMOSTRAZIONE. [Facoltativa.]

1) Il sottinsieme \mathbf{I} è il nucleo dell'applicazione affine $f - \text{id} : \mathbf{P} \rightarrow \bar{\mathbf{P}} : p \mapsto f(p) - p$.

2) Il sottinsieme $\bar{\mathbf{S}}$ è l'immagine dell'applicazione affine $f - \text{id} : \mathbf{P} \rightarrow \bar{\mathbf{P}} : p \mapsto f(p) - p$.

3) Sia $p \in \mathbf{P}$.

a) Abbiamo $\overset{\circ}{p} := p + \frac{1}{2}(f(p) - p) \in \mathbf{I}$. Infatti,

$$\begin{aligned} f(\overset{\circ}{p}) &= f(p) + \frac{1}{2} Df(f(p) - p) \\ &= f(p) + \frac{1}{2} (f(f(p)) - f(p)) \\ &= f(p) + \frac{1}{2} (p - f(p)) \\ &= f(p) + (p - f(p)) + \frac{1}{2} (p - f(p)) - (p - f(p)) \\ &= p + \frac{1}{2} (f(p) - p). \end{aligned}$$

b) Abbiamo $\bar{p} := \frac{1}{2}(f(p) - p) \in \bar{\mathbf{S}}$, perché $f(p) - p \in \bar{\mathbf{S}}$.

c) Abbiamo

$$\overset{\circ}{p} + \bar{p} = p + \frac{1}{2}(f(p) - p) + \frac{1}{2}(p - f(p)) = p.$$

d) Siano $p + \bar{h} = q + \bar{k}$, con $p, q \in \mathbf{I}$ e $\bar{h}, \bar{k} \in \bar{\mathbf{S}}$. Dimostriamo che $p = q$ e $\bar{h} = \bar{k}$.

L'uguaglianza $p + \bar{h} = q + \bar{k}$ implica $p - q = \bar{k} - \bar{h}$ e quindi $Df(p - q) = Df(\bar{k} - \bar{h})$.

D'altra parte, per definizione di $\bar{\mathbf{S}}$, possiamo scrivere $\bar{h} = f(a) - a$ e $\bar{k} = f(b) - b$ ed abbiamo le uguaglianze

$$\begin{aligned} Df(p - q) &= f(p) - f(q) \\ &= p - q \\ Df(\bar{k} - \bar{h}) &= Df(f(b) - b) - Df(f(a) - a) \\ &= (f(f(b)) - f(b)) - (f(f(a)) - f(a)) \\ &= (b - f(b)) - (a - f(a)) \\ &= -(\bar{k} - \bar{h}). \end{aligned}$$

Perciò, l'uguaglianza $Df(p - q) = Df(\bar{k} - \bar{h})$ implica $p - q = -(\bar{k} - \bar{h})$.

Allora, l'ipotesi $p - q = \bar{k} - \bar{h}$ e l'uguaglianza $p - q = -(\bar{k} - \bar{h})$ implicano $p = q$ e $\bar{h} = \bar{k}$.

4) Il punto $\overset{\circ}{p}$ è il punto medio del segmento $(p, f(p))$ perché $\overset{\circ}{p} - p = \frac{1}{2}(f(p) - p)$.

Inoltre, per dimostrare che $\overset{\circ}{p}$ è il punto d'intersezione di tale segmento con il sottospazio $\mathbf{I} \subset \mathbf{P}$, parametrizziamo i punti $c(\lambda)$ del segmento $(f(p) - p)$ mediante l'uguaglianza

$$c(\lambda) = p + \lambda(f(p) - p), \quad \text{con} \quad 0 \leq \lambda \leq 1.$$

Allora, il punto d'intersezione è il punto $c(\lambda)$ tale che $f(c(\lambda)) = c(\lambda)$, cioè tale che

$$f\left(p + \lambda(f(p) - p)\right) = p + \lambda(f(p) - p),$$

cioè tale che

$$f(p) + \lambda Df(f(p) - p) = p + \lambda(f(p) - p),$$

cioè tale che

$$f(p) + \lambda(f(f(p)) - f(p)) = p + \lambda(f(p) - p),$$

cioè tale che

$$f(p) + \lambda(p - f(p)) = p + \lambda(f(p) - p),$$

cioè tale che

$$p - f(p) = 2\lambda(p - f(p)),$$

cioè tale che

$$\lambda = 1/2. \text{ QED}$$

1.4.4 Corollario. Un sottospazio affine $I \subset P$ ed un sottospazio vettoriale $\bar{S} \subset \bar{P}$, tali che

$$P = I \oplus \bar{S},$$

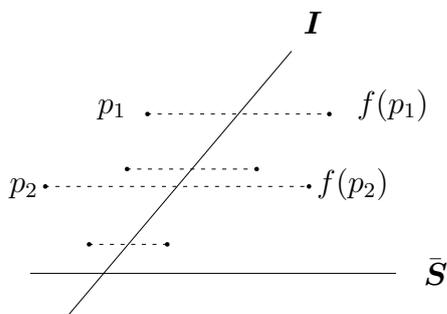
determinano univocamente la riflessione

$$f : P \simeq I \oplus \bar{S} \rightarrow P : p \simeq (\overset{o}{p}, \bar{p}) \mapsto p + 2\bar{p}.$$

Ovviamente, i due sottospazi dati I ed \bar{S} risultano essere il sottospazio dei punti invarianti ed il sottospazio dei vettori separatori della riflessione f definita quì sopra. \square

1.4.5 Corollario. Possiamo avere i seguenti casi di riflessioni.

- 1) Riflessione rispetto ad un punto o : in tal caso $I = \{o\}$ ed $\bar{S} = \bar{P}$.
- 2) Riflessione rispetto ad una retta r , “trasversalmente” ad un piano π : in tal caso, $I = r$ ed $\bar{S} = \pi$.
- 3) Riflessione rispetto ad un piano π , “trasversalmente” ad una retta r : in tal caso, $I = \pi$ ed $\bar{S} = r$.
- 4) Riflessione rispetto a tutto lo spazio P : in tal caso banale, la riflessione f è l'identità ed inoltre $I = P$ ed $\bar{S} = \{\bar{0}\}$. \square



1.4.6 Figura. Illustrazione di una riflessione.

1.5 Trasformazioni ortogonali

Ora studiamo le trasformazioni ortogonali dello spazio vettoriale \bar{P} .

1.5.1 Definizione e caratterizzazione

1.5.1 Definizione. Un'applicazione

$$\widehat{f} : \bar{P} \rightarrow \bar{P} : \bar{h} \mapsto \widehat{f}(\bar{h})$$

è detta *ortogonale* se conserva i prodotti scalari, ossia se, per ogni $\bar{h}, \bar{k} \in \bar{P}$, vale l'uguaglianza

$$\widehat{f}(\bar{h}) \cdot \widehat{f}(\bar{k}) = \bar{h} \cdot \bar{k} . \square$$

1.5.2 Teorema. Un'applicazione ortogonale $\widehat{f} : \bar{P} \rightarrow \bar{P}$ è lineare.

DIMOSTRAZIONE. [Omessa].

Per la dimostrazione rimandiamo al capitolo di algebra lineare delle dispense sui sistemi continui. QED

1.5.3 Proposizione. Un'applicazione $\widehat{f} : \bar{P} \rightarrow \bar{P}$ è ortogonale se e solo se è invertibile e la sua inversa è uguale alla trasposta

$$\widehat{f} \circ \widehat{f}^t = \text{id} .$$

DIMOSTRAZIONE. [Omessa].

Per la dimostrazione rimandiamo al capitolo di algebra lineare delle dispense sui sistemi continui. QED

1.5.2 Determinante ed autovalori

1.5.4 Corollario. Il determinante di un'applicazione ortogonale $\widehat{f} : \bar{P} \rightarrow \bar{P}$ è

$$\det \widehat{f} = \pm 1 .$$

DIMOSTRAZIONE. L'uguaglianza $\widehat{\text{id}} = \widehat{f} \circ \widehat{f}^t$ implica

$$1 = \det \widehat{\text{id}} = (\det \widehat{f}) (\det \widehat{f}^t) = (\det \widehat{f}) (\det \widehat{f}) = (\det \widehat{f})^2 ,$$

da cui otteniamo

$$\det \widehat{f} = \pm 1 . \text{ QED}$$

1.5.5 Proposizione. Un'applicazione ortogonale $\widehat{f} : \bar{P} \rightarrow \bar{P}$ ha almeno un autovettore \bar{u} ed il suo autovalore è

$$\lambda = \pm 1 .$$

DIMOSTRAZIONE. Lo spazio \bar{P} ha dimensione dispari 3. Perciò, per il teorema fondamentale dell'algebra, il polinomio caratteristico di \hat{f} ha almeno una radice reale λ . Perciò, esiste almeno un autovettore \bar{u} con autovalore λ .

Allora, le uguaglianze $\hat{f}(\bar{u}) = \lambda \bar{u}$ ed $\hat{f}(\bar{u}) \cdot \hat{f}(\bar{u}) = \bar{u} \cdot \bar{u}$ implicano

$$\lambda^2 = \lambda^2 (\bar{u} \cdot \bar{u}) = \hat{f}(\bar{u}) \cdot \hat{f}(\bar{u}) = \bar{u} \cdot \bar{u} = 1,$$

da cui otteniamo

$$\lambda = \pm 1. \text{ QED}$$

1.5.3 Classificazione

Possiamo classificare tutte le applicazioni ortogonali nel seguente modo.

1.5.6 Lemma. Consideriamo un'applicazione ortogonale $\hat{f} : \bar{P} \rightarrow \bar{P}$ ed un autovettore \bar{u} . Allora, l'applicazione \hat{f} manda vettori ortogonali ad \bar{u} in vettori ortogonali ad \bar{u} . Quindi possiamo considerare la restrizione di \hat{f} al piano $\bar{P}_{\bar{u}}^{\perp} \subset \bar{P}$ ortogonale ad \bar{u}

$$\hat{f}_{\bar{u}}^{\perp} : \bar{P}_{\bar{u}}^{\perp} \rightarrow \bar{P}_{\bar{u}}^{\perp},$$

Ovviamente, tale applicazione $\hat{f}_{\bar{u}}^{\perp}$ risulta, a sua volta, ortogonale.

DIMOSTRAZIONE. Per la Proposizione 1.5.5, abbiamo $\hat{f}(\bar{u}) = \pm \bar{u}$. Pertanto, se \bar{v} è un vettore ortogonale ad \bar{u} , allora abbiamo

$$\hat{f}(\bar{v}) \cdot \bar{u} = \hat{f}(\bar{v}) \cdot (\pm \hat{f}(\bar{u})) = \bar{v} \cdot (\pm \bar{u}) = 0,$$

per cui $\hat{f}(\bar{v})$ risulta ortogonale ad \bar{u} .

Infine, se \hat{f} conserva tutti i prodotti scalari, allora, in particolare, conserva i prodotti scalari del piano $\bar{P}_{\bar{u}}^{\perp} \subset \bar{P}$. QED

1.5.7 Teorema. Consideriamo un'applicazione ortogonale $\hat{f} : \bar{P} \rightarrow \bar{P}$ ed un autovettore \bar{u} .

Inoltre, consideriamo una base ortonormale $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$, tale che $\bar{e}_3 = \bar{u}$.

Allora, la matrice di \hat{f} in tale base è di uno dei seguenti quattro tipi:

$$\begin{aligned} (f_j^i)_1 &= \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & (f_j^i)_2 &= \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ \sin \phi & -\cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ (f_j^i)_3 &= \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, & (f_j^i)_4 &= \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ \sin \phi & -\cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

dove $0 \leq \phi < 2\pi$.

Abbiamo

$$\det(f_j^i)_1 = \det(f_j^i)_2 = 1 \quad \text{e} \quad \det(f_j^i)_3 = \det(f_j^i)_4 = -1.$$

DIMOSTRAZIONE. [Facoltativa.]

Per ipotesi, \bar{e}_3 è un autovettore di \hat{f} con autovalore $\lambda = \pm 1$. Perciò, abbiamo $f_3^3 = \pm 1$.

Inoltre, per il Lemma 1.5.6, la matrice (f_j^i) è una matrice a “blocchi”, di due matrici, rispettivamente 2×2 ed 1×1 .

La matrice 2×2 rappresenta l'applicazione ortogonale $\hat{f}_{\bar{u}}^{\perp}$ ristretta al piano $\bar{P}_{\bar{u}}^{\perp}$ ortogonale ad \bar{e}_3 . Per la Proposizione 1.5.3, questa matrice è la matrice di un'applicazione ortogonale se e solo se soddisfa l'uguaglianza

$$\begin{pmatrix} f_1^1 & f_2^1 \\ f_1^2 & f_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1^1 & f_2^1 \\ f_1^2 & f_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Questa condizione è equivalente al sistema di tre equazioni non lineari nelle 4 incognite $f_1^1, f_2^1, f_1^2, f_2^2$

$$(f_1^1)^2 + (f_2^1)^2 = 1, \quad f_1^1 f_1^2 + f_2^1 f_2^2 = 0, \quad (f_1^2)^2 + (f_2^2)^2 = 1.$$

Mediante il metodo di sostituzione, si può vedere che le soluzioni di questo sistema sono di uno dei seguenti due tipi

$$(f_j^i) = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}, \quad (f_j^i) = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ \sin \phi & -\cos \phi \end{pmatrix}, \quad \text{con} \quad 1 \leq i, j \leq 2$$

dove $0 \leq \phi < 2\pi$. QED

1.5.8 Teorema. Se $\hat{f}: \bar{P} \rightarrow \bar{P}$ è una trasformazione ortogonale tale che $\det \hat{f} = 1$, allora esiste un autovettore con autovalore 1.

DIMOSTRAZIONE. Tenendo conto della Proposizione 1.5.5, sia \bar{u} un autovettore di \hat{f} con autovalore $\lambda = \pm 1$.

1) Se $\lambda = 1$, allora l'enunciato della Proposizione è vero, perché \bar{u} è un autovettore con autovalore $\lambda = 1$.

2) Se $\lambda = -1$, allora, per l'ipotesi $\det \hat{f} = 1$ e per il Teorema 1.5.7, la matrice di \hat{f} in una base adattata ad \bar{u} è del tipo

$$(f_j^i)_2 = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ \sin \phi & -\cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Se $\phi = 0$, allora

$$\bar{u}' = \bar{e}_1$$

è un autovettore il cui autovalore è $\lambda = 1$.

b) Se $\phi \neq 0$, allora un semplice calcolo algebrico di ricerca di autovettori mostra che il vettore

$$\bar{u}' = \bar{e}_1 + \frac{1 - \cos \phi}{\sin \phi} \bar{e}_2$$

è un autovettore il cui autovalore è $\lambda = 1$. QED

Il precedente risultato permette di semplificare la classificazione ottenuta nel precedente Teorema 1.5.7, scegliendo una base ortonormale opportuna.

1.5.9 Corollario. Se $\widehat{f} : \bar{P} \rightarrow \bar{P}$ è un'applicazione ortogonale, allora esiste una base ortonormale $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$, tale che la matrice di \widehat{f} è di uno dei seguenti due tipi:

$$(f_j^i)_+ = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (f_j^i)_- = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ \sin \phi & -\cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

dove $0 \leq \phi < 2\pi$.

Abbiamo

$$\det(f_j^i)_+ = 1 \quad \text{e} \quad \det(f_j^i)_- = -1.$$

DIMOSTRAZIONE. Sia \bar{u} l'autovettore con autovalore $\lambda = 1$. Se scegliamo una base ortonormale $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ tale che $\bar{e}_3 = \bar{u}/\|\bar{u}\|$, allora, per il Teorema 1.5.7, abbiamo i seguenti due casi:

- se $\det \widehat{f} = +1$, allora $(f_j^i) = (f_j^i)_1$
- se $\det \widehat{f} = -1$, allora $(f_j^i) = (f_j^i)_4$. QED

1.6 Trasformazioni rigide

Successivamente, studiamo le trasformazioni rigide dello spazio \mathbf{P} .

In pratica le trasformazioni rigide sono rotazioni attorno ad una retta, o riflessioni, o composizioni di esse.

1.6.1 Definizione e caratterizzazione

1.6.1 Definizione. Definiamo *trasformazione rigida* un'applicazione

$$f : \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P}$$

che mantiene inalterate le distanze tra i punti di \mathbf{P} , ossia un'applicazione che soddisfa la seguente proprietà, per ogni $p, q \in \mathbf{P}$,

$$\|f(p) - f(q)\| = \|p - q\|. \square$$

1.6.2 Teorema. Un'applicazione $f : \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P}$ è una trasformazione rigida se e solo se è affine e la sua derivata è un operatore ortogonale, ossia se e solo se, per ogni $p \in \mathbf{P}$ ed $\bar{h} \in \bar{\mathbf{P}}$, vale l'uguaglianza

$$f(p + \bar{h}) = f(p) + Df(\bar{h}),$$

dove $Df : \bar{\mathbf{P}} \rightarrow \bar{\mathbf{P}}$ è un'applicazione ortogonale.

DIMOSTRAZIONE. [Omessa.]

Per la dimostrazione rimandiamo al capitolo di algebra lineare delle dispense sui sistemi continui. QED

1.6.2 Rotazioni

1.6.3 Definizione. Definiamo *rotazione attorno ad una retta r* una trasformazione rigida $f : \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P}$ tale che

$$1) \quad \forall p \in r, \quad f(p) = p,$$

$$2) \quad \det Df = 1. \square$$

Vale il seguente importante risultato.

1.6.4 Teorema. [Eulero.] Ogni trasformazione rigida $f : \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P}$ tale che $\det Df = 1$ è una rotazione attorno ad una certa retta r .

DIMOSTRAZIONE. Segue immediatamente dal Teorema 1.5.8. QED

1.6.5 Proposizione. Consideriamo una rotazione $f : \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P}$ attorno ad una retta r . Scegliamo inoltre un sistema di coordinate cartesiano adattato alla retta r , ossia con

il polo $o \in r$ ed il versore \bar{e}_3 parallelo ad r . Allora, l'espressione in coordinate di f è del tipo

$$\begin{pmatrix} f^1 \\ f^2 \\ f^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}, \quad \text{con} \quad 0 \leq \phi < 2\pi.$$

DIMOSTRAZIONE. Per il Teorema 1.6.2, e per l'ipotesi $f(o) = o$, abbiamo

$$f(p) = f(o) + Df(p - o) = o + Df(p - o).$$

Allora, per il sistema di coordinate scelto, abbiamo

$$\begin{pmatrix} f^1 \\ f^2 \\ f^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Df_1^1 & Df_2^1 & Df_3^1 \\ Df_1^2 & Df_2^2 & Df_3^2 \\ Df_1^3 & Df_2^3 & Df_3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}.$$

Infine, per il Teorema 1.5.7, e per la definizione di rotazione, abbiamo

$$\begin{pmatrix} Df_1^1 & Df_2^1 & Df_3^1 \\ Df_1^2 & Df_2^2 & Df_3^2 \\ Df_1^3 & Df_2^3 & Df_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{ QED}$$

1.7 Simmetrie

Infine, studiamo le simmetrie di \mathbf{P} rispetto ad un piano, o ad una retta, o ad un punto.

1.7.1 Definizione. Definiamo *simmetria* una trasformazione rigida ed involutiva

$$f : \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P} . \square$$

Vedi Figura 1.7.6.

1.7.2 Proposizione. Una trasformazione rigida $f : \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P}$ è una simmetria se e solo se è una riflessione.

DIMOSTRAZIONE. Segue immediatamente dalla Definizione di applicazione involutiva 1.2.1, dalla Definizione di riflessione 1.4.1 e dal Teorema teorema sulle trasformazioni rigide. QED

1.7.3 Proposizione. Se $f : \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P}$ è una simmetria, allora \mathbf{I} e $\bar{\mathbf{S}}$ sono ortogonali.

DIMOSTRAZIONE. [Facoltativa.]

Se $p, q \in \mathbf{I}$ e $\bar{h} := f(a) - a \in \bar{\mathbf{S}}$, allora abbiamo

$$\begin{aligned} (q - p) \cdot \bar{h} &= (f(q) - f(p)) \cdot (f(a) - a) \\ &= (f(q) - f(p)) \cdot (f(a) - f(f(a))) \\ &= -Df(q - p) \cdot Df(f(a) - a) \\ &= -Df(q - p) \cdot Df(\bar{h}) \\ &= -(q - p) \cdot \bar{h}, \end{aligned}$$

che implica $(q - p) \cdot \bar{h} = 0$. QED

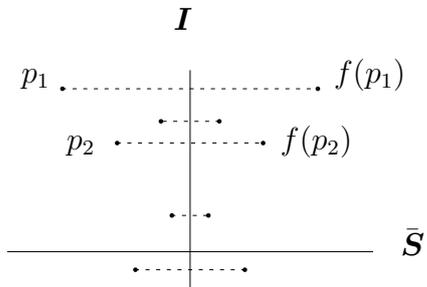
1.7.4 Corollario. Un sottospazio affine $\mathbf{I} \subset \mathbf{P}$ determina univocamente la simmetria

$$f : \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P} : p \mapsto p + 2(\overset{\circ}{p} - p),$$

dove $\overset{\circ}{p} \in \mathbf{I}$ è la proiezione ortogonale del punto p sul sottospazio affine \mathbf{I} . \square

1.7.5 Corollario. Possiamo avere i seguenti casi di simmetrie.

- 1) Simmetria rispetto ad un punto o .
- 2) Simmetria rispetto ad una retta r .
- 3) Simmetria rispetto ad un piano π .
- 4) Simmetria rispetto a tutto lo spazio \mathbf{P} : in tal caso banale, la simmetria f è l'identità. \square



1.7.6 Figura. Illustrazione di una simmetria.

CAPITOLO 2

SISTEMI DI MASSE

Consideriamo sistemi di masse discreti e continui.

Vedremo che molti concetti e risultati possono essere espressi in modo più elementare per i sistemi discreti, anche se in pratica siamo più interessati ad esempi concreti di sistemi continui. Quindi studiamo i sistemi discreti principalmente per motivi pedagogici. In pratica, il passaggio dai sistemi discreti ai sistemi continui può essere effettuato sostituendo degli integrali al posto di sommatorie.

Da un punto di vista teorico formale, ci sarebbe anche la possibilità di trattare il caso discreto ed il caso continuo in un unico contesto, usando un metodo adeguato di integrazione.

2.1 Sistemi di masse

Innanzitutto introduciamo i sistemi di masse.

Distinguiamo due casi: sistemi discreti e sistemi continui. Presentiamo i due casi in modo da evidenziare le loro differenze ed analogie.

In pratica, i sistemi discreti sono meno interessanti dal punto di vista applicativo, ma sono più adatti ad introdurre l'argomento in modo elementare. È facile trasportare al caso continuo le nozioni ed i risultati validi per il caso discreto, sostituendo la massa finita con la densità di massa e le somme con integrali.

2.1.1 Sistemi discreti di masse

Dunque, introduciamo innanzitutto il concetto di sistema discreto di masse.

2.1.1 Definizione. Un *sistema discreto di masse* è definito da una coppia

$$\Sigma := (\mathbf{D}, m),$$

dove

$$\mathbf{D} := (p_1, \dots, p_i, \dots, p_n) \subset \mathbf{P}$$

è un sottinsieme discreto di \mathbf{P} costituito da n punti, con $n \geq 1$, ed

$$m : \mathbf{D} \rightarrow \mathbb{R}^+ : p_i \mapsto m_i := m(p_i)$$

è una funzione strettamente positiva.

Usiamo la seguente terminologia:

- il sottinsieme discreto $\mathbf{D} \subset \mathbf{P}$ è detto il *dominio del sistema*,
- i punti $p_i \in \mathbf{D}$ sono detti i *punti materiali del sistema*,
- per ogni i , con $1 \leq i \leq n$, il numero positivo $m_i := m(p_i) \in \mathbb{R}^+$ è detto la *massa* del punto materiale p_i . \square

In altre parole, un *sistema discreto di masse* è costituito da un insieme di n coppie

$$(p_1, m_1), \dots, (p_i, m_i), \dots, (p_n, m_n), \quad \text{con} \quad p_i \in \mathbf{P}, \quad m_i \in \mathbb{R}^+, \quad n \geq 1.$$

Dunque, un sistema discreto di masse è costituito da un sistema discreto di punti, a ciascuno dei quali è attribuita una massa.

Diciamo che un sistema discreto di masse è *piano*, o *rettilineo*, se i suoi punti appartengono ad un piano, o ad una retta.

Diciamo che il sistema di masse è *non degenero* se $n > 2$ e se i suoi punti non sono allineati.

Se la funzione m è costante, ossia se $m_i = m_j$, per ogni $1 \leq i, j \leq n$, allora diciamo che il sistema è *omogeneo*.

2.1.2 Sistemi continui di masse

Introduciamo poi il concetto di sistema continuo di masse.

2.1.2 Definizione. Definiamo *sistema continuo di masse*, una coppia

$$\Sigma := (\mathbf{D}, \mu),$$

dove

$$\mathbf{D} \subset \mathbf{P}$$

è un sottinsieme aperto di \mathbf{P} e

$$\mu : \mathbf{D} \rightarrow \mathbb{R}^+ : p \mapsto \mu(p)$$

è una funzione strettamente positiva.

Usiamo la seguente terminologia:

- il sottinsieme aperto $\mathbf{D} \subset \mathbf{P}$ è detto il *dominio del sistema*,
- i punti $p \in \mathbf{D}$ sono detti i *punti materiali del sistema*,
- la funzione $\mu : \mathbf{D} \rightarrow \mathbb{R}^+$ è detta la *densità di massa*. \square

In altre parole, un *sistema continuo di masse* è costituito da un insieme di ∞ coppie

$$(p, \mu(p)), \quad \text{con} \quad p \in \mathbf{D} \subset \mathbf{P}, \quad \mu(p) \in \mathbb{R}^+,$$

dove $\mathbf{D} \subset \mathbf{P}$ è un sottinsieme aperto.

In pratica, occorrerà che \mathbf{D} e μ abbiano una “sufficiente regolarità”, in modo tale che abbiano senso e siano convergenti gli integrali che incontreremo in seguito.

La nozione di sistema continuo di masse può anche essere facilmente introdotta, in modo analogo, per sistemi bidimensionali (in particolare, piani) e per sistemi unidimensionali (in particolare, rettilinei).

Diciamo che il sistema di masse è *non degenero* se \mathbf{D} non è contenuto in una retta.

Se la funzione μ è costante, allora diciamo che il sistema è *omogeneo*.

2.2 Invarianza dei sistemi di masse

Studiamo l'invarianza dei sistemi di masse rispetto alle trasformazioni dello spazio.

2.2.1 Proposizione. Consideriamo un sistema discreto di masse $\Sigma := (\mathbf{D}, m)$, o un sistema continuo di masse $\Sigma := (\mathbf{D}, \mu)$, ed una trasformazione $f : \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P}$.

Allora, f determina un nuovo sistema discreto di masse, o continuo di masse,

$$\Sigma' := (\mathbf{D}', m'), \quad \text{o} \quad \Sigma' := (\mathbf{D}', \mu'),$$

dove

$$\mathbf{D}' := f(\mathbf{D}) \subset \mathbf{P}$$

e

$$m' := m \circ f^{-1} : \mathbf{D}' \rightarrow \mathbb{R}^+, \quad \text{o} \quad \mu' := \mu \circ f^{-1} : \mathbf{D}' \rightarrow \mathbb{R}^+.$$

In altre parole,

- 1) nel caso discreto, Σ' è costituito dalle coppie $(f(p_i), m_i)$,
- 2) nel caso continuo, Σ' è costituito dalle coppie $(f(p), \mu(p))$. \square

2.2.2 Definizione. Consideriamo un sistema discreto di masse $\Sigma := (\mathbf{D}, m)$, o un sistema continuo di masse $\Sigma := (\mathbf{D}, \mu)$, ed una trasformazione $f : \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P}$.

Diciamo che il sistema di masse è *invariante* rispetto ad f se,

$$\Sigma' = \Sigma,$$

ossia, più esplicitamente, se

$$\forall p_i \in \mathbf{D}, \quad \exists p_j \in \mathbf{D}, \quad \text{tale che} \quad f(p_i) = p_j,$$

o

$$\forall p \in \mathbf{D}, \quad \exists q \in \mathbf{D}, \quad \text{tale che} \quad f(p) = q,$$

ed inoltre

$$m_j = m_i, \quad \text{o} \quad \mu(f(p)) = \mu(p). \quad \square$$

Nelle sezioni seguenti vedremo che se il sistema di masse è invariante rispetto ad una riflessione, o ad una trasformazione rigida, o ad una simmetria, allora esso gode di interessanti proprietà.

2.2.3 Esempio. Consideriamo un sistema continuo bidimensionale omogeneo costituito da un triangolo.

1) Il sistema è invariante rispetto alla riflessione f la cui retta dei punti invarianti \mathbf{I} è la mediana di un lato e la cui retta dei vettori separatori $\bar{\mathbf{S}}$ è parallela a tale lato.

Nel caso particolare in cui il triangolo è isoscele e tale lato è la sua base, questa riflessione f è una simmetria.

2) Naturalmente, considerazioni analoghe valgono per gli altri due lati. \square

2.2.4 Esempio. Consideriamo un sistema continuo bidimensionale omogeneo costituito da un parallelogrammo.

1) Il sistema è invariante rispetto alla riflessione f la cui retta dei punti invarianti I è l'asse relativo a due lati paralleli e la cui retta dei vettori separatori S è parallela a tali due lati.

Nel caso particolare in cui il parallelogrammo è un rettangolo, questa riflessione f è una simmetria.

2) Naturalmente, considerazioni analoghe valgono per gli altri due lati. \square

2.2.5 Esempio. Consideriamo un sistema continuo bidimensionale omogeneo costituito da un disco il cui centro è o .

Allora, il disco è invariante rispetto alla simmetria il cui sottospazio dei punti invarianti I è costituito dal punto o .

Vedi Figura 2.2.8. \square

2.2.6 Esempio. Consideriamo un sistema continuo tridimensionale omogeneo costituito da un cilindro circolare obliquo il cui asse è la retta r .

Allora, il cilindro è invariante rispetto alla riflessione il cui sottospazio dei punti invarianti I è costituito dalla retta r ed il cui spazio dei vettori separatori è il piano parallelo alla base del cilindro.

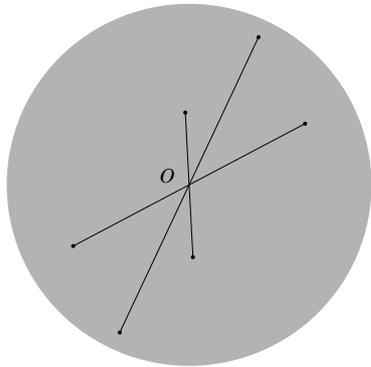
Nel caso particolare in cui il cilindro è retto, questa riflessione f è una simmetria. \square

2.2.7 Esempio. Consideriamo un sistema continuo bidimensionale costituito da un disco il cui centro è o e la cui funzione densità $\mu(p)$ dipenda solo dalla distanza $\|p - o\|$.

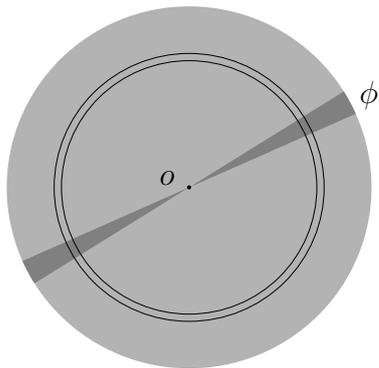
Allora, il disco è invariante rispetto alla simmetria il cui sottospazio dei punti invarianti I è costituito dal punto o .

Inoltre, il sistema di masse è invariante rispetto a qualunque rotazione rigida f attorno all'asse ortogonale al disco e passante per o .

Vedi Figura 3.2.7. \square



2.2.8 Figura. Illustrazione dell'invarianza rispetto ad una simmetria.



2.2.9 Figura. Illustrazione dell'invarianza rispetto ad una rotazione.

2.3 Massa totale

Consideriamo un sistema di masse discreto o continuo.

2.3.1 Definizione. La *massa totale del sistema* è il numero reale positivo

1) nel caso discreto,

$$m_0 := \sum_i m_i \in \mathbb{R}^+$$

2) nel caso continuo,

$$m_0 := \int_D \mu d\mathcal{V} \in \mathbb{R}^+ . \square$$

2.3.2 Definizione. Definiamo i seguenti rapporti:

1) nel caso discreto, le *masse relative* sono i numeri reali positivi

$$\rho_i := m_i/m_0 \in \mathbb{R}^+ ,$$

2) nel caso continuo, la *densità di massa relativa* è la funzione

$$\rho := \mu/m_0 : D \rightarrow \mathbb{R}^+ . \square$$

2.3.3 Proposizione. Abbiamo le seguenti identità:

1) nel caso discreto,

$$\sum_i \rho_i = 1 ,$$

2) nel caso continuo,

$$\int_D \rho d\mathcal{V} = 1 . \square$$

CAPITOLO 3

CENTRO DI MASSA

Il centro di massa di un sistema di masse è il punto “medio pesato” di tale sistema. Esso gode di varie proprietà interessanti.

3.1 Definizione di centro di massa

Innanzitutto, introduciamo il centro di massa mediante la sua proprietà caratteristica e poi lo troviamo esplicitamente mediante la scelta di un polo arbitrario.

Consideriamo un sistema di masse discreto.

3.1.1 Lemma. Esiste un unico punto $p_0 \in \mathbf{P}$ tale che

$$(3.1.1) \quad \sum_i \rho_i (p_i - p_0) = \bar{0}.$$

Scelto un qualunque “polo” $o \in \mathbf{P}$, il punto p_0 che soddisfa la precedente identità è espresso dalla seguente formula esplicita:

$$(3.1.2) \quad p_0 = o + \sum_i \rho_i (p_i - o),$$

ossia, in un sistema di coordinate cartesiane con centro nel polo,

$$(3.1.3) \quad x^j(p_0) = \sum_i \rho_i x^j(p_i).$$

DIMOSTRAZIONE. *Unicità.* Se p_0 e p'_0 soddisfano la formula 3.1.1, allora essi coincidono. Infatti, abbiamo

$$\bar{0} = \bar{0} - \bar{0} = \sum_i \rho_i (p_i - p_0) - \sum_i \rho_i (p_i - p'_0) = \left(\sum_i \rho_i \right) (p'_0 - p_0) = (p'_0 - p_0),$$

da cui deduciamo

$$p'_0 - p_0 = 0.$$

Esistenza. Il punto p_0 definito esplicitamente dalla formula 3.1.2 soddisfa l'equazione 3.1.1. Infatti, abbiamo

$$\begin{aligned} \sum_i \rho_i \left(p_i - \left(o + \sum_j \rho_j (p_j - o) \right) \right) &= \sum_i \rho_i (p_i - o) - \left(\sum_i \rho_i \right) \left(\sum_j \rho_j (p_j - o) \right) \\ &= \sum_i \rho_i (p_i - o) - \sum_j \rho_j (p_j - o) \\ &= 0. \text{ QED} \end{aligned}$$

3.1.2 Definizione. Definiamo *centro di massa* del sistema l'unico punto $p_0 \in \mathbf{P}$ che soddisfa la condizione 3.1.1. \square

Dunque, il centro di massa è il punto “*medio*” dei punti del sistema “*pesati*” tramite il “*peso*” ρ_i .

La formula 3.1.1 caratterizza il centro di massa mediante la sua proprietà fondamentale; ma, questa formula non fornisce un'espressione esplicita del centro di massa. La

formula 3.1.2 fornisce un'espressione esplicita del centro di massa; ma non conviene usare questa per definire il centro di massa, perché essa usa un polo che non è un elemento essenziale nel concetto di centro di massa.

3.1.3 Nota. Se nella formula 3.1.2 usiamo un differente polo o' , otteniamo lo stesso centro di massa p_0 . Questo fatto segue immediatamente dall'unicità del centro di massa; ma può anche essere verificato direttamente nel modo seguente:

$$\begin{aligned}
 o' + \sum_i \rho_i (p_i - o') &= (o + (o' - o)) + \sum_i \rho_i (p_i - (o + (o' - o))) \\
 &= o + (o' - o) + \sum_i \rho_i (p_i - o) - \left(\sum_i \rho_i \right) (o' - o) \\
 &= o + (o' - o) + \sum_i \rho_i (p_i - o) + (o' - o) \\
 &= o + \sum_i \rho_i (p_i - o). \square
 \end{aligned}$$

Osserviamo che il centro di massa può non essere un punto del sistema.

3.1.4 Esempio. Consideriamo un sistema costituito da due punti materiali. Vedi Figura 3.1.5.

Scegliendo come polo, rispettivamente, i punti $o := p_1$, oppure $o := p_2$, la formula 3.1.2 diventa

$$(3.1.4) \quad p_0 = p_1 + \rho_2 (p_2 - p_1),$$

$$(3.1.5) \quad p_0 = p_2 + \rho_1 (p_1 - p_2).$$

Dunque, il centro di massa è un punto interno del segmento (p_1, p_2) ed è situato ad una distanza dagli estremi data da

$$p_1 - p_0 = \rho_2 (p_1 - p_2) \quad \text{e} \quad p_2 - p_0 = \rho_1 (p_2 - p_1).$$

Nel caso particolare in cui $m_1 = m_2$, il centro di massa è il punto medio del segmento (p_1, p_2) .

Se le due masse sono diverse, il centro di massa è più vicino alla massa più grande.

Per controllo, possiamo verificare la formula 3.1.1, usando le due espressioni 3.1.4 e 3.1.5 del centro di massa:

$$\begin{aligned}
 &\rho_1 (p_1 - p_0) + \rho_2 (p_2 - p_0) = \\
 &= \rho_1 \left(p_1 - (p_2 + \rho_2 (p_2 - p_1)) \right) + \rho_2 \left(p_2 - (p_1 + \rho_1 (p_1 - p_2)) \right) \\
 &= \rho_1 (p_1 - p_1) - \rho_1 \rho_2 (p_2 - p_1) + \rho_2 (p_2 - p_2) - \rho_2 \rho_1 (p_1 - p_2) \\
 &= 0. \square
 \end{aligned}$$

$$p_1 \xrightarrow{\quad p_0 \quad} p_2 \quad m_2 = 2m_1$$

3.1.5 Figura. Illustrazione del centro di massa di un sistema di due punti.

Consideriamo poi un sistema di masse continuo.

La definizione di centro di massa, la sua costruzione esplicita e le altre proprietà possono essere ottenute in modo analogo al caso discreto.

Ci limitiamo ad enunciare il seguente Lemma e la conseguente Definizione, lasciando allo studente il compito di completare la discussione del caso continuo.

3.1.6 Lemma. Esiste un unico punto $p_0 \in \mathbf{P}$ tale che

$$(3.1.6) \quad \int_{\mathbf{D}} \rho \bar{r}_0 d\mathcal{V} = \bar{\mathbf{0}},$$

dove \bar{r}_0 è il campo vettoriale definito da $\bar{r}_0 : \mathbf{D} \rightarrow \bar{\mathbf{P}} : p \mapsto (p - p_0)$.

Scelto un qualunque “polo” $o \in \mathbf{P}$, il punto p_0 che soddisfa la precedente identità è espresso dalla seguente formula esplicita:

$$(3.1.7) \quad p_0 = o + \int_{\mathbf{D}} \rho \bar{r}_o d\mathcal{V},$$

dove \bar{r}_o è il campo vettoriale definito da $\bar{r}_o : \mathbf{D} \rightarrow \bar{\mathbf{P}} : p \mapsto (p - o)$, ossia, in un sistema di coordinate cartesiane con centro nel polo,

$$(3.1.8) \quad x^j(p_0) = \int_{\mathbf{D}} \rho x^j d\mathcal{V}. \square$$

3.1.7 Definizione. Definiamo *centro di massa* del sistema l’unico punto $p_0 \in \mathbf{P}$ che soddisfa la condizione 3.1.6. \square

3.2 Proprietà del centro di massa

Il centro di massa gode di alcune importanti proprietà.

3.2.1 Proprietà distributiva del centro di massa

Consideriamo un sistema di masse discreto S .

Dividiamo il sistema in due sottosistemi S' e S'' costituiti, rispettivamente, da n' e n'' punti materiali, con $n' + n'' = n$,

$$(m_i, p_i)_{1 \leq i \leq n'} \quad \text{e} \quad (m_j, p_j)_{n'+1 \leq j \leq n}.$$

Consideriamo le masse totali dei due sottosistemi

$$m'_0 := \sum_{1 \leq i \leq n'} m_i \quad \text{e} \quad m''_0 := \sum_{n'+1 \leq j \leq n} m_j$$

ed i centri di massa dei due sottosistemi

$$p'_0 \in \mathbf{P} \quad \text{e} \quad p''_0 \in \mathbf{P}.$$

Possiamo allora definire un nuovo sistema \widehat{S} costituito da due punti materiali (detto il *sistema dei due centri di massa parziali*)

$$(p'_0, m'_0) \quad \text{e} \quad (p''_0, m''_0).$$

I pesi relativi dei due punti materiali del sistema \widehat{S} sono

$$\rho' := m'/m_0 = \sum_{1 \leq i \leq n'} \rho_i \quad \text{e} \quad \rho'' := m''/m_0 = \sum_{1+n' \leq i \leq n} \rho_j.$$

3.2.1 Proposizione. [*Proprietà distributiva.*] Il centro di massa p_0 del sistema originale S coincide con il centro di massa del sistema indotto \widehat{S} .

DIMOSTRAZIONE. Scelto un polo $o \in \mathbf{P}$, il centro di massa \widehat{p}_0 del sistema \widehat{S} è dato da

$$\begin{aligned} \widehat{p}_0 &= o + \rho' (p'_0 - o) + \rho'' (p''_0 - o) \\ &= o + \sum_{1 \leq i \leq n'} \rho_i (p_i - o) + \sum_{1+n' \leq i \leq n} \rho_j (p_j - o) \\ &= o + \sum_{1 \leq h \leq n} \rho_h (p_h - o) \\ &= p_0. \text{ QED} \end{aligned}$$

La proprietà distributiva può essere estesa facilmente (per induzione) ad un qualunque numero di sottosistemi del sistema dato.

La proprietà distributiva è utile per il calcolo pratico del centro di massa di alcuni sistemi complessi, dividendoli in sottosistemi più semplici.

La precedente discussione può essere ripetuta facilmente, in modo analogo, per i sistemi continui.

3.2.2 Proprietà di convessità del centro di massa

Premettiamo alcune semplici nozioni sui sistemi convessi.

3.2.2 Definizione. Un sottinsieme $C \subset P$ è detto *convesso* se, per ogni coppia di punti $p, q \in C$, tutti i punti del segmento (p, q) appartengono al sottinsieme C . \square

3.2.3 Proposizione. L'intersezione $C' \cap C''$ di due sottinsiemi convessi $C', C'' \subset P$ è un sottinsieme convesso. \square

3.2.4 Corollario. Consideriamo un qualunque sottinsieme $P' \subset P$.

Il minimo sottinsieme convesso che contiene P' è l'intersezione di tutti i sottosistemi convessi che contengono P' . \square

Consideriamo ora un sistema di masse discreto S .

3.2.5 Proposizione. [*Proprietà di convessità.*] Il centro di massa del sistema S è un punto interno al minimo sottinsieme convesso $C \subset P$ che contiene i punti di S .

DIMOSTRAZIONE. [*Facoltativa.*]

Distinguiamo due casi.

Se $n = 1$, allora la Proposizione è banalmente vera.

Se $n \geq 2$, facciamo la dimostrazione per induzione rispetto ad n .

1) Sia $n = 2$. Allora la Proposizione segue immediatamente dall'Esempio 3.1.4.

2) Sia $n > 2$. Facciamo vedere che se abbiamo già dimostrato la Proposizione per un certo n' , allora essa vale anche per $n' + 1$. Vedi Figura 3.2.7.

A tale scopo, dividiamo il sistema in due sottosistemi S' e S'' costituiti rispettivamente da n' punti materiali e dal singolo punto materiale (p'', m'') . Siano p'_0 e $p''_0 = p''$ i centri di massa dei due sistemi parziali.

Allora, per la proprietà distributiva del centro di massa e per l'Esempio 3.1.4, il centro di massa p_0 di tutto il sistema S è interno al segmento (p'_0, p''_0) .

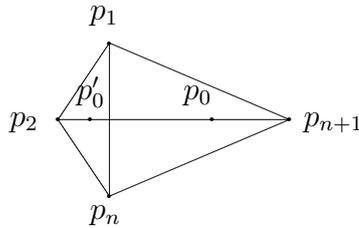
Come abbiamo supposto, p'_0 appartiene al minimo convesso C' che contiene S' e perciò appartiene al minimo convesso C che contiene S .

Ovviamente, anche il punto $p''_0 = p''$ appartiene al minimo convesso C che contiene S .

Perciò, tutti i punti del segmento (p'_0, p''_0) appartengono al convesso C . Quindi anche p_0 appartiene al convesso C . QED

3.2.6 Corollario. Se il sistema di masse è contenuto in un sottospazio affine di P (piano, retta, punto), allora il centro di massa appartiene a tale sottospazio. \square

La Proposizione precedente può essere dimostrata anche per un sistema continuo di punti materiali, riconducendoci al caso discreto, approssimando l'integrale 3.1.7 mediante una suddivisione del dominio \mathbf{D} in un numero finito di opportuni sottodomini.



3.2.7 Figura. Illustrazione della proprietà di convessità del centro di massa.

3.2.3 Proprietà di invarianza del centro di massa

Consideriamo un sistema discreto di masse.

3.2.8 Proposizione. Se il sistema è invariante rispetto ad una riflessione $f : \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P}$, allora il centro di massa p_0 appartiene al sottospazio affine invariante \mathbf{I} .

DIMOSTRAZIONE. Possiamo dividere il sistema in sottosistemi costituiti da due punti materiali (eventualmente coincidenti) invarianti rispetto ad f . Il centro di massa di ciascuno di questi sottosistemi è il relativo punto medio, il quale appartiene ad \mathbf{I} .

Per la proprietà distributiva, il centro di massa del sistema totale è il centro di massa di questi sottosistemi parziali. Esso appartiene ad \mathbf{I} perché \mathbf{I} è un sottospazio affine. QED

3.2.9 Corollario. Se f è una simmetria rispetto ad un punto o e se il sistema è invariante rispetto ad o , allora abbiamo $p_0 = o$. \square

La Proposizione ed il Corollario precedenti possono essere dimostrati anche per un sistema continuo di punti materiali, riconducendoci al caso discreto, approssimando l'integrale 3.1.7 mediante una suddivisione del dominio \mathbf{D} in un numero finito di opportuni sottodomini.

3.3 Esempi di centro di massa

Calcoliamo il centro di massa di alcuni esempi di sistemi continui notevoli.

Supponiamo che questi sistemi siano *omogenei*, ossia che la densità di massa sia costante.

Osserviamo che per un sistema omogeneo otteniamo

$$\rho := \frac{\mu}{m_0} = \frac{m_0}{V} \frac{1}{m_0} = \frac{1}{V},$$

dove V è il volume del dominio.

Nel caso bidimensionale, o nel caso unidimensionale, V denota l'area, o la lunghezza del dominio.

3.3.1 Esempio. [*Segmento.*] Consideriamo un sistema rettilineo omogeneo costituito da un segmento (A, B) .

Il centro di massa è il punto medio del segmento:

$$p_0 = A + \frac{1}{2}(B - A) = B + \frac{1}{2}(A - B).$$

DIMOSTRAZIONE. Segue immediatamente dalla Proposizione 3.2.8, per il fatto che il sistema è simmetrico rispetto al punto medio del segmento (A, B) .

Possiamo anche verificare facilmente che la precedente uguaglianza soddisfa l'uguaglianza 3.1.6 che definisce il centro di massa. QED

3.3.2 Esempio. [*Triangolo.*] Consideriamo un sistema piano omogeneo costituito da un triangolo (A, B, C) .

Il centro di massa di un triangolo è il punto di intersezione delle tre mediane.

Questo punto è situato ad $1/3$ di ciascuna mediana, partendo dalla relativa base.

Vedi Figura 3.3.6.

Vedi Figura 3.3.7.

DIMOSTRAZIONE. 1) Il sistema è invariante rispetto alla riflessione il cui sottospazio dei punti invarianti $\mathbf{I} \subset \mathbf{P}$ è la mediana relativa al lato (A, B) ed il cui sottospazio dei vettori separatori $\bar{\mathbf{S}} \subset \bar{\mathbf{P}}$ è la retta del lato (A, B) . Perciò, per la Proposizione 3.2.8, il centro di massa appartiene a tale mediana.

Possiamo ottenere questo risultato anche con il seguente ragionamento diretto. Dividiamo il triangolo in striscioline, di spessore infinitesimo dh , parallele al lato (A, B) . Per l'esempio precedente, il centro di massa di ciascuna strisciolina è il suo punto medio. Questi punti medi appartengono alla mediana del lato (A, B) . Quindi, per la proprietà distributiva del centro di massa, il centro di massa p_0 del sistema appartiene alla mediana del lato (A, B) .

2) Possiamo calcolare l'altezza h_0 del centro di massa p_0 rispetto alla base (A, B) , utilizzando la proprietà distributiva del centro di massa.

Dunque, sia H l'altezza del triangolo rispetto alla base (A, B) . La lunghezza l della strisciolina posta ad altezza h e ρ sono

$$l = \frac{AB}{H}(H - h) \quad \text{e} \quad \rho = \frac{2}{ABH}.$$

Pertanto, abbiamo

$$\begin{aligned} h_0 &= \int_{[0,H]} \rho l h dh \\ &= \int_{[0,H]} \frac{2}{ABH} \frac{AB}{H} (H-h) h dh \\ &= \frac{2}{H^2} \left(\frac{H^3}{2} - \frac{H^3}{3} \right) \\ &= \frac{1}{3} H. \end{aligned}$$

Inoltre, sia M il punto medio del lato (A, B) . Per il teorema di Talete, la lunghezza del segmento (p_0, M) è anche $1/3$ della lunghezza della mediana (C, M) .

3) In modo analogo, dimostriamo che il centro di massa del sistema appartiene alla mediana del lato (B, C) ed alla mediana del lato (A, C) .

4) Dunque, il centro di massa p_0 del sistema è il punto d'intersezione I di due di queste mediane.

Inoltre, anche la terza mediana incontra le prime due nello stesso punto I , per l'unicità del centro di massa. QED

3.3.3 Esempio. Consideriamo un sistema continuo piano omogeneo costituito da un parallelogramma.

Il centro di massa è il punto di intersezione dei due assi del parallelogramma.

Vedi Figura 3.3.8.

DIMOSTRAZIONE. Il sistema è invariante rispetto alla riflessione il cui sottospazio dei punti invarianti è l'asse di due lati paralleli e il cui sottospazio dei vettori separatori \bar{S} è la retta parallela a tali lati. Perciò, il centro di massa appartiene a tale asse.

In modo analogo, si può dimostrare che il centro di massa appartiene all'altro asse. QED

3.3.4 Esempio. Consideriamo un sistema continuo unidimensionale omogeneo costituito da un arco di circonferenza di centro o , raggio R ed ampiezza 2α .

Il centro di massa è il punto

$$p_0 = o + \frac{\sin \alpha}{\alpha} R \bar{u},$$

dove \bar{u} è il versore bisettore dell'arco.

In particolare,

1) per $\alpha = \pi$, il dominio del sistema è una circonferenza ed il suo centro di massa è

$$p_0 = o;$$

2) per $\alpha = \pi/2$, il dominio del sistema è una semicirconferenza ed il suo centro di massa è

$$p_0 = o + \frac{2}{\pi} R \bar{u};$$

3) per $\alpha = 0$, il dominio del sistema si riduce al punto

$$p = p_0 = o + R \bar{u}.$$

Vedi Figura 3.3.9.

DIMOSTRAZIONE. L'arco è simmetrico rispetto al suo asse; perciò, il centro di massa p_0 è un punto di tale asse. Per trovare p_0 , basta dunque determinarne la distanza h_0 dal centro.

Dunque, abbiamo

$$\begin{aligned} h_0 &= 2 \frac{1}{2 \alpha R} \int_{[0, \alpha]} R \cos \phi R d\phi \\ &= \frac{R}{\alpha} \sin \alpha. \text{ QED} \end{aligned}$$

3.3.5 Esempio. Consideriamo un sistema continuo piano omogeneo costituito da un settore circolare di centro o , raggio R ed ampiezza 2α .

Il centro di massa è il punto

$$p_0 = o + \frac{\sin \alpha}{\alpha} \frac{2}{3} R \bar{u},$$

dove \bar{u} è il versore bisettore dell'arco.

In particolare,

1) per $\alpha = \pi$, il dominio del sistema è un disco ed il suo centro di massa è

$$p_0 = o;$$

2) per $\alpha = \pi/2$, il dominio del sistema è una semidisco ed il suo centro di massa è

$$p_0 = o + \frac{4}{3\pi} R \bar{u};$$

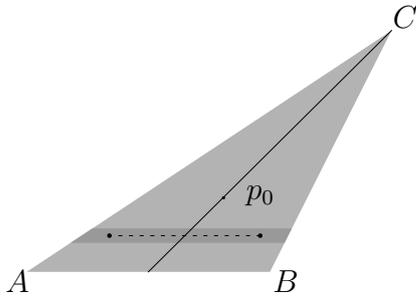
3) per $\alpha = 0$, il dominio del sistema si riduce ad un segmento (di densità lineare proporzionale alla distanza dal centro)

$$p = p_0 = o + \frac{2}{3} R \bar{u}.$$

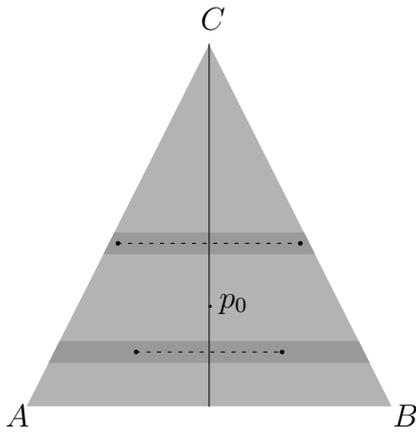
Vedi Figura 3.3.10.

DIMOSTRAZIONE. Possiamo dividere il settore circolare in settori circolari di ampiezza infinitesima, che possono essere assimilati a triangoli isosceli. Il centro di massa di tali triangoli appartiene al loro raggio mediano ad una distanza uguale a $(2/3)R$ dal centro o . Dunque, questi centri di massa parziali costituiscono un arco di circonferenza di centro o , raggio $(2/3)R$ ed ampiezza 2α .

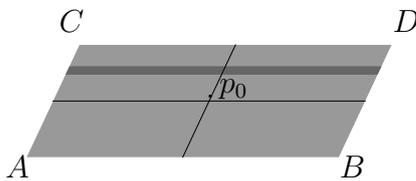
Allora, otteniamo il risultato considerando la proprietà distributiva del centro di massa e l'esempio precedente. QED



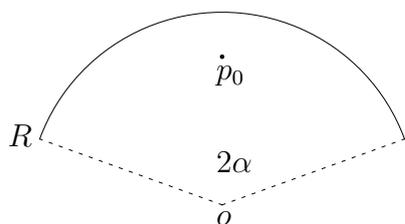
3.3.6 Figura. Illustrazione di centro di massa di un triangolo omogeneo.



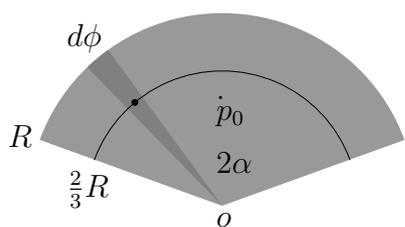
3.3.7 Figura. Illustrazione sul centro di massa di un triangolo isoscele omogeneo.



3.3.8 Figura. Illustrazione sul centro di massa di un parallelogramma omogeneo.



3.3.9 Figura. Illustrazione del centro di massa di un arco omogeneo.



3.3.10 Figura. Illustrazione del centro di massa di un settore circolare omogeneo.

CAPITOLO 4

TENSORE D'INERZIA

In questo capitolo, per semplicità di esposizione, introduciamo il tensore d'inerzia e dimostriamo le sue principali proprietà per un sistema di masse discreto. Lasciamo allo studente la facile estensione di tali nozioni e risultati anche ad un sistema continuo di masse.

Consideriamo dunque un sistema di masse discreto ed un *polo* $o \in P$.

Nello studio della cinematica dei sistemi rigidi si dimostra il seguente fatto:

se il sistema di masse si muove rigidamente intorno al polo fisso o (cioè se durante il moto sono costanti le distanze tra le particelle del sistema e le distanze delle particelle del sistema dal polo o) e se la velocità angolare del moto è $\bar{\Omega}$, allora il momento della quantità di moto totale del sistema rispetto al polo fisso o è dato dalla formula

$$\bar{K} = \sum_i m_i (p_i - o) \times (\bar{\Omega} \times (p_i - o)).$$

La precedente relazione tra $\bar{\Omega}$ e \bar{K} misura l'inerzia del sistema rispetto alle rotazioni. Essa gioca, rispetto alle rotazioni, un ruolo analogo a quello giocato dalla massa di una particella, rispetto alle traslazioni.

Inoltre, in altri ambiti meccanici diversi dalla cinematica, si incontrano formule con la stessa struttura algebrica della precedente, ma con significato fisico diverso.

Queste considerazioni ci inducono ad introdurre il “tensore d'inerzia” come segue.

4.1 Definizioni basilari

Introduciamo, innanzitutto, la definizione di momento d'inerzia rispetto ad una retta e di momento deviatorio rispetto ad una retta e ad un polo.

Introduciamo, poi, la definizione di tensore d'inerzia, insieme ad alcune applicazioni ad esso associate.

Consideriamo un sistema discreto di masse.

4.1.1 Definizione. Diciamo che

- il *momento d'inerzia* del sistema di masse rispetto ad una retta r è il numero reale positivo o nullo

$$I_r := \sum_i m_i d_i^2 \in \mathbb{R}_0^+,$$

dove $d_i \in \mathbb{R}_0^+$ è la distanza del punto p_i dalla retta r ,

- il *momento deviatorio* del sistema di masse rispetto ad un polo $o \in r$ e ad una retta r è il vettore ortogonale alla retta r

$$\bar{D}_{(o,r)} := \sum_i m_i h_i \bar{d}_i \in \bar{\mathbf{P}},$$

dove $h_i \in \mathbb{R}$ è la componente del vettore $(p_i - o)$ lungo la retta r e $\bar{d}_i \in \bar{\mathbf{P}}$ è il vettore ortogonale rispetto alla retta r che esprime la distanza del punto p_i dalla retta r . \square

Scegliamo ora un polo $o \in \bar{\mathbf{P}}$.

4.1.2 Definizione. Definiamo *tensore d'inerzia* del sistema di masse, rispetto al polo $o \in \bar{\mathbf{P}}$, l'applicazione

$$\hat{\sigma}_o : \bar{\mathbf{P}} \rightarrow \bar{\mathbf{P}},$$

data da

$$\hat{\sigma}_o(\bar{v}) = \sum_i m_i (p_i - o) \times (\bar{v} \times (p_i - o)). \square$$

Possiamo esprimere la formula precedente in un modo più conveniente.

4.1.3 Proposizione. Abbiamo l'uguaglianza

$$\hat{\sigma}_o(\bar{v}) = \sum_i m_i \left((p_i - o)^2 \bar{v} - ((p_i - o) \cdot \bar{v}) (p_i - o) \right).$$

DIMOSTRAZIONE. Segue immediatamente dalla seguente identità relativa al doppio prodotto vettoriale

$$\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) = (\bar{a} \cdot \bar{c}) \bar{b} - (\bar{a} \cdot \bar{b}) \bar{c}. \text{ QED}$$

4.1.4 Definizione. Seguendo un criterio generale dell'algebra lineare, è utile considerare anche le seguenti applicazioni derivate da $\hat{\sigma}$:

- la *forma dipendente da due variabili*

$$\sigma_o : \bar{\mathbf{P}} \times \bar{\mathbf{P}} \rightarrow \mathbb{R} : (\bar{u}, \bar{v}) \mapsto \hat{\sigma}_o(\bar{u}) \cdot \bar{v},$$

la cui espressione esplicita è

$$\sigma_o(\bar{u}, \bar{v}) = \sum_i m_i \left((p_i - o)^2 (\bar{u} \cdot \bar{v}) - ((p_i - o) \cdot \bar{u}) ((p_i - o) \cdot \bar{v}) \right),$$

- la *forma dipendente da una variabile*

$$\sigma_o^\square : \bar{\mathbf{P}} \rightarrow \mathbb{R} : \bar{v} \mapsto \sigma_o(\bar{v}, \bar{v}) = \hat{\sigma}_o(\bar{v}) \cdot \bar{v},$$

la cui espressione esplicita è

$$\sigma_o^\square(\bar{v}) = \sum_i m_i \left((p_i - o)^2 (\bar{v} \cdot \bar{v}) - ((p_i - o) \cdot \bar{v})^2 \right). \square$$

4.1.5 Proposizione. Sia $\bar{u} \in \bar{\mathbf{P}}$ un *versore*.

Lo scalare positivo o nullo $I_{(o, \bar{u})} := \sigma_o^\square(\bar{u}) \in \mathbb{R}_0^+$ coincide con il momento d'inerzia della retta r passante per il polo o e generata dal versore \bar{u} , ossia abbiamo

$$I_{(o, \bar{u})} := \sigma_o^\square(\bar{u}) = I_r.$$

Il vettore $\bar{D}_{(o, \bar{u})} := (\hat{\sigma}_o(\bar{u}))^\perp \in \bar{\mathbf{P}}$ ortogonale ad \bar{u} coincide con il momento deviatorio relativo al polo o ed alla retta r passante per il polo o e generata dal versore \bar{u} , ossia abbiamo

$$\bar{D}_{(o, \bar{u})} := (\hat{\sigma}_o(\bar{u}))^\perp = \bar{D}_{(r, o)}.$$

Inoltre, possiamo decomporre il vettore $\hat{\sigma}_o(\bar{u}) \in \bar{\mathbf{P}}$ nella componente parallela ad \bar{u} e nella componente ortogonale ad \bar{u}

$$\hat{\sigma}_o(\bar{u}) = I_{(o, \bar{u})} \bar{u} + \bar{D}_{(o, \bar{u})},$$

dove

$$\bar{D}_{\bar{u}} = \hat{\sigma}_o(\bar{u}) - (\hat{\sigma}_o(\bar{u}) \cdot \bar{u}) \bar{u}.$$

DIMOSTRAZIONE. Tenendo conto del teorema di Pitagora, otteniamo

$$\begin{aligned} I_{(o, \bar{u})} &= \sum_i m_i \left((p_i - o)^2 (\bar{u} \cdot \bar{u}) - ((p_i - o) \cdot \bar{u})^2 \right) \\ &= \sum_i m_i \left((p_i - o)^2 - ((p_i - o) \cdot \bar{u})^2 \right) \\ &= \sum_i m_i d_i^2. \end{aligned}$$

Inoltre, abbiamo

$$I_{(o,\bar{u})} \bar{u} + \bar{D}_{(o,\bar{u})} = \left((\hat{\sigma}(\bar{u}) \cdot \bar{u}) \bar{u} \right) + \left(\hat{\sigma}(\bar{u}) - (\hat{\sigma}_o(\bar{u}) \cdot \bar{u}) \bar{u} \right) = \hat{\sigma}_o(\bar{u})$$

e

$$\bar{D}_{(o,\bar{u})} \cdot \bar{u} = \hat{\sigma}_o(\bar{u}) \cdot \bar{u} - (\hat{\sigma}_o(\bar{u}) \cdot \bar{u}) (\bar{u} \cdot \bar{u}) = \hat{\sigma}_o(\bar{u}) \cdot \bar{u} - \hat{\sigma}_o(\bar{u}) \cdot \bar{u} = 0. \text{ QED}$$

4.1.6 Proposizione. Sia $\bar{u} \in \bar{\mathbf{P}}$ un versore e sia $(\bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{e}_z)$ una base ortonormale tale che $\bar{e}_z = \bar{u}$. Allora, abbiamo

$$I_{(o,\bar{u})} = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2),$$

$$\bar{D}_{(o,\bar{u})} = -\left(\sum_i m_i x_i z_i \right) \bar{e}_x - \left(\sum_i m_i y_i z_i \right) \bar{e}_y.$$

Vedi Figura 4.1.9.

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_o(\bar{u}) &= \sum_i m_i ((x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) \bar{e}_z - z_i (x_i \bar{e}_x + y_i \bar{e}_y + z_i \bar{e}_z)) \\ &= \sum_i m_i ((x_i^2 + y_i^2) \bar{e}_z - z_i (x_i \bar{e}_x + y_i \bar{e}_y)), \end{aligned}$$

da cui segue

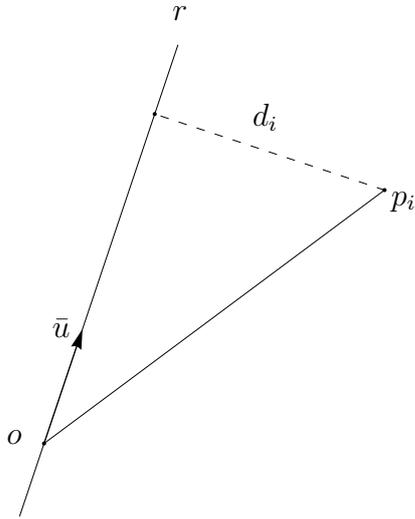
$$I_{(o,\bar{u})} = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2),$$

$$\bar{D}_{(o,\bar{u})} = -\sum_i m_i z_i (x_i \bar{e}_x + y_i \bar{e}_y). \text{ QED}$$

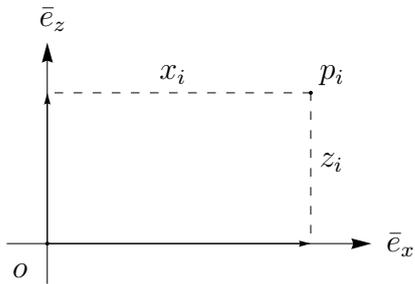
4.1.7 Osservazione. Abbiamo visto che lo scalare $I_{(o,\bar{u})}$ coincide con lo scalare I_r .

Pertanto, $I_{(o,\bar{u})}$ è invariante rispetto ad uno spostamento del polo lungo la retta r passante per il polo originario o e generata dal versore \bar{u} . \square

I concetti precedenti possono essere facilmente estesi anche ad un sistema continuo di masse.



4.1.8 **Figura.** Illustrazione del momento d'inerzia.



4.1.9 **Figura.** Illustrazione della componente $D_{\bar{e}_z}^x$ del momento deviatorio $\bar{D}_{\bar{e}_z}$.

4.2 Proprietà fondamentali

Studiamo poi le proprietà fondamentali del tensore d'inerzia: distributività rispetto al sistema di masse, linearità, simmetria e positività rispetto ai vettori sui cui esso è applicato.

Consideriamo un sistema discreto di masse.

4.2.1 Proposizione. [*Proprietà distributiva.*] Dividiamo il sistema in due sottosistemi S' e S'' costituiti, rispettivamente, da n' e n'' punti materiali, con $n' + n'' = n$,

$$(m_i, p_i)_{1 \leq i \leq n'} \quad \text{e} \quad (m_j, p_j)_{n'+1 \leq j \leq n}.$$

Consideriamo i tensori d'inerzia dei due sottosistemi dati da

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}'_o(\bar{v}) &= \sum_{1 \leq i \leq n'} m_i (p_i - o) \times (\bar{v} \times (p_i - o)), \\ \hat{\sigma}''_o(\bar{v}) &= \sum_{n'+1 \leq j \leq n} m_j (p_j - o) \times (\bar{v} \times (p_j - o)). \end{aligned}$$

Allora, il tensore d'inerzia del sistema di masse originale è la somma dei due tensori d'inerzia parziali

$$\hat{\sigma}_o = \hat{\sigma}'_o + \hat{\sigma}''_o.$$

DIMOSTRAZIONE. Segue immediatamente dalla definizione di tensore d'inerzia e dalla proprietà associativa della somma. QED

4.2.2 Proposizione. [*Linearità.*] L'applicazione $\hat{\sigma}_o : \bar{\mathbf{P}} \rightarrow \bar{\mathbf{P}}$ è "lineare", cioè, per ogni $\bar{u}, \bar{v} \in \bar{\mathbf{P}}$ ed $r \in \mathbb{R}$, abbiamo

$$\hat{\sigma}_o(\bar{u} + \bar{v}) = \hat{\sigma}_o(\bar{u}) + \hat{\sigma}_o(\bar{v}), \quad \hat{\sigma}_o(r\bar{u}) = r\hat{\sigma}_o(\bar{u}).$$

Dunque, possiamo scrivere

$$\hat{\sigma}_o \in L(\bar{\mathbf{P}}, \bar{\mathbf{P}}) \simeq \bar{\mathbf{P}}^* \otimes \bar{\mathbf{P}},$$

dove $L(\bar{\mathbf{P}}, \bar{\mathbf{P}})$ denota lo spazio delle applicazioni lineari $\bar{\mathbf{P}} \rightarrow \bar{\mathbf{P}}$.

DIMOSTRAZIONE. Segue immediatamente dalla definizione di tensore d'inerzia e dalla bilinearità del prodotto vettoriale. QED

4.2.3 Nota. Il termine "*tensore*", che abbiamo usato fin dall'inizio per $\hat{\sigma}_o$, è veramente giustificato solo ora, dopo aver dimostrato la proprietà di linearità di $\hat{\sigma}_o$. □

4.2.4 Corollario. L'applicazione $\underline{\sigma}_o : \bar{\mathbf{P}} \times \bar{\mathbf{P}} \rightarrow \mathbb{R}$ è “bilineare”, cioè, per ogni $\bar{u}, \bar{v}, \bar{u}', \bar{v}' \in \bar{\mathbf{P}}$ ed $r \in \mathbb{R}$, abbiamo

$$\begin{aligned}\underline{\sigma}_o(\bar{u} + \bar{u}', \bar{v}) &= \underline{\sigma}_o(\bar{u}, \bar{v}) + \underline{\sigma}_o(\bar{u}', \bar{v}), & \underline{\sigma}_o(\bar{u}, \bar{v} + \bar{v}') &= \underline{\sigma}_o(\bar{u}, \bar{v}) + \underline{\sigma}_o(\bar{u}, \bar{v}'), \\ \underline{\sigma}_o(r \bar{u}, \bar{v}) &= r \underline{\sigma}_o(\bar{u}, \bar{v}) = \underline{\sigma}_o(\bar{u}, r \bar{v}).\end{aligned}$$

Dunque, possiamo scrivere

$$\underline{\sigma}_o \in L^2(\bar{\mathbf{P}}, \mathbb{R}) \simeq \bar{\mathbf{P}}^* \otimes \bar{\mathbf{P}}^*,$$

dove $L^2(\bar{\mathbf{P}}, \mathbb{R})$ denota lo spazio delle applicazioni bilineari $\bar{\mathbf{P}} \times \bar{\mathbf{P}} \rightarrow \mathbb{R}$.

DIMOSTRAZIONE. Segue dal fatto che $\hat{\sigma}_o$ è lineare e che il prodotto scalare è bilineare. QED

4.2.5 Proposizione. [*Simmetria.*] L'applicazione $\underline{\sigma}_o : \bar{\mathbf{P}} \times \bar{\mathbf{P}} \rightarrow \mathbb{R}$ è “simmetrica”, cioè, per ogni $\bar{u}, \bar{v} \in \bar{\mathbf{P}}$, abbiamo

$$\underline{\sigma}_o(\bar{u}, \bar{v}) := \hat{\sigma}_o(\bar{u}) \cdot \bar{v} = \hat{\sigma}_o(\bar{v}) \cdot \bar{u} := \underline{\sigma}_o(\bar{v}, \bar{u}).$$

DIMOSTRAZIONE. Segue immediatamente dall'uguaglianza

$$\underline{\sigma}_o(\bar{u}, \bar{v}) = \sum_i m_i \left((p_i - o)^2 (\bar{u} \cdot \bar{v}) - ((p_i - o) \cdot \bar{u}) ((p_i - o) \cdot \bar{v}) \right)$$

e dalla simmetria del prodotto scalare. QED

4.2.6 Nota. La simmetria di $\hat{\sigma}_o$ è importante, perché permetterà di usare il teorema spettrale. \square

4.2.7 Corollario. L'applicazione $\sigma_o^\square : \bar{\mathbf{P}} \rightarrow \mathbb{R}$ è una “forma quadratica”, cioè, per ogni $\bar{u}, \bar{v} \in \bar{\mathbf{P}}$ ed $r \in \mathbb{R}$, abbiamo

$$\sigma_o^\square(r \bar{v}) = r^2 \sigma_o^\square(\bar{v}), \quad \sigma_o^\square(\bar{u} + \bar{v}) = \sigma_o^\square(\bar{u}) + \sigma_o^\square(\bar{v}) + 2 \underline{\sigma}_o(\bar{u}, \bar{v}).$$

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo

$$\begin{aligned}\sigma_o^\square(r \bar{v}) &= \underline{\sigma}_o(r \bar{v}, r \bar{v}) \\ &= r^2 \underline{\sigma}_o(\bar{v}, \bar{v}) \\ &= r^2 \sigma_o^\square(\bar{v}), \\ \sigma_o^\square(\bar{u} + \bar{v}) &= \underline{\sigma}_o(\bar{u} + \bar{v}, \bar{u} + \bar{v}) \\ &= \underline{\sigma}_o(\bar{u}, \bar{u}) + \underline{\sigma}_o(\bar{v}, \bar{v}) + \underline{\sigma}_o(\bar{u}, \bar{v}) + \underline{\sigma}_o(\bar{v}, \bar{u}) \\ &= \underline{\sigma}_o(\bar{u}, \bar{u}) + \underline{\sigma}_o(\bar{v}, \bar{v}) + 2 \underline{\sigma}_o(\bar{u}, \bar{v}) \\ &= \sigma_o^\square(\bar{u}) + \sigma_o^\square(\bar{v}) + 2 \underline{\sigma}_o(\bar{u}, \bar{v}). \square\end{aligned}$$

Abbiamo definito $\underline{\sigma}_o$ a partire da $\hat{\sigma}_o$ ed abbiamo definito σ_o^\square a partire da $\underline{\sigma}_o$.

Vediamo ora che, viceversa, $\underline{\sigma}_o$ determina $\hat{\sigma}_o$ e σ_o^\square determina $\underline{\sigma}_o$.

4.2.8 Proposizione. [*Polarizzazione.*] La conoscenza dei momenti d'inerzia relativi a tutti i versori determina la conoscenza completa di $\underline{\sigma}_o$ e quindi di $\hat{\sigma}_o$.

Infatti, per ogni coppia di vettori $\bar{u}, \bar{v} \in \bar{\mathbf{P}}$, abbiamo

$$\underline{\sigma}_o(\bar{u}, \bar{v}) = \frac{1}{2} \left((\bar{u} + \bar{v})^2 I_{(o, \text{vers } (\bar{u} + \bar{v}))} - u^2 I_{(o, \text{vers } \bar{u})} - v^2 I_{(o, \text{vers } \bar{v})} \right).$$

DIMOSTRAZIONE. Segue immediatamente dalle uguaglianze

$$\begin{aligned} \sigma_o^\square(\bar{u} + \bar{v}) &= \sigma_o^\square(\bar{u}) + \sigma_o^\square(\bar{v}) + 2\underline{\sigma}_o(\bar{u}, \bar{v}), \\ \sigma_o^\square(\bar{u} + \bar{v}) &= \|\bar{u} + \bar{v}\|^2 I_{(o, \text{vers } (\bar{u} + \bar{v}))}, \quad \sigma_o^\square(\bar{u}) = \|\bar{u}\|^2 I_{(o, \text{vers } \bar{u})}, \quad \sigma_o^\square(\bar{v}) = \|\bar{v}\|^2 I_{(o, \text{vers } \bar{v})}. \text{ QED} \end{aligned}$$

4.2.9 Nota. La Proposizione precedente è una diretta conseguenza della sola bilinearità e simmetria di $\underline{\sigma}_o$.

Un risultato analogo vale per ogni forma bilineare simmetrica.

Per esempio, consideriamo la forma bilineare simmetrica data dal prodotto scalare

$$g : \bar{\mathbf{P}} \times \bar{\mathbf{P}} \rightarrow \mathbb{R} : (\bar{u}, \bar{v}) \mapsto \bar{u} \cdot \bar{v}.$$

La conoscenza della lunghezza di tutti i vettori determina la conoscenza di tutti i prodotti scalari (teorema di Carnot).

Infatti, per ogni coppia di vettori $\bar{u}, \bar{v} \in \bar{\mathbf{P}}$, abbiamo

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = \frac{1}{2} \left(\|\bar{u} + \bar{v}\|^2 - \|\bar{u}\|^2 - \|\bar{v}\|^2 \right). \square$$

4.2.10 Proposizione. [*Positività.*] Se il sistema di masse è non degenero (cioè se i punti non sono tutti allineati), allora l'applicazione $\sigma_o^\square : \bar{\mathbf{P}} \rightarrow \mathbb{R}$ è “definita positiva”, cioè, per ogni $\bar{v} \in \bar{\mathbf{P}}$ non nullo, abbiamo

$$\sigma_o^\square(\bar{v}) > 0.$$

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo

$$\sigma_o^\square(\bar{v}) = \sum_i m_i \left((p_i - o)^2 \bar{v}^2 - ((p_i - o) \cdot \bar{v})^2 \right).$$

D'altra parte, per la disuguaglianza di Schwarz, vale la disuguaglianza

$$(p_i - o)^2 \bar{v}^2 \geq ((p_i - o) \cdot \bar{v})^2,$$

dove $>$ vale se $(p_i - o)$ e \bar{v} non sono allineati ed $=$ vale se $(p_i - o)$ e \bar{v} sono allineati.

Ma, se il sistema è non degenero esiste almeno un punto p_i tale che $(p_i - o)$ e \bar{v} non siano allineati. Quindi, $\sigma_o^\square(\bar{v})$ è una somma di termini positivi o nulli, di cui almeno uno è positivo. QED

I risultati precedenti possono essere estesi anche ad un sistema continuo di masse.

4.3 Rappresentazione matriciale

Studiamo ora la rappresentazione matriciale del tensore d'inerzia.

Per ragioni di semplicità, ci limitiamo qui a riferirci esplicitamente ad una base ortonormale. Ma, molti dei concetti e dei risultati ottenuti per una base ortonormale possono essere estesi anche ad una base qualunque.

4.3.1 Rappresentazione in una base ortonormale

Per conoscere l'applicazione $\hat{\sigma}$ occorre valutare ciascuno dei valori vettoriali $\hat{\sigma}(\bar{v}) \in \bar{\mathbf{P}}$ relativi agli infiniti vettori $\bar{v} \in \bar{\mathbf{P}}$. Tuttavia, per la linearità di $\hat{\sigma}$, basta valutare $\hat{\sigma}$ su tre vettori linearmente indipendenti; tutti gli altri valori di $\hat{\sigma}$ possono essere dedotti dai precedenti mediante una semplice regola algebrica.

Consideriamo un sistema discreto di masse.

Sia

$$\mathbf{B} := (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3) \subset \bar{\mathbf{P}}$$

una base ortonormale. Per ipotesi, abbiamo $\bar{e}_i \cdot \bar{e}_j = \delta_{ij}$.

Mediante la base \mathbf{B} , possiamo esprimere ogni vettore $\bar{v} \in \bar{\mathbf{P}}$ come segue

$$\bar{v} = \sum_i v^i \bar{e}_i, \quad \text{dove} \quad v^i = \bar{v} \cdot \bar{e}_i \in \mathbb{R}.$$

4.3.1 Lemma. I momenti d'inerzia rispetto ai tre assi cartesiani sono

$$\begin{aligned} I_1 &= \hat{\sigma}_o(\bar{e}_1) \cdot \bar{e}_1 = \sigma_o(\bar{e}_1, \bar{e}_1) = \sigma_o^\square(\bar{e}_1) = \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2), \\ I_2 &= \hat{\sigma}_o(\bar{e}_2) \cdot \bar{e}_2 = \sigma_o(\bar{e}_2, \bar{e}_2) = \sigma_o^\square(\bar{e}_2) = \sum_i m_i (x_i^2 + z_i^2), \\ I_3 &= \hat{\sigma}_o(\bar{e}_3) \cdot \bar{e}_3 = \sigma_o(\bar{e}_3, \bar{e}_3) = \sigma_o^\square(\bar{e}_3) = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2). \end{aligned}$$

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo

$$\begin{aligned} I_1 &:= I_{\bar{e}_1} = \sigma_o(\bar{e}_1, \bar{e}_1) = \sum_i m_i \left((p_i - o)^2 - ((p_i - o) \cdot e_1)^2 \right) \\ &= \sum_i m_i \left((x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) - x_i^2 \right) \\ &= \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2), \\ I_2 &:= I_{\bar{e}_2} = \sigma_o(\bar{e}_2, \bar{e}_2) = \sum_i m_i \left((p_i - o)^2 - ((p_i - o) \cdot e_2)^2 \right) \\ &= \sum_i m_i \left((x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) - y_i^2 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_i m_i (x_i^2 + z_i^2), \\
I_3 := I_{\bar{e}_3} = \sigma_o(\bar{e}_3, \bar{e}_3) &= \sum_i m_i \left((p_i - o)^2 - ((p_i - o) \cdot e_3)^2 \right) \\
&= \sum_i m_i ((x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) - z_i^2) \\
&= \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2). \text{ QED}
\end{aligned}$$

4.3.2 Lemma. I momenti deviatori rispetto ai tre assi cartesiani sono

$$\bar{D}_1 = \hat{\sigma}_o(\bar{e}_1)^\perp, \quad \bar{D}_2 = \hat{\sigma}_o(\bar{e}_2)^\perp, \quad \bar{D}_3 = \hat{\sigma}_o(\bar{e}_3)^\perp,$$

dove $^\perp$ denota la componente perpendicolare relativamente ai vettori \bar{e}_1 , \bar{e}_2 , \bar{e}_3 , rispettivamente. Questi tre vettori possono essere decomposti mediante la base \mathbf{B} come segue

$$\begin{aligned}
\bar{D}_1 &= D_1^2 \bar{e}_2 + D_1^3 \bar{e}_3, \\
\bar{D}_2 &= D_2^1 \bar{e}_1 + D_2^3 \bar{e}_3, \\
\bar{D}_3 &= D_3^1 \bar{e}_1 + D_3^2 \bar{e}_2,
\end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned}
D_1^2 &= \hat{\sigma}_o(\bar{e}_1) \cdot \bar{e}_2 = \sigma_o(\bar{e}_1, \bar{e}_2) = - \sum_i m_i x_i y_i = \hat{\sigma}_o(\bar{e}_2) \cdot \bar{e}_1 = \sigma_o(\bar{e}_2, \bar{e}_1) = \hat{\sigma}_o(\bar{e}_2) \cdot \bar{e}_1 = D_2^1, \\
D_1^3 &= \hat{\sigma}_o(\bar{e}_1) \cdot \bar{e}_3 = \sigma_o(\bar{e}_1, \bar{e}_3) = - \sum_i m_i x_i z_i = \hat{\sigma}_o(\bar{e}_3) \cdot \bar{e}_1 = \sigma_o(\bar{e}_3, \bar{e}_1) = \hat{\sigma}_o(\bar{e}_3) \cdot \bar{e}_1 = D_3^1, \\
D_2^3 &= \hat{\sigma}_o(\bar{e}_2) \cdot \bar{e}_3 = \sigma_o(\bar{e}_2, \bar{e}_3) = - \sum_i m_i y_i z_i = \hat{\sigma}_o(\bar{e}_3) \cdot \bar{e}_2 = \sigma_o(\bar{e}_3, \bar{e}_2) = \hat{\sigma}_o(\bar{e}_3) \cdot \bar{e}_2 = D_3^2.
\end{aligned}$$

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo

$$\begin{aligned}
D_1^2 &= \hat{\sigma}_o(\bar{e}_1) \cdot \bar{e}_2 = \sigma_o(\bar{e}_1, \bar{e}_2) = \sum_i m_i \left((p_i - o)^2 (\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_2) - ((p_i - o) \cdot \bar{e}_1) ((p_i - o) \cdot \bar{e}_2) \right) \\
&= - \sum_i m_i x_i y_i, \\
D_1^3 &= \hat{\sigma}_o(\bar{e}_1) \cdot \bar{e}_3 = \sigma_o(\bar{e}_1, \bar{e}_3) = \sum_i m_i \left((p_i - o)^2 (\bar{e}_3 \cdot \bar{e}_1) - ((p_i - o) \cdot \bar{e}_3) ((p_i - o) \cdot \bar{e}_1) \right) \\
&= - \sum_i m_i x_i z_i, \\
D_2^3 &= \hat{\sigma}_o(\bar{e}_2) \cdot \bar{e}_3 = \sigma_o(\bar{e}_2, \bar{e}_3) = \sum_i m_i \left((p_i - o)^2 (\bar{e}_2 \cdot \bar{e}_3) - ((p_i - o) \cdot \bar{e}_2) ((p_i - o) \cdot \bar{e}_3) \right) \\
&= - \sum_i m_i y_i z_i.
\end{aligned}$$

Inoltre, abbiamo

$$D_1^2 = D_2^1, \quad D_1^3 = D_3^1, \quad D_2^3 = D_3^2. \text{ QED}$$

4.3.3 Proposizione. Le matrici rappresentative di $\hat{\sigma}_o$ e di $\underline{\sigma}_o$ nella base \mathbf{B} sono

$$(\hat{\sigma}_o) = (\sigma_i^j) = (\hat{\sigma}(\bar{e}_i)^j) = \hat{\sigma}_o(\bar{e}_i) \cdot \bar{e}^j = \begin{pmatrix} \sigma_1^1 & \sigma_2^1 & \sigma_3^1 \\ \sigma_1^2 & \sigma_2^2 & \sigma_3^2 \\ \sigma_1^3 & \sigma_2^3 & \sigma_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 & D_2^1 & D_3^1 \\ D_1^2 & I_2 & D_3^2 \\ D_1^3 & D_2^3 & I_3 \end{pmatrix}$$

e

$$(\underline{\sigma}_o) = (\sigma_{ij}) = (\underline{\sigma}_o(\bar{e}_i, \bar{e}_j)) = \hat{\sigma}_o(\bar{e}_i) \cdot \bar{e}^j = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & I_2 & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & I_3 \end{pmatrix},$$

dove $D_{ij} = D_j^i = D_i^j = D_{ji}$.

Dunque, le matrici di $\hat{\sigma}_o$ e di $\underline{\sigma}_o$ sono uguali e simmetriche

$$(\sigma_{ij}) = (\sigma_j^i) = (\sigma_i^j) = (\sigma_{ji}).$$

DIMOSTRAZIONE. Segue immediatamente dalla regola generale per la costruzione delle matrici associate ad un'applicazione lineare e ad una forma bilineare, tenendo conto della definizione di momento d'inerzia e di momento deviatorio rispetto ad un versore dato. QED

4.3.4 Proposizione. Per ogni vettore $\bar{v} = \sum_i v^i \bar{e}_i \in \bar{\mathbf{P}}$, abbiamo

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_o(\bar{v}) &= \sum_{ij} (\sigma_j^i v^j) \bar{e}_i = \\ &= (I_1 v^1 + D_2^1 v^2 + D_3^1 v^3) \bar{e}_1 + (D_1^2 v^1 + I_2 v^2 + D_3^2 v^3) \bar{e}_2 + (D_1^3 v^1 + D_2^3 v^2 + I_3 v^3) \bar{e}_3, \end{aligned}$$

ossia, mediante il prodotto di matrici,

$$\begin{pmatrix} \hat{\sigma}_o(\bar{v})^1 \\ \hat{\sigma}_o(\bar{v})^2 \\ \hat{\sigma}_o(\bar{v})^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1^1 & \sigma_2^1 & \sigma_3^1 \\ \sigma_1^2 & \sigma_2^2 & \sigma_3^2 \\ \sigma_1^3 & \sigma_2^3 & \sigma_3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 & D_2^1 & D_3^1 \\ D_1^2 & I_2 & D_3^2 \\ D_1^3 & D_2^3 & I_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix}.$$

Per ogni coppia di vettori $\bar{u} = \sum_i u^i \bar{e}_i \in \bar{\mathbf{P}}$ e $\bar{v} = \sum_i v^i \bar{e}_i \in \bar{\mathbf{P}}$, abbiamo

$$\begin{aligned} \underline{\sigma}_o(\bar{u}, \bar{v}) &= \sum_{ij} \sigma_{ij} u^i v^j = \\ &= (I_1 u^1 + D_2^1 u^2 + D_3^1 u^3) v^1 + (D_1^2 u^1 + I_2 u^2 + D_3^2 u^3) v^2 + (D_1^3 u^1 + D_2^3 u^2 + I_3 u^3) v^3, \end{aligned}$$

ossia, mediante il prodotto di matrici,

$$\underline{\sigma}_o(\bar{u}, \bar{v}) = (u^1 \ u^2 \ u^3) \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} = (u^1 \ u^2 \ u^3) \begin{pmatrix} I_1 & D_2^1 & D_3^1 \\ D_1^2 & I_2 & D_3^2 \\ D_1^3 & D_2^3 & I_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix}.$$

DIMOSTRAZIONE. Segue immediatamente dalla linearità di $\hat{\sigma}_o$ e dalla bilinearità di σ_o , tenendo conto della regola del prodotto tra matrici, “riga per colonna”. QED

4.3.5 Corollario. Sia $\bar{u} = u^1 \bar{e}_1 + u^2 \bar{e}_2 + u^3 \bar{e}_3 \in \bar{\mathbf{P}}$ un versore. Allora, il momento d’inerzia rispetto ad \bar{u} è dato da

$$I_{(o,\bar{u})} s = I_1 (u^1)^2 + I_2 (u^2)^2 + I_3 (u^3)^2 + 2 D_{12} u^1 u^2 + 2 D_{13} u^1 u^3 + 2 D_{23} u^2 u^3. \square$$

4.3.6 Proposizione. La positività del tensore d’inerzia è caratterizzata dalle disuguaglianze

$$\det \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} = I_1 I_2 I_3 + 2 D_{12} D_{23} D_{31} - I_1 (D_{23})^2 - I_2 (D_{13})^2 - I_3 (D_{12})^2 > 0,$$

$$\det \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix} = I_1 I_2 - (D_{12})^2 > 0,$$

$$\det \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{13} \\ \sigma_{31} & \sigma_{33} \end{pmatrix} = I_1 I_3 - (D_{13})^2 > 0,$$

$$\det \begin{pmatrix} \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} = I_2 I_3 - (D_{23})^2 > 0,$$

$$\sigma_{11} = I_1 > 0,$$

$$\sigma_{22} = I_2 > 0,$$

$$\sigma_{33} = I_3 > 0.$$

DIMOSTRAZIONE. Segue facilmente da un teorema generale di algebra lineare. QED

I risultati precedenti possono essere estesi anche ad un sistema continuo di masse.

4.3.2 Cambiamento di base

Studiamo ora come cambia la matrice del tensore d'inerzia quando cambia base.

Sia ben chiaro che quando cambiamo base non cambia il tensore d'inerzia (che dipende solo dal sistema di punti materiali e dal polo), ma cambia solo la sua rappresentazione matriciale. Questo fatto è del tutto analogo a quello che succede per un vettore dato: se cambiamo base non cambia il vettore, ma cambiano solo le sue componenti.

Per ragioni di semplicità, ci limitiamo qui a riferirci esplicitamente a due basi ortonormali. Ma, molti dei concetti e dei risultati ottenuti per due basi ortonormali possono essere estesi anche a due basi qualunque.

Consideriamo un sistema di masse discreto o continuo, un polo o ed il tensore d'inerzia $\hat{\sigma}$ associato.

Consideriamo due basi ortonormali

$$\mathbf{B} = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3) \subset \bar{\mathbf{P}} \quad \text{e} \quad \mathbf{B}' = (\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \bar{e}'_3) \subset \bar{\mathbf{P}}.$$

Possiamo esprimere ciascuna delle due basi tramite l'altra mediante le due matrici quadrate di cambiamento di base (S) e (T) come segue

$$\bar{e}'_i = \sum_j S_i^j \bar{e}_j \quad \text{e} \quad \bar{e}_h = \sum_k T_h^k \bar{e}'_k.$$

Quindi, per ogni vettore

$$\bar{v} = \sum_i v^i \bar{e}_i = \sum_j v'^j \bar{e}'_j,$$

otteniamo

$$v'^j = \sum_h T_h^j v^h \quad \text{e} \quad v^i = \sum_k S_k^i v'^k.$$

Si dimostra facilmente che le due matrici quadrate (S) e (T) sono ortogonali, cioè ciascuna di esse è invertibile e la sua inversa è uguale alla sua trasposta.

Inoltre, si dimostra facilmente che le due matrici quadrate (S) e (T) sono l'una l'inversa dell'altra.

In altre parole, abbiamo

$$(S)^t = (S)^{-1} = (T) \quad \text{e} \quad (T)^t = (T)^{-1} = (S),$$

cioè

$$S_j^i = T_i^j, \quad \sum_h S_h^i T_j^h = \delta_j^i = \sum_h T_h^i S_j^h, \quad T_j^i = S_i^j.$$

4.3.7 Proposizione. Le relazioni tra le matrici di $\hat{\sigma}$ e di $\underline{\sigma}$ relativamente alle due basi sono

$$\sigma_j^i = \sum_{hk} S_j^h \sigma_h^k T_k^i \quad \text{e} \quad \sigma'_{ij} = \sum_{hk} S_i^h S_j^k \sigma_{hk}.$$

DIMOSTRAZIONE. Segue facilmente dall'espressione delle due matrici (σ_j^i) e (σ_{ij}) rispetto ad una base e dalle espressioni del cambiamento di base e delle componenti di un vettore. QED

4.3.8 Corollario. Le relazioni tra i momenti d'inerzia ed i momenti deviatori relativi alle due basi sono

$$\begin{aligned} I'_1 &= (S_1^1)^2 I_1 + (S_1^2)^2 I_2 + (S_1^3)^2 I_3 + 2 S_1^2 S_1^3 D_{23} + 2 S_1^1 S_1^3 D_{13} + 2 S_1^2 S_1^1 D_{21}, \\ I'_2 &= (S_2^1)^2 I_1 + (S_2^2)^2 I_2 + (S_2^3)^2 I_3 + 2 S_2^2 S_2^3 D_{23} + 2 S_2^1 S_2^3 D_{13} + 2 S_2^2 S_2^1 D_{21}, \\ I'_3 &= (S_3^1)^2 I_1 + (S_3^2)^2 I_2 + (S_3^3)^2 I_3 + 2 S_3^2 S_3^3 D_{23} + 2 S_3^1 S_3^3 D_{13} + 2 S_3^2 S_3^1 D_{21}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D'_{12} &= (S_1^1 S_2^2 + S_1^2 S_2^1) D_{12} + (S_1^1 S_2^3 + S_1^3 S_2^1) D_{13} + (S_1^2 S_2^3 + S_1^3 S_2^2) D_{23} \\ &\quad + S_1^1 S_2^1 I_1 + S_1^2 S_2^2 I_2 + S_1^3 S_2^3 I_3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D'_{13} &= (S_1^1 S_3^2 + S_1^2 S_3^1) D_{12} + (S_1^1 S_3^3 + S_1^3 S_3^1) D_{13} + (S_1^2 S_3^3 + S_1^3 S_3^2) D_{23} \\ &\quad + S_1^1 S_3^1 I_1 + S_1^2 S_3^2 I_2 + S_1^3 S_3^3 I_3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D'_{32} &= (S_3^1 S_2^2 + S_3^2 S_2^1) D_{12} + (S_3^1 S_2^3 + S_3^3 S_2^1) D_{13} + (S_3^2 S_2^3 + S_3^3 S_2^2) D_{23} \\ &\quad + S_3^1 S_2^1 I_1 + S_3^2 S_2^2 I_2 + S_3^3 S_2^3 I_3. \quad \square \end{aligned}$$

4.3.9 Esempio. Supponiamo che la base B' sia ottenuta dalla base B mediante una rotazione di un angolo $0 \leq \phi < 2\pi$ attorno al vettore \bar{e}_3 .

In tal caso abbiamo

$$\begin{aligned} \bar{e}'_1 &= \cos \phi \bar{e}_1 + \sin \phi \bar{e}_2, & \bar{e}_1 &= \cos \phi \bar{e}'_1 - \sin \phi \bar{e}'_2, \\ \bar{e}'_2 &= \sin \phi \bar{e}_1 - \cos \phi \bar{e}_2, & \bar{e}_2 &= \sin \phi \bar{e}'_1 + \cos \phi \bar{e}'_2, \\ \bar{e}'_3 &= \bar{e}_3, & \bar{e}_3 &= \bar{e}'_3. \end{aligned}$$

Quindi, abbiamo

$$(S) = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (T) = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Perciò, otteniamo

$$\begin{aligned} I'_1 &= \cos^2 \phi I_1 + \sin^2 \phi I_2 + 2 \sin \phi \cos \phi D_{21}, \\ I'_2 &= \sin^2 \phi I_1 + \cos^2 \phi I_2 - 2 \sin \phi \cos \phi D_{21}, \\ I'_3 &= I_3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D'_{12} &= (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi) D_{12} + \cos \phi \sin \phi (I_2 - I_1), \\
 D'_{13} &= \cos \phi D_{13} + \sin \phi D_{23}, \\
 D'_{32} &= \cos \phi D_{23} - \sin \phi D_{23}.
 \end{aligned}$$

In particolare, nel caso in cui $D_{12} = D_{21} = 0$, $D_{13} = D_{31} = 0$, $D_{32} = D_{23} = 0$, otteniamo

$$\begin{aligned}
 I'_1 &= \cos^2 \phi I_1 + \sin^2 \phi I_2, \\
 I'_2 &= \sin^2 \phi I_1 + \cos^2 \phi I_2, \\
 I'_3 &= I_3, \\
 D'_{12} &= \cos \phi \sin \phi (I_2 - I_1), \\
 D'_{13} &= 0, \\
 D'_{32} &= 0. \square
 \end{aligned}$$

4.3.3 Invarianti

Abbiamo visto come cambiano gli elementi della matrice rappresentativa del tensore d'inerzia, in seguito ad un cambiamento di base. Vi sono però delle particolari combinazioni algebriche degli elementi di questa matrice che rimangono invariate in seguito ad un qualunque cambiamento di base. La conoscenza di questi invarianti è interessante ed utile.

Per ragioni di semplicità, ci limitiamo qui a riferirci esplicitamente a basi ortonormali. Ma, molti dei concetti e dei risultati ottenuti per basi ortonormali possono essere estesi anche a basi qualunque.

Consideriamo un sistema di masse discreto o continuo, un polo o ed il tensore d'inerzia $\hat{\sigma}$ associato.

Consideriamo due basi ortonormali

$$\mathbf{B} = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3) \subset \bar{\mathbf{P}} \quad \text{e} \quad \mathbf{B}' = (\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \bar{e}'_3) \subset \bar{\mathbf{P}}.$$

4.3.10 Proposizione. I seguenti scalari non dipendono dalla base:

$$1) \quad \text{tr}(\sigma'^i_j) := \sigma'^1_1 + \sigma'^2_2 + \sigma'^3_3 = \sigma_1^1 + \sigma_2^2 + \sigma_3^3 := \text{tr}(\sigma_j^i),$$

$$2) \quad \det \begin{pmatrix} \sigma'^1_1 & \sigma'^1_2 \\ \sigma'^2_1 & \sigma'^2_2 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \sigma'^1_1 & \sigma'^1_3 \\ \sigma'^3_1 & \sigma'^3_3 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \sigma'^2_2 & \sigma'^2_3 \\ \sigma'^3_2 & \sigma'^3_3 \end{pmatrix} = \\ = \det \begin{pmatrix} \sigma_1^1 & \sigma_2^1 \\ \sigma_1^2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \sigma_1^1 & \sigma_3^1 \\ \sigma_1^3 & \sigma_3^3 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \sigma_2^2 & \sigma_3^2 \\ \sigma_2^3 & \sigma_3^3 \end{pmatrix},$$

$$3) \quad \det(\sigma'^i_j) := \det \begin{pmatrix} \sigma'^1_1 & \sigma'^1_2 & \sigma'^1_3 \\ \sigma'^2_1 & \sigma'^2_2 & \sigma'^2_3 \\ \sigma'^3_1 & \sigma'^3_2 & \sigma'^3_3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \sigma_1^1 & \sigma_2^1 & \sigma_3^1 \\ \sigma_1^2 & \sigma_2^2 & \sigma_3^2 \\ \sigma_1^3 & \sigma_2^3 & \sigma_3^3 \end{pmatrix} := \det(\sigma_j^i),$$

ossia

$$1') \quad I'_1 + I'_2 + I'_3 = I_1 + I_2 + I_3.$$

$$2') \quad I'_1 I'_2 - (D'_{12})^2 + I'_1 I'_3 - (D'_{13})^2 + I'_2 I'_3 - (D'_{23})^2 = \\ = I_1 I_2 - (D_{12})^2 + I_1 I_3 - (D_{13})^2 + I_2 I_3 - (D_{23})^2,$$

$$3') \quad I'_1 I'_2 I'_3 + 2 D'_{12} D'_{23} D'_{31} - I'_1 (D'_{23})^2 - I'_2 (D'_{13})^2 - I'_3 (D'_{12})^2 = \\ = I_1 I_2 I_3 + 2 D_{12} D_{23} D_{31} - I_1 (D_{23})^2 - I_2 (D_{13})^2 - I_3 (D_{12})^2,$$

DIMOSTRAZIONE. Dimostriamo la prima e la terza uguaglianza. La seconda uguaglianza può essere dimostrata con una procedura analoga.

1) Abbiamo $\sigma_j^i = \sum_{h,k} S_j^h \sigma_h^k T_k^i$.

Allora, l'uguaglianza $\sum_i S_i^h T_k^i = \delta_k^h$ implica

$$\sum_i \sigma_j^i = \sum_{h,k} S_j^h \sigma_h^k T_k^i = \sum_{h,k} \sigma_h^k \delta_k^h = \sum_h \sigma_h^h.$$

3) Abbiamo $(\sigma') = (S)(\hat{\sigma})(T)$.

Allora, l'uguaglianza $(S)(T) = 1$ implica $\det(S) \det(T) = 1$ e quindi

$$\det(\sigma') = \det((S)(\sigma)(T)) = \det(S) \det(\sigma) \det(T) = \det(\sigma). \text{ QED}$$

4.3.11 Definizione. Definiamo *invarianti* del tensore d'inerzia i tre scalari (indipendenti dalla scelta della base)

$$\begin{aligned} t_1 &:= \text{tr}(\hat{\sigma}_o) = \sigma_1^1 + \sigma_2^2 + \sigma_3^3 \\ t_2 &= \det \begin{pmatrix} \sigma_1^1 & \sigma_2^1 \\ \sigma_1^2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \sigma_1^1 & \sigma_3^1 \\ \sigma_1^3 & \sigma_3^3 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \sigma_2^2 & \sigma_3^2 \\ \sigma_2^3 & \sigma_3^3 \end{pmatrix} \\ t_3 &:= \det(\hat{\sigma}_o) = \det \begin{pmatrix} \sigma_1^1 & \sigma_2^1 & \sigma_3^1 \\ \sigma_1^2 & \sigma_2^2 & \sigma_3^2 \\ \sigma_1^3 & \sigma_2^3 & \sigma_3^3 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

calcolati mediante una qualunque base ortonormale. \square

4.3.12 Nota. L'invarianza di alcuni scalari ottenuti da particolari combinazioni degli elementi della matrice del tensore d'inerzia $\hat{\sigma}$ ha una certa analogia con l'invarianza della lunghezza di un vettore.

Dato un vettore $\bar{v} \in \bar{\mathbf{P}}$, possiamo rappresentare il vettore mediante le sue componenti nelle due basi ortonormali \mathbf{B} e \mathbf{B}' , mediante le colonne delle sue componenti (v^i) e (v'^i) . In generale, abbiamo $v'^i \neq v^i$, ma il seguente scalare (esprime il quadrato della lunghezza del vettore) non dipende dalla scelta della base

$$(v^1)^2 + (v^2)^2 + (v^3)^2 = (v'^1)^2 + (v'^2)^2 + (v'^3)^2. \square$$

4.4 Autovalori ed autovettori

Studiamo ora gli “assi principali” e la “diagonalizzazione” del tensore d’inerzia.

Consideriamo un sistema di masse discreto o continuo, un polo o ed il tensore d’inerzia $\hat{\sigma}$ associato.

4.4.1 Definizioni basilari

In generale, per un qualunque $\bar{v} \in \bar{\mathbf{P}}$, non è detto che il vettore $\hat{\sigma}_o(\bar{v}) \in \bar{\mathbf{P}}$ sia parallelo a \bar{v} . Tuttavia, questo fatto può verificarsi per taluni vettori \bar{v} .

A tale proposito, ricordiamo brevemente alcuni risultati generali di algebra lineare, validi per un qualunque operatore lineare $\hat{f} : \bar{\mathbf{P}} \rightarrow \bar{\mathbf{P}}$, adattandoli al nostro caso particolare del tensore d’inerzia $\hat{\sigma}_o : \bar{\mathbf{P}} \rightarrow \bar{\mathbf{P}}$.

4.4.1 Proposizione. Sia $\bar{v} \in \bar{\mathbf{P}}$ un vettore *non nullo* e sia

$$(4.4.1) \quad \hat{\sigma}_o(\bar{v}) = \lambda \bar{v}, \quad \text{con} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Allora, per ogni altro vettore non nullo \bar{v}' parallelo a \bar{v} vale un’uguaglianza analoga alla precedente, con lo stesso λ ,

$$\hat{\sigma}_o(\bar{v}') = \lambda \bar{v}', \quad \text{con} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Inoltre, lo scalare λ è uguale al momento d’inerzia relativo alla retta r generata da \bar{v}

$$\lambda = I_r.$$

DIMOSTRAZIONE. Sia $\bar{v}' = c\bar{v}$, con $c \in \mathbb{R}$ non nullo. Allora, l’uguaglianza (4.4.1) implica

$$\hat{\sigma}_o(\bar{v}') = \hat{\sigma}_o(c\bar{v}) = c\hat{\sigma}_o(\bar{v}) = c\lambda\bar{v} = \lambda c\bar{v} = \lambda\bar{v}'.$$

Inoltre, se $\bar{u} = \text{vers}(\bar{v})$, allora abbiamo l’uguaglianza

$$\hat{\sigma}_o(\bar{u}) = \lambda\bar{u},$$

la quale implica

$$I_{\bar{u}} = \hat{\sigma}_o(\bar{u}) \cdot \bar{u} = \lambda\bar{u} \cdot \bar{u} = \lambda \mathbf{1} = \lambda. \text{ QED}$$

4.4.2 Definizione. Ogni vettore *non nullo* $\bar{v} \in \bar{\mathbf{P}}$ che soddisfa l’uguaglianza

$$\hat{\sigma}_o(\bar{v}) = \lambda\bar{v}, \quad \text{con} \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

è detto *autovettore* del tensore d’inerzia.

Inoltre, la retta r passante per o e generata da un autovettore \bar{v} è detta *asse principale* del tensore d’inerzia.

Il numero reale λ che compare nella precedente uguaglianza è detto *autovalore* relativo all’autovettore \bar{v} ed all’asse principale r . \square

4.4.3 Corollario. Per un sistema di masse non degeneri, gli autovalori sono positivi, dato che i momenti d'inerzia sono positivi. \square

4.4.4 Corollario. Una retta r , passante per o e generata da un versore \bar{u} , è un asse principale se e solo se il vettore $\hat{\sigma}_o(\bar{u})$ ha la direzione di r , ossia se e solo se il momento deviatorio $\bar{D}_{(o,\bar{u})}$ è nullo. \square

4.4.5 Lemma. Possiamo pensare il momento d'inerzia come una funzione che manda ogni versore \bar{u} nel corrispondente momento d'inerzia

$$I_o : \bar{\mathcal{S}} \rightarrow \mathbb{R} : \bar{u} \mapsto I_{(o,\bar{u})},$$

dove $\bar{\mathcal{S}} \subset \bar{\mathcal{P}}$ denota la sfera di raggio 1, con centro nell'origine $\bar{0} \in \bar{\mathcal{P}}$.

Pertanto possiamo parlare di massimo e minimo relativo della funzione I . \square

4.4.6 Proposizione. La funzione momento d'inerzia $I_o : \bar{\mathcal{S}} \rightarrow \mathbb{R}$ ha almeno un massimo ed un minimo relativo ed essi si verificano corrispondentemente ad un asse principale.

DIMOSTRAZIONE. [*Facoltativa.*]

La funzione I ha almeno un massimo ed un minimo relativo perché il dominio di definizione $\bar{\mathcal{S}}$ è chiuso e limitato.

Supponiamo che un massimo relativo della funzione I_o si verifichi relativamente al versore $\bar{u} \in \bar{\mathcal{S}}$.

Si consideri una qualunque curva differenziabile a valori in $\bar{\mathcal{S}}$

$$+) \quad \bar{c} : \mathbb{R} \rightarrow \bar{\mathcal{S}} : t \mapsto \bar{c}(t), \quad \text{tale che} \quad \bar{c}(0) = \bar{u}.$$

Restringendo la funzione I alla curva c , otteniamo la curva

$$I_o \circ \bar{c} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto I_{(o,\bar{c}(t))} = \sigma_o(\bar{c}(t), \bar{c}(t)).$$

Chiaramente, avendo la funzione I_o un massimo relativo corrispondentemente al versore $\bar{u} \in \bar{\mathcal{S}}$, anche la funzione $I_o \circ \bar{c}$ ha un massimo relativo corrispondentemente al versore $\bar{u} \in \bar{\mathcal{S}}$, cioè corrispondentemente a $t = 0$.

Perciò la derivata di $I_o \circ \bar{c}$ è nulla in $t = 0$, ossia, per la definizione di I_o e per la bilinearità di σ_o ,

$$0 = \frac{dI_o}{dt}(0) = 2\sigma_o(\bar{c}(0), \frac{d\bar{c}}{dt}(0)) = 2\hat{\sigma}_o(\bar{u}) \cdot \frac{d\bar{c}}{dt}(0),$$

ossia

$$*) \quad 0 = \hat{\sigma}_o(\bar{u}) \cdot \frac{d\bar{c}}{dt}(0).$$

Ma, per ipotesi, abbiamo

$$1 = \bar{c}(t) \cdot \bar{c}(t),$$

da cui otteniamo

$$**) \quad 0 = \bar{c}(0) \cdot \frac{d\bar{c}}{dt}(0) = \bar{u} \cdot \frac{d\bar{c}}{dt}(0).$$

Le uguaglianze *) e **) implicano che $\hat{\sigma}_o(\bar{u})$ è ortogonale a tutte le curve \bar{c} definite in +) che sono ortogonali ad \bar{u} . Perciò, $\hat{\sigma}_o(\bar{u})$ è parallelo ad \bar{u} . Quindi, abbiamo

$$\hat{\sigma}_o(\bar{u}) = \lambda \bar{u}, \quad \text{con} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Per il minimo relativo si procede in modo del tutto analogo. QED

4.4.7 Corollario. Siano \bar{u}_M e \bar{u}_m due versori tra loro ortogonali, relativamente ai quali si realizzano, rispettivamente, un massimo relativo ed un minimo relativo del momento d'inerzia (vedi anche il successivo Teorema 4.4.14).

Allora, abbiamo un massimo relativo della componente del momento deviatorio

$$D_{12} := \sigma(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$$

per i due versori ortogonali

$$\bar{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{u}_M + \bar{u}_m) \quad \text{e} \quad \bar{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{u}_M - \bar{u}_m).$$

Inoltre, il valore di tale D_{12} è

$$D_{12} = \frac{1}{2} (I_{(o, \bar{u}_M)} - I_{(o, \bar{u}_m)}).$$

DIMOSTRAZIONE. Siano \bar{e}_1, \bar{e}_2 due versori ortogonali.

Definendo i due nuovi versori

$$\bar{u}_+ := \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{e}_1 + \bar{e}_2) \quad \text{e} \quad \bar{u}_- := \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{e}_1 - \bar{e}_2),$$

otteniamo

$$\bar{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{u}_+ + \bar{u}_-) \quad \text{e} \quad \bar{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{u}_+ - \bar{u}_-).$$

Allora, per la bilinearità e la simmetria di σ_o , abbiamo

$$\begin{aligned} D_{12} := \sigma_o(\bar{e}_1, \bar{e}_2) &= \frac{1}{2} \sigma_o\left(\frac{\bar{e}_1 + \bar{e}_2}{\sqrt{2}}, \frac{\bar{e}_1 + \bar{e}_2}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{2} \sigma_o\left(\frac{\bar{e}_1 - \bar{e}_2}{\sqrt{2}}, \frac{\bar{e}_1 - \bar{e}_2}{\sqrt{2}}\right) \\ &= \frac{1}{2} \sigma_o(\bar{u}_+, \bar{u}_+) - \frac{1}{2} \sigma_o(\bar{u}_-, \bar{u}_-) \\ &= \frac{1}{2} (I_{(o, \bar{u}_+)} - I_{(o, \bar{u}_-)}). \end{aligned}$$

Chiaramente, se \bar{u}_+ è un autovettore con un massimo relativo del corrispondente momento d'inerzia e \bar{u}_- è un autovettore con un minimo relativo del corrispondente momento d'inerzia, allora abbiamo un massimo relativo di D_{12} . QED

4.4.2 Ricerca degli autovalori ed autovettori

Vogliamo ora risolvere il problema della ricerca degli assi principali e dei relativi autovalori, seguendo una procedura generale dell'algebra lineare.

Consideriamo una base ortonormale $\mathbf{B} = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$.

4.4.8 Nota. Supponiamo per un momento di conoscere un autovalore λ .

Allora, l'equazione vettoriale (4.4.1) nell'incognita $\bar{v} \in \bar{\mathbf{P}}$ può essere scritta come segue

$$(4.4.2) \quad (\hat{\sigma}_o - \lambda \text{id})(\bar{v}) = \bar{0},$$

ossia, come un sistema di tre equazioni lineari scalari nell'incognita $(v^i) \in \mathbb{R}^3$

$$(4.4.3) \quad \begin{aligned} \sum_j (\sigma_j^1 - \lambda \delta_j^1) v^j &= 0, \\ \sum_j (\sigma_j^2 - \lambda \delta_j^2) v^j &= 0, \\ \sum_j (\sigma_j^3 - \lambda \delta_j^3) v^j &= 0. \end{aligned}$$

Abbiamo dunque un'equazione vettoriale lineare omogenea, o equivalentemente, un sistema omogeneo di tre equazioni scalari lineari.

Per un teorema generale di algebra lineare, l'equazione vettoriale omogenea (4.4.2), o, equivalentemente, il sistema scalare omogeneo (4.4.3), ammette soluzioni non nulle se e solo se

$$(4.4.4) \quad \det(\hat{\sigma}_o - \lambda \text{id}) = \det(\sigma_j^i - \lambda \delta_j^i) = 0.$$

Pertanto, al fine di trovare gli autovettori di $\hat{\sigma}$, dobbiamo innanzitutto cercare le soluzioni $\lambda \in \mathbb{R}$ dell'equazione (4.4.4), detta *equazione degli autovalori*, ossia dobbiamo innanzitutto cercare le radici $\lambda \in \mathbb{R}$ del polinomio di terzo grado, detto *polinomio caratteristico*,

$$P(\lambda) \equiv \sum_h (-1)^h P_h \lambda^h := \det(\sigma_j^i - \lambda \delta_j^i). \quad \square$$

4.4.9 Proposizione. L'espressione del polinomio caratteristico è

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} I_1 - \lambda & D_2^1 & D_3^1 \\ D_1^2 & I_2 - \lambda & D_3^2 \\ D_1^3 & D_2^3 & I_3 - \lambda \end{pmatrix} \\ &= -\lambda^3 + (I_1 + I_2 + I_3) \lambda^2 - (I_1 I_2 + I_2 I_3 + I_3 I_1 - (D_2^1)^2 - (D_3^2)^2 - (D_1^3)^2) \lambda \\ &\quad + (I_1 I_2 I_3 + 2 D_2^1 D_3^2 D_1^3 - I_1 (D_3^2)^2 - I_2 (D_1^3)^2 - I_3 (D_2^1)^2). \quad \square \end{aligned}$$

4.4.10 Corollario. I coefficienti del polinomio caratteristico coincidono con gli invarianti di $\hat{\sigma}_o$

$$\begin{aligned} P_2 &= I_1 + I_2 + I_3, \\ P_1 &= I_1 I_2 + I_2 I_3 + I_3 I_1 - (D_2^1)^2 - (D_3^2)^2 - (D_1^3)^2, \\ P_0 &= I_1 I_2 I_3 + 2 D_2^1 D_3^2 D_1^3 - I_1 (D_3^2)^2 - I_2 (D_1^3)^2 - I_3 (D_2^1)^2. \end{aligned}$$

Quindi, i coefficienti del polinomio caratteristico sono invarianti rispetto al cambiamento di base. \square

4.4.11 Nota. Dopo aver trovato le radici λ del polinomio caratteristico, possiamo trovare, per ogni radice λ , i corrispondenti autovettori $\bar{v} \in \bar{\mathbf{P}}$, risolvendo l'equazione lineare vettoriale omogenea, nell'incognita \bar{v} ,

$$(4.4.5) \quad \hat{\sigma}_o(\bar{v}) = \lambda \bar{v},$$

o, equivalentemente, risolvendo il sistema di tre equazioni lineari scalari omogenee, nell'incognita (v^i) ,

$$(4.4.6) \quad \begin{aligned} \sum_j (\sigma_j^1 - \lambda \delta_j^1) v^j &= 0, \\ \sum_j (\sigma_j^2 - \lambda \delta_j^2) v^j &= 0, \\ \sum_j (\sigma_j^3 - \lambda \delta_j^3) v^j &= 0. \square \end{aligned}$$

4.4.12 Nota. Sia data una radice λ del polinomio caratteristico.

Sia $\rho(\lambda)$ il rango della matrice $(\sigma_j^i - \lambda \delta_j^i)$.

Per ipotesi, abbiamo $\rho(\lambda) < 3$.

Se $\rho(\lambda) = 2$, allora tutte le soluzioni non nulle dell'equazione (4.4.5), ossia equivalentemente, del sistema (4.4.6), sono generate da una soluzione non nulla. Dunque, in tal caso, tutti gli autovettori relativi all'autovalore λ sono i vettori non nulli di una retta.

Se $\rho(\lambda) = 1$, allora tutte le soluzioni non nulle dell'equazione (4.4.5), ossia equivalentemente, del sistema (4.4.6), sono generate da due soluzioni indipendenti non nulle. Dunque, in tal caso, tutti gli autovettori relativi all'autovalore λ sono i vettori non nulli di un piano.

Se $\rho(\lambda) = 0$, allora tutte le soluzioni non nulle dell'equazione (4.4.5), ossia equivalentemente, del sistema (4.4.6), sono generate da tre soluzioni indipendenti non nulle. Dunque, in tal caso, tutti gli autovettori relativi all'autovalore λ sono i vettori non nulli di tutto lo spazio. \square

4.4.13 Nota. Per il “teorema fondamentale dell'algebra”, il polinomio caratteristico ha tre radici complesse; di esse, una è reale e le altre due sono una la complessa coniugata dell'altra. \square

Ma, a noi interessano solo le radici reali.

Fortunatamente, il seguente “teorema spettrale” (di cui omettiamo la dimostrazione) garantisce che tutte e tre le radici sono reali, per il fatto che $\hat{\sigma}$ è un tensore simmetrico.

4.4.14 Teorema. [*Teorema spettrale.*] Essendo $\hat{\sigma}$ simmetrico, il polinomio caratteristico ha tre radici reali $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$.

Pertanto, possono capitare i seguenti tre casi esclusivi.

1) I tre autovalori sono distinti

$$\lambda_1 \neq \lambda_2, \quad \lambda_2 \neq \lambda_3, \quad \lambda_3 \neq \lambda_1.$$

In tal caso esistono solo tre assi principali r_1, r_2, r_3 , corrispondenti ai tre autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, ed essi sono tra loro ortogonali.

2) Due autovalori sono uguali e l'altro è diverso dagli altri due

$$\lambda_1 = \lambda_2, \quad \lambda_1 \neq \lambda_3 \neq \lambda_2.$$

In tal caso, esiste un solo asse principale r_3 corrispondente all'autovalore λ_3 e gli assi principali corrispondenti all'autovalore $\lambda_1 = \lambda_2$ sono tutte le rette r passanti per o ed ortogonali ad r_3 .

3) I tre autovalori sono uguali

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3.$$

In tal caso, tutte le rette r passanti per o sono assi principali corrispondenti allo stesso autovalore $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$. \square

4.4.15 Nota. Con riferimento ai tre casi del teorema spettrale, abbiamo i seguenti valori del rango $\rho(\lambda)$.

1) Nel primo caso, abbiamo

$$\rho(\lambda_1) = \rho(\lambda_2) = \rho(\lambda_3) = 2.$$

2) Nel secondo caso, abbiamo

$$\rho(\lambda_3) = 2, \quad \rho(\lambda_1) = \rho(\lambda_2) = 1.$$

3) Nel terzo caso, abbiamo

$$\rho(\lambda_1) = \rho(\lambda_2) = \rho(\lambda_3) = 0. \square$$

4.4.16 Corollario. [*Diagonalizzazione.*] Esiste una base ortonormale $\mathbf{B} = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ costituita da autovettori di $\hat{\sigma}$. In tale base, la matrice di $\hat{\sigma}$ è la matrice diagonale

$$(\sigma_j^i) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}.$$

Più precisamente, abbiamo i seguenti casi, con riferimento ai tre casi del teorema spettrale.

1) Nel primo caso, abbiamo una sola base ortonormale di autovettori (a meno dei segni dei versori $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$.)

2) Nel secondo caso, abbiamo infinite basi ortonormali di autovettori dipendenti da un parametro. Infatti, il versore \bar{e}_3 è unico (a meno del segno), mentre le coppie (\bar{e}_1, \bar{e}_2) sono tutte le coppie ortonormali ortogonali ad \bar{e}_3 .

3) Nel terzo caso, abbiamo infinite basi ortonormali di autovettori parametrizzate da due parametri. Infatti, tutte le basi ortonormali sono basi di autovettori. \square

4.4.17 Corollario. Con riferimento ad una base ortonormale di autovettori $B = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$, l'espressione degli invarianti diventa

$$\begin{aligned} P_2 &= I_1 + I_2 + I_3, \\ P_1 &= I_1 I_2 + I_2 I_3 + I_3 I_1, \\ P_0 &= I_1 I_2 I_3. \square \end{aligned}$$

4.4.18 Corollario. Se conosciamo gli invarianti di $\hat{\sigma}$ possiamo risalire agli autovalori, ossia ai momenti d'inerzia degli assi principali.

Pertanto, se conosciamo anche gli assi principali, allora possiamo determinare $\hat{\sigma}_o$. \square

4.5 Rappresentazione grafica

Dall'algebra lineare sappiamo che ad ogni forma bilineare simmetrica è possibile associare una quadrica, la quale caratterizza la forma bilineare stessa. In particolare, ad una forma bilineare simmetrica definita positiva possiamo associare un ellissoide.

Dunque, al tensore d'inerzia possiamo associare un ellissoide, il quale ci fornisce una rappresentazione grafica di tale tensore.

Per semplicità, ci limitiamo a considerare un sistema di masse non degeneri.

Consideriamo un sistema di masse discreto o continuo, un polo o ed il tensore d'inerzia $\hat{\sigma}$ associato.

4.5.1 Definizione. Sia $k \in \mathbb{R}^+$ un numero reale positivo dato. Definiamo *ellissoide d'inerzia* il sottinsieme $\mathbf{E} \subset \mathbf{P}$ costituito dai punti $p \in \mathbf{P}$ che soddisfano l'equazione

$$(4.5.7) \quad \sigma_o((p - o), (p - o)) = k^2. \square$$

Studiamo le principali proprietà geometriche dell'ellissoide d'inerzia.

Sia $\mathbf{B} = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ una base ortonormale e sia (x^1, x^2, x^3) il sistema di coordinate cartesiano associato alla base \mathbf{B} ed al polo o .

4.5.2 Proposizione. L'espressione in coordinate dell'equazione (4.5.7) è

$$\begin{aligned} \sum_{ij} \sigma_{ij} x^i x^j &= I_1 (x^1)^2 + I_2 (x^2)^2 + I_3 (x^3)^2 + 2 D_{12} x^1 x^2 + 2 D_{23} x^2 x^3 + 2 D_{31} x^3 x^1 \\ &= k^2. \end{aligned}$$

In particolare, se la base \mathbf{B} è costituita da autovettori, allora l'equazione diventa

$$\begin{aligned} \sum_{ij} \sigma_{ij} x^i x^j &= I_1 (x^1)^2 + I_2 (x^2)^2 + I_3 (x^3)^2 \\ &= k^2. \square \end{aligned}$$

4.5.3 Proposizione. Per ogni versore $\bar{u} \in \bar{\mathbf{P}}$, esistono esattamente due soluzioni $p \in \mathbf{P}$ dell'equazione (4.5.7), tali che il vettore $(p - o)$ sia proporzionale ad \bar{u} . Esse risultano opposte rispetto ad o e sono date da

$$p = o \pm \frac{k}{\sqrt{I_{\bar{u}}}} \bar{u},$$

ossia da

$$p = o \pm r(p) \bar{u}, \quad \text{dove} \quad r(p) = \|p - o\| = \frac{k}{\sqrt{I_{\bar{u}}}}.$$

DIMOSTRAZIONE. Il fatto che σ sia definita positiva implica che esiste una soluzione dell'equazione. Dal fatto che σ^{\square} sia quadratica segue che esistono due soluzioni e che l'una è l'opposta dell'altra. Il valore di tali soluzioni segue immediatamente dalla definizione di momento d'inerzia. QED

Vediamo ora come possiamo ricavare graficamente informazioni sul tensore d'inerzia dall'ellissoide d'inerzia.

4.5.4 Corollario. Per ogni punto $p \in \mathbf{E}$, il momento d'inerzia rispetto alla retta r generata dal vettore $(p - o)$ è dato da

$$I_r = \frac{k^2}{(p - o)^2} \cdot \square$$

4.5.5 Proposizione. Sia $\bar{v} \in \bar{\mathbf{P}}$ un vettore non nullo. Allora, il vettore $\hat{\sigma}_o(\bar{v}) \in \bar{\mathbf{P}}$ è il vettore

- 1) la cui direzione è ortogonale al piano π tangente all'ellissoide nel punto in cui la semiretta orientata (o, \bar{v}) incontra l'ellissoide,
- 2) il cui modulo è dato da

$$\|\hat{\sigma}_o(\bar{v})\| = \|\bar{v}\| I_{\bar{u}} / \cos \phi,$$

dove \bar{u} è il versore $\bar{u} = \bar{v} / \|\bar{v}\|$ e ϕ è l'angolo non orientato formato dalle semirette (o, \bar{v}) e $(o, \hat{\sigma}_o(\bar{v}))$,

- 3) il cui verso è tale che l'angolo ϕ sia minore di $\pi/2$.

DIMOSTRAZIONE. 1) Sia $o + \bar{r}$ il punto in cui la semiretta orientata (o, \bar{v}) incontra l'ellissoide; abbiamo dunque

$$\sigma_o(\bar{r}, \bar{r}) = k^2.$$

Per sua definizione, il piano π tangente all'ellissoide nel punto $o + \bar{r}$ è costituito dai vettori $\bar{w} \in \bar{\mathbf{P}}$ che sono tangenti alle curve differenziabili a valori sull'ellissoide e pasanti per $o + \bar{r}$.

Consideriamo una qualunque curva di questo tipo

$$c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbf{E} : t \mapsto o + \bar{s}(t), \quad \text{con} \quad \bar{s}(0) = \bar{r}.$$

Allora, dato che c ha valori sull'ellissoide, per ogni $t \in \mathbb{R}$, abbiamo

$$\sigma_o(\bar{s}(t), \bar{s}(t)) = k^2,$$

da cui, derivando rispetto a t in $t = 0$, otteniamo

$$2\sigma_o(\bar{s}(0), \frac{d\bar{s}}{dt}(0)) = 2\sigma_o(\bar{s}(0), \bar{w}) = 0.$$

Pertanto $\sigma(\bar{r})$ è ortogonale a tutti i vettori \bar{w} .

2) Segue dalle uguaglianze

$$\begin{aligned} I_{(o, \bar{u})} &= \hat{\sigma}_o(\bar{u}) \cdot \bar{u} = \|\hat{\sigma}_o(\bar{u})\| \|\bar{u}\| \cos \phi = \|\hat{\sigma}_o(\bar{u})\| \cos \phi, \\ \|\hat{\sigma}_o(\bar{v})\| &= \bar{v}^2 \|\hat{\sigma}_o(\bar{u})\|. \end{aligned}$$

3) Segue dalla formula precedente e dal fatto che $I_{\bar{u}} > 0$. QED

Vedi Figura 4.5.10.

Il teorema spettrale può essere reinterpretato graficamente tramite l'ellissoide d'inerzia, nel modo seguente.

4.5.6 Nota. Sia r una retta passante per o e siano q' e q'' i due punti, opposti rispetto ad o , in cui r incontra l'ellissoide. Allora, i due piani π' e π'' tangenti all'ellissoide in q' e q'' sono paralleli.

DIMOSTRAZIONE. Il piano tangente all'ellissoide in un punto p è costituito dai vettori ortogonali alla forma

$$n_p : \bar{\mathbf{P}} \rightarrow \mathbb{R} : \bar{v} \mapsto 2\sigma((p - o), \bar{v}),$$

ottenuta derivando, rispetto al punto p , la funzione

$$f : \mathbf{P} \rightarrow \mathbb{R} : p \mapsto \sigma((p - o), (p - o)),$$

la quale determina l'equazione dell'ellissoide.

D'altra parte, essendo q' e q'' opposti rispetto ad o , abbiamo

$$n_{q'} = -n_{q''}.$$

Perciò, lo spazio dei vettori ortogonali ad $n_{q'}$ coincide con lo spazio dei vettori ortogonali ad $n_{q''}$. QED

4.5.7 Definizione. Definiamo *asse principale* dell'ellissoide d'inerzia una retta, passante per o , tale che il piano tangente all'ellissoide in ciascuno dei due punti in cui essa incontra l'ellissoide è ortogonale alla retta stessa.

Vedi Figura 4.5.11. \square

4.5.8 Proposizione. Gli assi principali dell'ellissoide d'inerzia coincidono con gli assi principali del tensore d'inerzia.

DIMOSTRAZIONE. Segue immediatamente dalle definizioni di asse principale dell'ellissoide d'inerzia e di asse principale del tensore d'inerzia, e dal fatto che, per ogni $\bar{v} \in \bar{\mathbf{P}}$ non nullo, il vettore $\hat{\sigma}_o(\bar{v})$ è ortogonale al piano tangente all'ellissoide nel punto in cui la semiretta orientata (o, \bar{v}) incontra l'ellissoide. QED

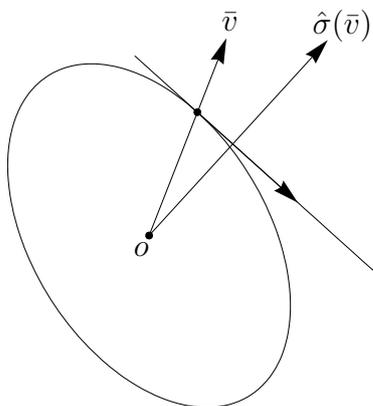
4.5.9 Proposizione. Esistono almeno tre assi principali dell'ellissoide d'inerzia ortogonali tra loro. Più precisamente, possono capitare i seguenti tre casi esclusivi.

1) Se i tre autovalori del tensore d'inerzia sono distinti tra loro, allora gli assi principali dell'ellissoide d'inerzia sono esattamente tre e sono tra loro ortogonali.

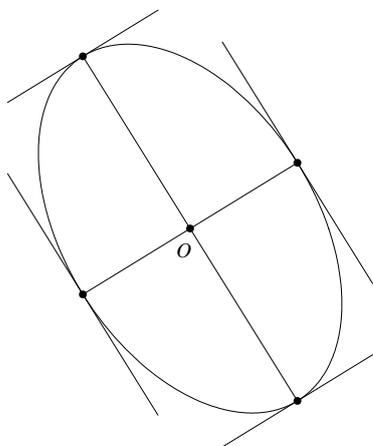
2) Se due autovalori del tensore d'inerzia coincidono ed il terzo è distinto dai primi due, allora l'insieme degli assi principali dell'ellissoide d'inerzia è costituito da una retta r passante per o e da tutte le rette passanti per o ed ortogonali ad r . In tal caso, l'ellissoide è di rotazione attorno alla retta r .

3) Se i tre autovalori del tensore d'inerzia coincidono, allora tutte le rette passanti per o sono assi principali dell'ellissoide d'inerzia. In tal caso l'ellissoide è una sfera.

DIMOSTRAZIONE. Segue immediatamente dal teorema spettrale per il tensore d'inerzia. QED



4.5.10 Figura. Illustrazione dell'ellissoide d'inerzia.



4.5.11 Figura. Illustrazione degli assi principali dell'ellissoide d'inerzia.

4.6 Spostamento del polo

Finora ci siamo riferiti ad un polo fissato $o \in \mathbf{P}$. Però, talvolta è necessario cambiare polo e considerare un nuovo polo $o' \in \mathbf{P}$. Per esempio, è spesso utile considerare come nuovo polo il centro di massa del sistema di masse $p_0 \in \mathbf{P}$.

Pertanto, è utile analizzare come cambia il tensore d'inerzia quando cambiamo polo.

Consideriamo un sistema di masse discreto o continuo, due poli qualunque o , o' ed il polo privilegiato costituito dal centro di massa del sistema di masse p_0 .

Denotiamo i relativi tensori d'inerzia, rispettivamente, con $\hat{\sigma}_o$, $\hat{\sigma}_{o'}$, $\hat{\sigma}_{p_0}$.

4.6.1 Proposizione. [*Facoltativo.*] Per ogni $\bar{v} \in \bar{\mathbf{P}}$, abbiamo

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{o'}(\bar{v}) &= \hat{\sigma}_o(\bar{v}) + m_0 \left((o' - o)^2 - 2(p_0 - o) \cdot (o' - o) \right) \bar{v} \\ &\quad + m_0 \left((p_0 - o') \cdot \bar{v} \right) (o' - o) + m_0 \left((o' - o) \cdot \bar{v} \right) (p_0 - o). \end{aligned}$$

DIMOSTRAZIONE. Tenendo conto dell'uguaglianza

$$p_i - o' = (p_i - o) + (o - o'),$$

otteniamo

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{o'}(\bar{v}) &= \sum_i m_i (p_i - o')^2 \bar{v} - \sum_i m_i \left((p_i - o') \cdot \bar{v} \right) (p_i - o') \\ &= \sum_i m_i (p_i - o)^2 \bar{v} + \sum_i m_i (o - o')^2 \bar{v} + 2 \sum_i m_i (p_i - o) \cdot (o - o') \bar{v} \\ &\quad - \sum_i m_i \left((p_i - o) \cdot \bar{v} \right) (p_i - o) - \sum_i m_i \left((p_i - o) \cdot \bar{v} \right) (o - o') \\ &\quad - \sum_i m_i \left((o - o') \cdot \bar{v} \right) (p_i - o) - \sum_i m_i \left((o - o') \cdot \bar{v} \right) (o - o') \\ &= \hat{\sigma}(\bar{v}) + m_0 (o' - o)^2 \bar{v} - 2 m_0 \left((p_0 - o) \cdot (o' - o) \right) \bar{v} + m_0 \left((p_0 - o) \cdot \bar{v} \right) (o' - o) \\ &\quad + m_0 \left((o' - o) \cdot \bar{v} \right) (p_0 - o) - m_0 \left((o' - o) \cdot \bar{v} \right) (o' - o). \text{ QED} \end{aligned}$$

4.6.2 Corollario. [*Facoltativo.*] Consideriamo un vettore \bar{u} ed i momenti d'inerzia $I'_{(o', \bar{u})}$ ed $I_{(o, \bar{u})}$ relativi alle rette (o', \bar{u}) e (o, \bar{u}) . Allora, abbiamo

$$\begin{aligned} I'_{(o', \bar{u})} &= I_{(o, \bar{u})} \\ &+ m_0 \left((o' - o)^2 - \left((o' - o) \cdot \bar{u} \right)^2 - 2(p_0 - o) \cdot (o' - o) + 2 \left((p_0 - o) \cdot \bar{u} \right) \left((o' - o) \cdot \bar{u} \right) \right). \square \end{aligned}$$

4.6.3 Corollario. [*Facoltativo.*] Consideriamo due vettori ortogonali \bar{u} e \bar{v} ed le componenti dei momenti deviatori $D'_{(o', \bar{u}, \bar{v})}$ e $D_{(o, \bar{u}, \bar{v})}$ relativi alle coppie di rette orientate

$((o', \bar{u}), (o', \bar{v}))$ e $((o, \bar{u}), (o, \bar{v}))$. Allora, abbiamo

$$D'_{(o', \bar{u}, \bar{v})} = D_{(o, \bar{u}, \bar{v})} + m_0 \left(-((o' - o) \cdot \bar{u}) ((o' - o) \cdot \bar{v}) + ((p_0 - o) \cdot \bar{u}) ((o' - o) \cdot \bar{v}) + ((o' - o) \cdot \bar{u}) ((p_0 - o) \cdot \bar{v}) \right). \square$$

Nel caso particolare in cui $o = p_0$, otteniamo formule molto più semplici.

4.6.4 Corollario. [*Facoltativo.*] Per ogni $\bar{v} \in \bar{\mathbf{P}}$, abbiamo

$$\hat{\sigma}_o(\bar{v}) = \hat{\sigma}_{p_0}(\bar{v}) + m_0 \left((p_0 - o)^2 \bar{v} - ((p_0 - o) \cdot \bar{v}) (p_0 - o) \right),$$

cioè

$$\hat{\sigma}_o(\bar{v}) = \hat{\sigma}_{p_0}(\bar{v}) + \hat{\sigma}_{m_0}(\bar{v}),$$

dove $\hat{\sigma}_{m_0}$ è il tensore d'inerzia, rispetto al polo o , del sistema di masse costituito dalla sola coppia (p_0, m) .

DIMOSTRAZIONE. Segue dalla Proposizione 4.6.1, sostituendo p_0 al posto di o e poi chiamando (per semplicità di notazione) o il polo o' .

Ma è anche istruttiva la seguente dimostrazione diretta.

Tenendo conto delle uguaglianze

$$p_i - o = (p_i - p_0) + (p_0 - o) \quad \text{e} \quad \sum_i m_i (p_i - p_0) = \bar{0},$$

otteniamo

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_o(\bar{v}) &= \sum_i m_i (p_i - o)^2 \bar{v} - \sum_i m_i ((p_i - o) \cdot \bar{v}) (p_i - o) \\ &= \sum_i m_i (p_i - p_0)^2 \bar{v} + \sum_i m_i (p_0 - o)^2 \bar{v} + 2 \sum_i m_i (p_i - p_0) \cdot (p_0 - o) \bar{v} \\ &\quad - \sum_i m_i ((p_i - p_0) \cdot \bar{v}) (p_i - p_0) - \sum_i m_i ((p_i - p_0) \cdot \bar{v}) (p_0 - o) \\ &\quad - \sum_i m_i ((p_0 - o) \cdot \bar{v}) (p_i - p_0) - \sum_i m_i ((p_0 - o) \cdot \bar{v}) (p_0 - o) \\ &= \sum_i m_i (p_i - p_0)^2 \bar{v} + m (p_0 - o)^2 \bar{v} + 0 \\ &\quad - \sum_i m_i ((p_i - p_0) \cdot \bar{v}) (p_i - p_0) - 0 \\ &\quad - 0 - m ((p_0 - o) \cdot \bar{v}) (p_0 - o) \\ &= \hat{\sigma}_{p_0}(\bar{v}) + m \left((p_0 - o)^2 \bar{v} - ((p_0 - o) \cdot \bar{v}) (p_0 - o) \right). \text{ QED} \end{aligned}$$

4.6.5 Corollario. [*Teorema di Huygens.*] Consideriamo un versore \bar{u} ed i momenti d'inerzia $I_{(o',\bar{u})}$ ed $I_{(p_0,\bar{u})}$ relativi alle rette (o',\bar{u}) e (p_0,\bar{u}) . Allora, abbiamo

$$I_{(o,\bar{u})} = I_{(p_0,\bar{u})} + m d^2,$$

dove $d \in \mathbb{R}$ è la distanza tra le rette (o,\bar{u}) e (p_0,\bar{u}) .

Quindi, il termine $m d^2$ è il momento d'inerzia, rispetto alla retta (o,\bar{u}) , del sistema di masse costituito dalla sola coppia (p_0, m) .

DIMOSTRAZIONE. Segue immediatamente dal Corollario 4.6.4. Infatti, abbiamo

$$\begin{aligned} I_{(o,\bar{u})} &= \hat{\sigma}_o(\bar{u}) \cdot \bar{u} \\ &= \hat{\sigma}_{p_0}(\bar{u}) \cdot \bar{u} + m \left((p_0 - o)^2 (\bar{u} \cdot \bar{u}) - ((p_0 - o) \cdot \bar{u}) ((p_0 - o) \cdot \bar{u}) \right) \\ &= \hat{\sigma}_{p_0}(\bar{u}) \cdot \bar{u} + m \left((p_0 - o)^2 - ((p_0 - o) \cdot \bar{u}) ((p_0 - o) \cdot \bar{u}) \right) \\ &= I_{(p_0,\bar{u})} + m d^2. \end{aligned}$$

Ma è anche istruttiva la seguente dimostrazione diretta.

Siano \bar{d}_{oi} e \bar{d}_{op_0} le distanze della particella i -ma dalla retta (o,\bar{u}) e dalla retta (p_0,\bar{u}) , rispettivamente. Inoltre, sia \bar{d} la distanza tra le rette (o,\bar{u}) e (p_0,\bar{u}) . Allora, abbiamo

$$\bar{d}_{oi} = \bar{d}_{p_0i} + \bar{d},$$

e quindi

$$d_{oi}^2 = d_{p_0i}^2 + d^2 + 2 \bar{d}_{p_0i} \cdot \bar{d}.$$

Allora, tenendo conto dell'uguaglianza

otteniamo

$$\begin{aligned} I_{(o,\bar{u})} &= \sum_i m_i d_{oi}^2 \\ &= \sum_i m_i (d_{p_0i}^2 + d^2 + 2 \bar{d}_{p_0i} \cdot \bar{d}) \\ &= I_{(p_0,\bar{u})} + m d^2 + 0. \text{ QED} \end{aligned}$$

4.6.6 Corollario. [*Facoltativo.*] Consideriamo due versori ortogonali \bar{u} e \bar{v} ed le componenti dei momenti deviatori $D_{(o,\bar{u},\bar{v})}$ e $D_{p_0 \bar{u} \bar{v}}$ relativi alle coppie di rette orientate $((o,\bar{u}), (o,\bar{v}))$ e $((p_0,\bar{u}), (p_0,\bar{v}))$. Allora, abbiamo

$$D_{(o,\bar{u},\bar{v})} = D_{(p_0,\bar{u},\bar{v})} - m ((p_0 - o) \cdot \bar{u}) ((p_0 - o) \cdot \bar{v}).$$

Quindi, il termine $-m ((p_0 - o) \cdot \bar{u}) ((p_0 - o) \cdot \bar{v})$ è la componente del momento deviatorio, rispetto alle rette (o,\bar{u}) ed (o,\bar{v}) , del sistema di masse costituito dalla sola coppia (p_0, m) .

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione è analoga a quella del corollario precedente. QED

4.7 Proprietà di invarianza

Studiamo ora come opportune trasformazioni dello spazio \mathbf{P} si riflettano in utili proprietà del tensore d'inerzia.

4.7.1 Assi principali ed invarianza rispetto a simmetrie

L'invarianza del sistema di masse rispetto ad eventuali simmetrie del sistema di masse è utile per determinare gli assi principali, come indicato dalla seguente Proposizione.

Consideriamo un sistema discreto di masse ed un polo o .

4.7.1 Proposizione. Sia $f : \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P}$ una simmetria rispetto ad una retta r passante per il polo o . Se il sistema di masse è invariante rispetto ad f , allora r è un asse principale.

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo il versore \bar{u} (definito a meno del segno) che genera r .

Dimostriamo che $\hat{\sigma}(\bar{u})$ è parallelo ad \bar{u} . In altre parole, dimostriamo che, se \bar{v} è un qualunque versore ortogonale ad r , allora $\hat{\sigma}(\bar{u}) \cdot \bar{v} = 0$.

Infatti, per la simmetria del sistema, per ogni punto materiale p_i di massa m_i , il punto materiale $f(p_i)$ ha la stessa massa m_i e soddisfa alle uguaglianze

$$(p_i - o) \cdot \bar{u} = (f(p_i) - o) \cdot \bar{u} \quad \text{e} \quad (p_i - o) \cdot \bar{v} = -(f(p_i) - o) \cdot \bar{v}.$$

Pertanto, sommando i contributi di tutte le particelle, otteniamo

$$\hat{\sigma}_o(\bar{u}) \cdot \bar{v} = 0. \text{ QED}$$

4.7.2 Proposizione. Sia $f : \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P}$ una simmetria rispetto ad un piano π passante per il polo o . Se il sistema di masse è invariante rispetto ad f , allora la retta r passante per o ed ortogonale a π è un asse principale.

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo il versore \bar{u} (definito a meno del segno) che genera r .

Dimostriamo che $\hat{\sigma}(\bar{u})$ è parallelo ad \bar{u} . In altre parole, dimostriamo che, se \bar{v} è un qualunque versore ortogonale ad r , allora $\hat{\sigma}(\bar{u}) \cdot \bar{v} = 0$.

Infatti, per la simmetria del sistema, per ogni punto materiale p_i di massa m_i , il punto materiale $f(p_i)$ ha la stessa massa m_i e soddisfa alle uguaglianze

$$(p_i - o) \cdot \bar{u} = -(f(p_i) - o) \cdot \bar{u} \quad \text{e} \quad (p_i - o) \cdot \bar{v} = (f(p_i) - o) \cdot \bar{v}.$$

Pertanto, sommando i contributi di tutte le particelle, otteniamo

$$\hat{\sigma}_o(\bar{u}) \cdot \bar{v} = 0. \text{ QED}$$

I risultati precedenti possono essere estesi anche ad un sistema continuo di masse.

4.7.2 Assi principali ed invarianza rispetto a rotazioni

[Sezione facoltativa.]

Ogni trasformazione rigida dello spazio \mathbf{P} lascia il tensore d'inerzia invariato in un certo senso.

Da questo fatto segue anche che se il sistema di masse è invariante rispetto ad una rotazione non nulla intorno ad una retta, allora questa retta è un asse principale.

Consideriamo un sistema discreto di masse ed un polo o .

4.7.3 Lemma. Ogni trasformazione $f : \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P}$ induce una trasformazione del polo

$$o \mapsto o' := f(o). \square$$

4.7.4 Lemma. Ogni trasformazione $f : \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P}$ induce una trasformazione del sistema di masse

$$\mathbf{S} := \left((p_1, m_1), \dots, (p_n, m_n) \right) \mapsto \mathbf{S}' := \left((f(p_1), m_1), \dots, (f(p_n), m_n) \right).$$

DIMOSTRAZIONE. Segue immediatamente dalla Proposizione 2.2.1. QED

4.7.5 Lemma. Ogni trasformazione $f : \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P}$ induce una trasformazione del tensore d'inerzia

$$\hat{\sigma}_o \mapsto \hat{\sigma}' \quad \text{e} \quad \sigma_o \mapsto \sigma',$$

dove

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}(\bar{u}) &= \sum_i m_i \left((p_i - o)^2 \bar{u} - ((p_i - o) \cdot \bar{u}) (p_i - o) \right) \\ \hat{\sigma}'(\bar{u}) &= \sum_i m_i \left((f(p_i) - f(o))^2 \bar{u} - ((f(p_i) - f(o)) \cdot \bar{u}) (f(p_i) - f(o)) \right) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \sigma_o(\bar{u}, \bar{v}) &= \sum_i m_i \left((p_i - o)^2 (\bar{u} \cdot \bar{v}) - ((p_i - o) \cdot \bar{u}) ((p_i - o) \cdot \bar{v}) \right) \\ \sigma'_o(\bar{u}, \bar{v}) &= \sum_i m_i \left((f(p_i) - f(o))^2 (\bar{u} \cdot \bar{v}) - ((f(p_i) - f(o)) \cdot \bar{u}) ((f(p_i) - f(o)) \cdot \bar{v}) \right). \square \end{aligned}$$

4.7.6 Definizione. Il tensore d'inerzia $\hat{\sigma}$ è detto *invariante* rispetto ad una trasformazione $f : \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P}$ se

$$f(o) = o \quad \text{e} \quad \hat{\sigma}'_o = \hat{\sigma}_o. \square$$

4.7.7 Nota. Se $\hat{\sigma}$ è invariante rispetto ad una trasformazione $f : \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P}$, allora abbiamo anche

$$\sigma'_o = \sigma_o. \square$$

4.7.8 Proposizione. Sia $f : \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P}$ una trasformazione rigida che lasci invariante il polo o . Allora, per ogni $\bar{u}, \bar{v} \in \bar{\mathbf{P}}$, valgono le uguaglianze

$$\hat{\sigma}'_o(Df(\bar{u})) = Df(\hat{\sigma}'_o(\bar{u})) \quad \text{e} \quad \sigma'_o(Df(\bar{u}), Df(\bar{v})) = \sigma_o(\bar{u}, \bar{v}).$$

DIMOSTRAZIONE. [Facoltativa.] Tenendo conto del fatto che f è una trasformazione rigida (per cui f preserva le distanze tra i punti e Df preserva i prodotti scalari tra i vettori), otteniamo

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}'_o(Df(\bar{u})) &= \\ &= \sum_i m_i \left((f(p_i) - f(o))^2 Df(\bar{u}) - ((f(p_i) - f(o)) \cdot Df(\bar{u})) (f(p_i) - f(o)) \right) \\ &= \sum_i m_i \left((p_i - o)^2 Df(\bar{u}) - (Df(p_i - o) \cdot Df(\bar{u})) (f(p_i) - f(o)) \right) \\ &= \sum_i m_i \left((p_i - o)^2 Df(\bar{u}) - ((p_i - o) \cdot \bar{u}) (Df(p_i - o)) \right) \\ &= Df \left(\sum_i m_i \left((p_i - o)^2 \bar{u} - ((p_i - o) \cdot \bar{u}) (p_i - o) \right) \right) \\ &= Df(\hat{\sigma}'_o(\bar{u})), \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \sigma'_o(Df(\bar{u}), Df(\bar{v})) &= \\ &= \sum_i m_i \left((f(p_i) - f(o))^2 (Df(\bar{u}) \cdot Df(\bar{v})) - ((f(p_i) - f(o)) \cdot Df(\bar{u})) ((f(p_i) - f(o)) \cdot Df(\bar{v})) \right) \\ &= \sum_i m_i \left((p_i - o)^2 (Df(\bar{u}) \cdot Df(\bar{v})) - (Df(p_i - o) \cdot Df(\bar{u})) (Df(p_i - o) \cdot Df(\bar{v})) \right) \\ &= \sum_i m_i \left((p_i - o)^2 (\bar{u} \cdot \bar{v}) - ((p_i - o) \cdot \bar{u}) ((p_i - o) \cdot \bar{v}) \right) \\ &= \sigma_o(\bar{u}, \bar{v}). \text{ QED} \end{aligned}$$

4.7.9 Nota. Possiamo formulare la Proposizione precedente con altre parole più intuitive.

Otteniamo lo stesso risultato seguendo le due procedure seguenti.

1) Prima procedura:

- consideriamo il tensore d'inerzia $\hat{\sigma}'_o$ relativo al sistema di masse trasformato mediante f (come nel Lemma 4.7.5),

- consideriamo un vettore \bar{u} e trasformiamolo mediante f , ottenendo il vettore $\bar{u}' := Df(\bar{u})$,

- applichiamo il tensore d'inerzia $\hat{\sigma}'_o$ al vettore \bar{u}' , ottenendo il vettore $\hat{\sigma}'_o(\bar{u}')$.

2) Seconda procedura:

- consideriamo il tensore d'inerzia $\hat{\sigma}_o$ del sistema di masse originale,

- consideriamo il vettore originale \bar{u} ,

- applichiamo il tensore d'inerzia del sistema originale $\hat{\sigma}_o$ al vettore originale \bar{u} , ottenendo il vettore $\hat{\sigma}_o(\bar{u})$,

- trasformiamo questo vettore mediante f , ottenendo il vettore $DF(\hat{\sigma}_o(\bar{u}))$.

Otteniamo lo stesso risultato seguendo le due procedure seguenti.

1) Prima procedura:

- consideriamo il tensore d'inerzia $\underline{\sigma}'_o$ relativo al sistema di masse trasformato mediante f (come nel Lemma 4.7.5),

- consideriamo due vettori \bar{u} , \bar{v} e trasformiamoli mediante f , ottenendo i vettori $\bar{u}' := Df(\bar{u})$, $\bar{v}' := Df(\bar{v})$,

- applichiamo il tensore d'inerzia trasformato $\underline{\sigma}'_o$ a questi vettori, ottenendo lo scalare $\underline{\sigma}'_o(\bar{u}', \bar{v}')$.

2) Seconda procedura:

- consideriamo il tensore d'inerzia $\underline{\sigma}_o$ del sistema di masse originale,

- consideriamo i vettori originali \bar{u} , \bar{v} ,

- applichiamo il tensore d'inerzia originale $\underline{\sigma}_o$ a questi vettori, ottenendo lo scalare $\underline{\sigma}_o(\bar{u}, \bar{v})$. \square

Dalla Proposizione precedente ricaviamo un criterio utile, in certi casi, per determinare gli assi principali del tensore d'inerzia da semplici considerazioni geometriche.

4.7.10 Corollario. Sia $f : \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P}$ una rotazione di un angolo ϕ non nullo intorno ad una retta r passante per o . Se il sistema di masse è invariante rispetto ad f , allora r è un asse principale del tensore d'inerzia.

DIMOSTRAZIONE. [Facoltativa.]

a) Supponiamo che il sistema sia non degenere.

Sia \bar{u} il versore (definito a meno del segno) che genera r e sia \bar{v} un versore qualunque ortogonale ad \bar{u} . Consideriamo gli angoli non orientati

$$\alpha := \text{ang}(\hat{\sigma}_o(\bar{u}), \bar{v}) \quad \text{e} \quad \beta := \text{ang}(\hat{\sigma}_o(\bar{u}), Df(\bar{v})).$$

Allora, abbiamo

$$\begin{aligned} \|\hat{\sigma}_o(\bar{u})\| \cos \alpha &= \hat{\sigma}_o(\bar{u}) \cdot \bar{v} \\ &= \underline{\sigma}_o(\bar{u}, \bar{v}) \\ &= \hat{\sigma}_o(Df(\bar{u})) \cdot Df(\bar{v}) \\ &= \hat{\sigma}_o(\bar{u}) \cdot Df(\bar{v}) \\ &= \|\hat{\sigma}_o(\bar{u})\| \cos \beta, \end{aligned}$$

da cui segue

$$\alpha = \beta.$$

Dato che la precedente uguaglianza è valida per ogni versore \bar{v} ortogonale ad \bar{u} , semplici considerazioni geometriche mostrano che

$$\alpha = \pi/2.$$

Dunque, il vettore $\hat{\sigma}_o(\bar{u})$ è ortogonale a tutti i versori \bar{v} ortogonali ad \bar{u} ; perciò $\hat{\sigma}_o(\bar{u})$ è parallelo ad \bar{u} . Dunque, r è un asse principale.

b) Supponiamo che il sistema sia degenere e sia s la retta passante per il polo o a cui appartengono tutti i punti del sistema.

Allora, è banalmente vero che il sistema è invariante rispetto ad una qualunque rotazione attorno ad s e che tale retta è un asse principale.

Inoltre, se il sistema è invariante rispetto ad una rotazione non nulla intorno ad un'altra retta r , allora tale retta è ortogonale ad s e l'angolo di rotazione è π . Allora, basterà dimostrare la Proposizione relativamente a tale rotazione, procedendo come in a). QED

I precedenti risultati possono essere estesi anche ad un sistema continuo di masse.

4.8 Tensore d'inerzia di sistemi piani

Studiamo ora il tensore d'inerzia di un sistema di masse piano. Per esso valgono interessanti proprietà.

Consideriamo un sistema discreto di masse.

Supponiamo che il dominio D del sistema di masse ed il polo o appartengano ad un piano π . Indichiamo con \bar{n} il versore normale a tale piano (definito a meno del segno).

4.8.1 Proposizione. La retta (o, \bar{n}) è un asse principale del tensore d'inerzia ed abbiamo

$$\hat{\sigma}_o(\bar{n}) = \lambda \bar{n}, \quad \text{dove} \quad \lambda = \sum_i m_i (p_i - o)^2.$$

DIMOSTRAZIONE. Infatti, abbiamo

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_o(\bar{n}) &= \sum_i m_i ((p_i - o)^2 \bar{n} - (p_i - o) \cdot \bar{n} (p_i - o)) \\ &= \sum_i m_i (p_i - o)^2 \bar{n} \\ &= \left(\sum_i m_i (p_i - o)^2 \right) \bar{n}. \text{ QED} \end{aligned}$$

4.8.2 Proposizione. Per ogni vettore \bar{u} ortogonale ad \bar{n} , abbiamo

$$\hat{\sigma}_o(\bar{u}) \in \pi.$$

DIMOSTRAZIONE. Infatti, abbiamo

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_o(\bar{u}) \cdot \bar{n} &= \sum_i m_i ((p_i - o)^2 \bar{u} \cdot \bar{n} - (p_i - o) \cdot \bar{u} (p_i - o) \cdot \bar{n}) \\ &= \sum_i m_i ((p_i - o)^2 0 - (p_i - o) \cdot \bar{u} 0) \\ &= 0. \text{ QED} \end{aligned}$$

La precedente Proposizione ci permette di restringere il tensore d'inerzia al piano $\bar{\pi} \subset \bar{P}$ dei vettori liberi del piano $\pi \subset P$, ottenendo così il “tensore d'inerzia ristretto”

$$\hat{\sigma}_o^\perp : \bar{\pi} \rightarrow \bar{\pi}.$$

Otteniamo così il seguente importante risultato.

4.8.3 Proposizione. [*Proprietà fondamentale dei sistemi piani.*]

Il momento d'inerzia $I_{(o, \bar{n})}$ di $\hat{\sigma}$ relativo all'asse principale (o, \bar{n}) è la somma dei momenti d'inerzia relativi a due rette (o, \bar{u}_1) e (o, \bar{u}_2) , dove \bar{u}_1 e \bar{u}_2 sono due versori ortogonali tra loro e giacenti sul piano $\bar{\pi}$.

DIMOSTRAZIONE. Infatti, per il teorema di Pitagora, abbiamo

$$\begin{aligned} I_{(o,\bar{n})} &= \sum_i m_i (p_i - o)^2 \\ &= \sum_i m_i ((p_i - o) \cdot \bar{u}_1)^2 + \sum_i m_i ((p_i - o) \cdot \bar{u}_2)^2 \\ &= I_2 + I_1. \text{ QED} \end{aligned}$$

4.8.4 Corollario. L'autovalore $\lambda_{\bar{n}}$ di $\hat{\sigma}_o$ relativo all'asse principale (o, \bar{n}) è la somma dei due autovalori λ_1 e λ_2 di $\hat{\sigma}^\perp$

$$\lambda_{\bar{n}} = \lambda_1 + \lambda_2. \square$$

4.8.5 Lemma. Per un sistema di masse piano, oltre ai tre invarianti t_1, t_2, t_3 del tensore d'inerzia $\hat{\sigma}$, abbiamo anche i due invarianti relativi al tensore d'inerzia ristretto $\hat{\sigma}^\perp$.

Dunque, i seguenti scalari

$$\begin{aligned} t^\perp_1 &:= \text{tr } \hat{\sigma}_o^\perp = I_1 + I_2 \\ t^\perp_2 &:= \det \hat{\sigma}_o^\perp = I_1 I_2 - D_{12}^2 \end{aligned}$$

sono invarianti rispetto ad un qualunque cambiamento di base ortonormale adattato al piano π del sistema di masse.

Inoltre, valgono le seguenti uguaglianze

$$\begin{aligned} t^\perp_1 &:= \text{tr } \hat{\sigma}_o^\perp &&= I_{(o,\bar{n})} \\ t_1 &:= \text{tr } \hat{\sigma}_o &&= t^\perp_1 + I_{(o,\bar{n})} \\ t_2 &:= \det \hat{\sigma}_o^\perp + I_{(o,\bar{n})}^2 &&= t^\perp_2 + I_{(o,\bar{n})}^2 \\ t_3 &:= \det \hat{\sigma}_o &&= t^\perp_2 I_{(o,\bar{n})}. \square \end{aligned}$$

Per calcolare gli elementi della matrice di $\hat{\sigma}_o^\perp$ in una qualunque base ortonormale, possiamo ricorrere alla seguente costruzione grafica, basata sugli invarianti.

4.8.6 Proposizione. [*Circolo di Mohor.*]

Consideriamo una base ortonormale (\bar{e}_1, \bar{e}_2) del piano $\bar{\pi}$ e la relativa matrice quadrata (σ_{ij}) del tensore d'inerzia ristretto $\hat{\sigma}_o^\perp$.

Consideriamo, inoltre, i seguenti scalari

$$\begin{aligned} X &= \sigma_{11} \\ Y &= \sigma_{12} \end{aligned}$$

ed i seguenti scalari invarianti

$$\begin{aligned} X_0 &:= \operatorname{tr} \hat{\sigma}_o^\perp &&= \frac{1}{2} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) \\ R^2 &:= \frac{1}{4} (\operatorname{tr} \hat{\sigma}_o^\perp)^2 - \det \hat{\sigma}_o^\perp &&= \frac{1}{4} (\sigma_{11} + \sigma_{22})^2 - (\sigma_{11} \sigma_{22} - \sigma_{12} \sigma_{12}). \end{aligned}$$

Lo scalare R^2 è nullo nel caso in cui $\hat{\sigma}_o^\perp = \lambda \widehat{\operatorname{id}}$ ed è non nullo (e quindi positivo) negli altri casi.

Allora, vale l'uguaglianza

$$(4.8.8) \quad (X - X_0)^2 + Y^2 = R^2,$$

che può essere vista come l'equazione di una circonferenza (detta *circolo di Mohor*), i cui punti hanno coordinate (X, Y) , il cui centro ha coordinate $(X_0, 0)$ ed il cui raggio è R .

Tale circonferenza è invariante rispetto al cambiamento di base ortonormale adattata al piano π , perché X_0 ed R sono invarianti.

DIMOSTRAZIONE. Dimostriamo che lo scalare R^2 è nullo nel caso in cui $\hat{\sigma}^\perp = \lambda \operatorname{id}$ ed è non nullo (e quindi positivo) negli altri casi. Infatti, in una base ortonormale di autovettori abbiamo

$$\begin{aligned} R^2 &= \frac{1}{4} (\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + 2 \sigma_{11} \sigma_{22}) - \sigma_{11} \sigma_{22} \\ &= \frac{1}{4} (\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 - 2 \sigma_{11} \sigma_{22}) \\ &= \frac{1}{4} (\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Dimostriamo l'uguaglianza (4.8.8). Infatti, abbiamo

$$\begin{aligned} (X - X_0)^2 + Y^2 &= \sigma_{11}^2 + \frac{1}{4} (\sigma_{11} + \sigma_{22})^2 - \sigma_{11} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) + \sigma_{12}^2 \\ &= R^2. \text{ QED} \end{aligned}$$

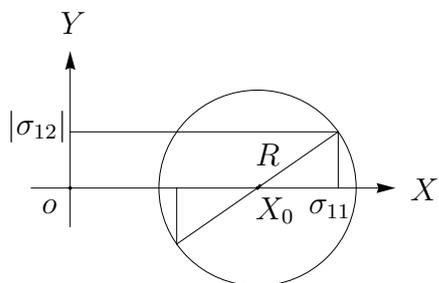
Vedi Figura 4.8.8.

4.8.7 Corollario. Supponiamo che siano noti gli scalari invarianti X_0 ed R definiti nella precedente Proposizione 4.8.6.

Allora, possiamo disegnare la circonferenza di centro $(X_0, 0)$ e raggio R . Inoltre, dato uno dei tre scalari σ_{11} , σ_{22} , $|\sigma_{12}|$, possiamo ricavare graficamente gli altri due come indicato in figura.

DIMOSTRAZIONE. La costruzione grafica segue immediatamente dalle definizioni di X , Y , X_0 e dall'equazione (4.8.8). QED

I precedenti risultati possono essere estesi anche ad un sistema continuo di masse.



4.8.8 Figura. Illustrazione del circolo di Mohor.

4.9 Confronto tra i tensori delle tensioni e d'inerzia

I tensori delle tensioni e d'inerzia, pur avendo significati fisici molto diversi, presentano molte importanti analogie formali ed alcune differenze.

Analiziamole schematicamente.

4.9.1 Nota. Consideriamo:

- il tensore delle tensioni $\hat{\sigma}$ di un *sistema continuo*, valutato in un punto $p \in \mathbf{P}$ del sistema continuo,

- il tensore d'inerzia $\hat{\sigma}$ di un *sistema (discreto o continuo) di masse*, riferito ad un polo $o \in \mathbf{P}$.

1) *Significato fisico.*

a) Il tensore delle tensioni

$$\hat{\sigma}_p : \bar{\mathbf{P}} \rightarrow \bar{\mathbf{P}} : \bar{v} = A \bar{n} \mapsto \bar{F} = \hat{\sigma}_p(A \bar{n}) = A \hat{\sigma}_p(\bar{n})$$

associa ad ogni faccia del continuo in p , la cui area è A ed il cui versore normale uscente è \bar{n} , la forza superficiale esercitata su tale faccia del continuo.

Quindi, $\hat{\sigma}_p(\bar{n})$ è la forza superficiale per unità di superficie esercitata sulla faccia ortogonale ad \bar{n} .

b) Il tensore d'inerzia

$$\hat{\sigma}_o : \bar{\mathbf{P}} \rightarrow \bar{\mathbf{P}} : \bar{\Omega} = \Omega \bar{u} \mapsto \bar{K} = \hat{\sigma}_o(\Omega \bar{u}) = \Omega \hat{\sigma}_o(\bar{u})$$

associa ad ogni velocità angolare $\bar{\Omega}$, il cui modulo è Ω ed il cui versore è \bar{u} , il momento della quantità di moto del sistema di masse.

Quindi $\hat{\sigma}_o(\bar{u})$ è il momento della quantità di moto per la velocità angolare di norma unitaria nella direzione di \bar{u} .

2) *Componenti parallele.*

Sia $\bar{u} \in \bar{\mathbf{P}}$ un versore.

a) Per il tensore delle tensioni,

$$F^\perp := \hat{\sigma}_p(\bar{u}) \cdot \bar{u} = \sigma_p(\bar{u}, \bar{u}) \in \mathbb{R}$$

è la componente scalare normale dello sforzo relativo alla faccia ortogonale ad \bar{u} .

b) Per il tensore d'inerzia,

$$I_{(o, \bar{u})} := \hat{\sigma}_o(\bar{u}) \cdot \bar{u} = \sigma_o(\bar{u}, \bar{u}) \in \mathbb{R}^+$$

è il momento d'inerzia relativo alla retta generata dal polo o e da \bar{u} .

3) *Componenti ortogonali.*

Sia $\bar{u} \in \bar{\mathbf{P}}$ un versore.

a) Per il tensore delle tensioni,

$$F_p^{\parallel} := \hat{\sigma}_p(\bar{u}) - \bar{F}_p^{\perp} = \hat{\sigma}_p(\bar{u}) - F_p^{\perp} \bar{u} \in \bar{\mathbf{P}}_p$$

è la componente di taglio dello sforzo relativo alla faccia ortogonale ad \bar{u} .

b) Per il tensore d'inerzia,

$$\bar{D}_{(o,\bar{u})} := \hat{\sigma}_o(\bar{u})^{\perp} = \hat{\sigma}_o(\bar{u}) - I_{(o,u)} \bar{u} \in \bar{\mathbf{P}}$$

è il momento deviatorio relativo alla retta generata dal polo o e da \bar{u} .

4) *Polarizzazione.*

a) Per il tensore delle tensioni, possiamo dedurre tutte le componenti degli sforzi dalla conoscenza delle componenti degli sforzi normali. Infatti, per ogni coppia di vettori $\bar{u}, \bar{v} \in \bar{\mathbf{P}}$, abbiamo

$$\sigma_p(\bar{u}, \bar{v}) = \frac{1}{2} \left((\bar{u} + \bar{v})^2 N_{\text{vers}(\bar{u}+\bar{v})} - u^2 N_{\text{vers} \bar{u}} - v^2 N_{\text{vers} \bar{v}} \right),$$

dove, per ogni versore \bar{e} , lo scalare $N_{\bar{e}}$ indica la componente dello sforzo normale relativo alla faccia ortogonale ad \bar{e} .

b) Per il tensore d'inerzia, possiamo dedurre tutte le componenti di $\hat{\sigma}$ dalla conoscenza dei momenti d'inerzia. Infatti, per ogni coppia di vettori $\bar{u}, \bar{v} \in \bar{\mathbf{P}}$, abbiamo

$$\sigma_o(\bar{u}, \bar{v}) = \frac{1}{2} \left((\bar{u} + \bar{v})^2 I_{(o,\text{vers}(\bar{u}+\bar{v}))} - u^2 I_{(o,\text{vers} \bar{u})} - v^2 I_{(o,\text{vers} \bar{v})} \right).$$

5) *Assi principali.*

a) Per il tensore delle tensioni, gli assi principali sono le rette ortogonali alle facce principali, ossia alle facce il cui sforzo di taglio è nullo.

b) Per il tensore d'inerzia, gli assi principali sono le rette relativamente alle quali i momenti deviatori sono nulli.

6) *Autovalori.*

a) Per il tensore delle tensioni, l'autovalore relativo ad un asse principale è la componente scalare normale dello sforzo relativo alla faccia principale ortogonale a tale asse principale.

b) Per il tensore d'inerzia, l'autovalore relativo ad un asse principale è il momento d'inerzia relativo a tale asse principale.

7) *Teorema spettrale.*

Il teorema spettrale, relativo all'esistenza di tre autovalori reali e dei tre assi principali tra loro ortogonali (distinguendo i tre casi in cui i tre autovalori sono distinti, due autovalori sono uguali, i tre autovalori sono uguali) si applicano in modo del tutto analogo per il tensore delle tensioni ed il tensore d'inerzia.

8) *Invarianti.*

Il teorema sui tre invarianti è del tutto analogo per il tensore delle tensioni ed il tensore d'inerzia. In particolare, abbiamo i seguenti significati fisici.

a) Per il tensore delle tensioni, la somma delle componenti normali degli sforzi ed il prodotto delle componenti normali degli sforzi sono invarianti rispetto al cambiamento di base.

a) Per il tensore d'inerzia, la somma dei momenti d'inerzia ed il prodotto dei momenti d'inerzia sono invarianti rispetto al cambiamento di base.

9) *Positività.*

a) In generale, il tensore delle tensioni non è definito positivo. Infatti, in generale, i suoi autovalori possono essere a priori positivi, negativi, o nulli.

a) Nel caso non degenere, il tensore d'inerzia è definito positivo. Infatti, in tal caso, i suoi autovalori sono positivi. \square

4.10 Esempi di tensori d'inerzia

Studiamo, infine, i tensori d'inerzia di alcuni esempi notevoli di sistemi continui di masse.

4.10.1 Esempio. [*Segmento omogeneo.*]

Consideriamo un sistema continuo di masse costituito da un segmento omogeneo. Indichiamo la lunghezza del segmento con L_1 , la densità (lineare) di massa con μ e la massa con m .

Ovviamente, abbiamo

$$m = \mu L_1.$$

Riferiamoci al polo o coincidente con il centro di massa del sistema e ad una base ortonormale $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$, in cui \bar{e}_1 sia parallelo al segmento (questo vettore è determinato a meno del verso).

Consideriamo le tre rette (o, \bar{e}_1) , (o, \bar{e}_2) , (o, \bar{e}_3) .

Ciascuna di esse è un asse di simmetria del sistema di masse. Inoltre, il sistema di masse è invariante rispetto ad una rotazione di un angolo π attorno a ciascuna di esse.

Perciò ciascuna di queste tre rette è un asse principale.

Allora, la matrice del tensore d'inerzia è la matrice diagonale

$$(\sigma_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} m L_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12} m L_1^2 \end{pmatrix}. \square$$

4.10.2 Esempio. [*Rettangolo omogeneo.*]

Consideriamo un sistema continuo di masse costituito da un rettangolo omogeneo. Indichiamo la lunghezza dei lati con L_1 , L_2 , la densità (superficiale) di massa con μ e la massa con m .

Ovviamente, abbiamo

$$m = \mu L_1 L_2.$$

Riferiamoci al polo o coincidente con il centro di massa del sistema e ad una base ortonormale $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$, in cui \bar{e}_1 ed \bar{e}_2 siano paralleli ai lati (questi vettori sono determinati a meno del verso).

Consideriamo le tre rette (o, \bar{e}_1) , (o, \bar{e}_2) , (o, \bar{e}_3) .

Ciascuna di esse è un asse di simmetria del sistema di masse. Inoltre, il sistema di masse è invariante rispetto ad una rotazione di un angolo π attorno a ciascuna di esse.

Perciò ciascuna di queste tre rette è un asse principale.

Conviene calcolare direttamente i due momenti d'inerzia I_1 e I_2 e ricavare il momento d'inerzia I_3 dai primi due, applicando la proprietà fondamentale dei sistemi piani.

Allora, la matrice del tensore d'inerzia è la matrice diagonale

$$(\sigma_{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{12} m L_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} m L_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12} m (L_1^2 + L_2^2) \end{pmatrix}.$$

Vedi Figura 4.10.8. \square

4.10.3 Esempio. [*Parallelepipedo omogeneo.*]

Consideriamo un sistema continuo di masse costituito da un parallelepipedo omogeneo. Indichiamo la lunghezza dei lati con L_1, L_2, L_3 , la densità di massa con μ e la massa con m .

Ovviamente, abbiamo

$$m = \mu L_1 L_2 L_3.$$

Riferiamoci al polo o coincidente con il centro di massa del sistema ed alla base ortonormale $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$, i cui vettori sono paralleli ai lati del parallelepipedo (questi vettori sono determinati a meno del verso).

Consideriamo le tre rette $(o, \bar{e}_1), (o, \bar{e}_2), (o, \bar{e}_3)$.

Ciascuna di esse è un asse di simmetria del sistema di masse. Inoltre, il sistema di masse è invariante rispetto ad una rotazione di un angolo π attorno a ciascuna di esse.

Perciò ciascuna di queste tre rette è un asse principale.

Convien calcolare il momento d'inerzia I_1 come segue:

- considerare un rettangolo di lati L_1 ed L_3 e di spessore infinitesimo dx^2 i cui punti hanno coordinata $-L_2/2 \leq x^2 \leq L_2/2$;

- calcolare il momento d'inerzia di tale rettangolo rispetto alla retta (o', \bar{e}_1) , dove o' è il centro di massa del rettangolo;

- calcolare il momento d'inerzia di tale rettangolo rispetto alla retta (o, \bar{e}_1) , mediante il teorema di Huygens;

- calcolare il momento d'inerzia I_1 di tutto il parallelepipedo, integrando i contributi di questi rettangoli, per $-L_2/2 \leq x^2 \leq L_2/2$.

Si può procedere in modo analogo per gli altri due momenti d'inerzia.

Allora, la matrice del tensore d'inerzia è la matrice diagonale

$$(\sigma_{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{12} m (L_2^2 + L_3^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} m (L_1^2 + L_3^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12} m (L_1^2 + L_2^2) \end{pmatrix}.$$

Nel caso particolare in cui $L_2 = L_3 = 0$ il sistema si riduce ad un segmento e nel caso particolare in cui $L_3 = 0$ il sistema si riduce ad un rettangolo; in tali casi ritroviamo due esempi discussi precedentemente.

Vedi Figura 4.10.9. \square

4.10.4 Esempio. [*Triangolo rettangolo omogeneo.*]

Consideriamo un sistema continuo di masse costituito da un triangolo rettangolo omogeneo. Indichiamo la lunghezza dei cateti con L_1, L_2 , la densità (superficiale) di massa con μ e la massa con m .

Ovviamente, abbiamo

$$m = \frac{1}{2} \mu L_1 L_2.$$

Riferiamoci al polo o coincidente con il vertice dell'angolo retto del triangolo e ad una base ortonormale $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$, in cui \bar{e}_1 ed \bar{e}_2 siano paralleli ai cateti ed uscenti da o .

Consideriamo le tre rette (o, \bar{e}_1) , (o, \bar{e}_2) , (o, \bar{e}_3) .

Convienne calcolare direttamente i due momenti d'inerzia I_1 e I_2 e ricavare il momento d'inerzia I_3 dai primi due, applicando la proprietà fondamentale dei sistemi piani.

Allora, la matrice del tensore d'inerzia è la matrice non diagonale

$$(\sigma_{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} m L_2^2 & -\frac{1}{12} m L_1 L_2 & 0 \\ -\frac{1}{12} m L_1 L_2 & \frac{1}{6} m L_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} m (L_1^2 + L_2^2) \end{pmatrix}.$$

Vedi Figura 4.10.10. \square

4.10.5 Esempio. [*Disco omogeneo.*]

Consideriamo un sistema continuo di masse costituito da un disco omogeneo. Indichiamo il raggio con R , la densità (superficiale) di massa con μ e la massa con m .

Ovviamente, abbiamo

$$m = \mu \pi R^2.$$

Riferiamoci al polo o coincidente con il centro di massa del sistema e ad una base ortonormale $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$, in cui \bar{e}_1 ed \bar{e}_2 appartengano al piano del sistema (questi vettori sono determinati a meno del verso).

Consideriamo le tre rette (o, \bar{e}_1) , (o, \bar{e}_2) , (o, \bar{e}_3) .

Ciascuna di esse è un asse di simmetria del sistema di masse. Inoltre, il sistema di masse è invariante rispetto ad una qualunque rotazione attorno alla retta (o, \bar{e}_3) e ad una rotazione di un angolo π attorno alle due rette (o, \bar{e}_2) , (o, \bar{e}_1) .

Perciò ciascuna di queste tre rette è un asse principale.

Convienne calcolare direttamente il momento d'inerzia I_3 e ricavare i momenti d'inerzia I_1 ed I_2 da I_3 , tenendo conto che $I_1 = I_2$ ed applicando la proprietà fondamentale dei sistemi piani.

Allora, la matrice del tensore d'inerzia è la matrice diagonale

$$(\sigma_{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} m R^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} m R^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} m R^2 \end{pmatrix}.$$

Vedi Figura 4.10.11. \square

4.10.6 Esempio. [*Cilindro circolare retto omogeneo.*]

Consideriamo un sistema continuo di masse costituito da un cilindro circolare retto omogeneo. Indichiamo il raggio con R , l'altezza con H , la densità di massa con μ e la massa con m .

Ovviamente, abbiamo

$$m = \mu \pi R^2 H.$$

Riferiamoci al polo o coincidente con il centro di massa del sistema e ad una base ortonormale $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$, in cui \bar{e}_3 è l'asse del cilindro (questi vettori sono determinati a meno del verso).

Consideriamo le tre rette (o, \bar{e}_1) , (o, \bar{e}_2) , (o, \bar{e}_3) .

Ciascuna di esse è un asse di simmetria del sistema di masse. Inoltre, il sistema di masse è invariante rispetto ad una qualunque rotazione attorno alla retta (o, \bar{e}_3) e ad una rotazione di un angolo π attorno alle due rette (o, \bar{e}_2) , (o, \bar{e}_1) .

Perciò ciascuna di queste tre rette è un asse principale.

E' facile calcolare direttamente il momento d'inerzia I_3 .

Convien calcolare il momento d'inerzia I_1 come segue:

- considerare un disco di raggio R e di spessore infinitesimo dx^3 i cui punti hanno coordinata $-H/2 \leq x^3 \leq H/2$;

- calcolare il momento d'inerzia di tale disco rispetto alla retta (o', \bar{e}_1) , dove o' è il centro di massa del disco;

- calcolare il momento d'inerzia di tale disco rispetto alla retta (o, \bar{e}_1) , mediante il teorema di Huygens;

- calcolare il momento d'inerzia I_1 di tutto il cilindro, integrando i contributi di questi dischi, per $-H/2 \leq x^3 \leq H/2$.

Si può procedere in modo analogo per il momento d'inerzia I_2 . Ovviamente, abbiamo $I_1 = I_2$.

Allora, la matrice del tensore d'inerzia è la matrice diagonale

$$(\sigma_{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{12} m (3R^2 + H^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} m (3R^2 + H^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} m R^2 \end{pmatrix}.$$

Nel caso particolare in cui $H = 0$ il sistema si riduce ad un disco e nel caso particolare in cui $R = 0$ il sistema si riduce ad un segmento; in tali casi ritroviamo due esempi discussi precedentemente.

Vedi Figura 4.10.12. \square

4.10.7 Esempio. [Sfera omogenea.]

Consideriamo un sistema continuo di masse costituito da una sfera omogenea. Indichiamo il raggio con R , la densità di massa con μ e la massa con m .

Ovviamente, abbiamo

$$m = \mu \frac{4}{3} \pi R^3.$$

Riferiamoci al polo o coincidente con il centro di massa del sistema e ad una base ortonormale $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$.

Consideriamo le tre rette (o, \bar{e}_1) , (o, \bar{e}_2) , (o, \bar{e}_3) .

Ciascuna di esse è un asse di simmetria del sistema di masse. Inoltre, il sistema di masse è invariante rispetto ad una qualunque rotazione attorno a ciascuna di queste tre rette.

Perciò ciascuna di queste tre rette è un asse principale.

Conviene calcolare il momento d'inerzia I_1 come segue:

- considerare un disco di raggio $r = \sqrt{R^2 - (x^3)^2}$ e di spessore infinitesimo dx^3 i cui punti hanno coordinata $-R \leq x^3 \leq R$;

- calcolare il momento d'inerzia di tale disco rispetto alla retta (o', \bar{e}_1) , dove o' è il centro di massa del disco;

- calcolare il momento d'inerzia di tale disco rispetto alla retta (o, \bar{e}_1) , mediante il teorema di Huygens;

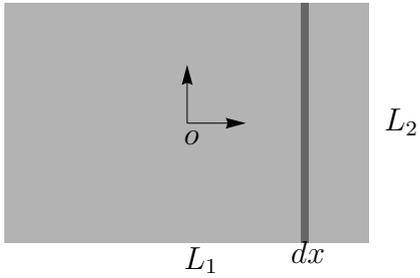
- calcolare il momento d'inerzia I_1 di tutta la sfera, integrando i contributi di questi dischi, per $-R \leq x^3 \leq R$.

Si può procedere in modo analogo per gli altri due momenti d'inerzia I_2 ed I_3 . Ovviamente, abbiamo $I_1 = I_2 = I_3$.

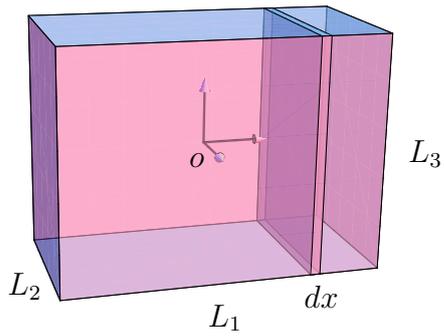
Allora, la matrice del tensore d'inerzia è la matrice diagonale

$$(\sigma_{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} m R^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} m R^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5} m R^2 \end{pmatrix}.$$

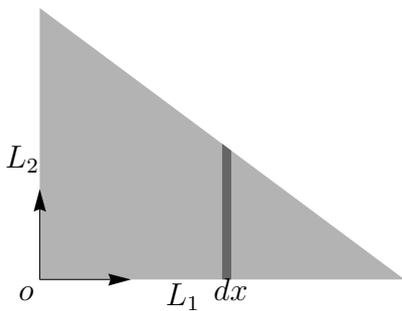
Vedi Figura 4.10.13. \square



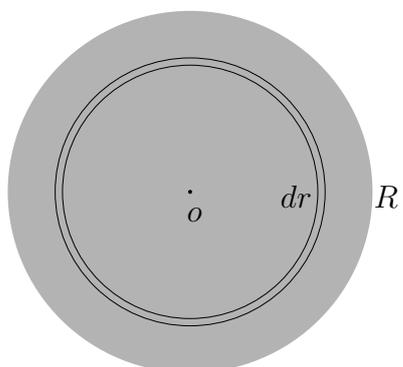
4.10.8 **Figura.** Illustrazione del momento d'inerzia di un rettangolo omogeneo.



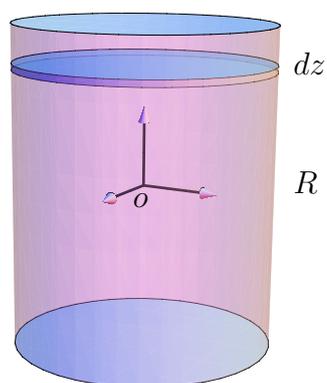
4.10.9 **Figura.** Illustrazione del momento d'inerzia di un parallelepipedo omogeneo.



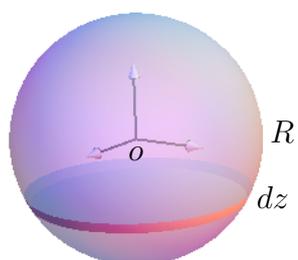
4.10.10 **Figura.** Illustrazione del momento d'inerzia di un triangolo rettangolo omogeneo.



4.10.11 Figura. Illustrazione del momento d'inerzia di un disco omogeneo.



4.10.12 Figura. Illustrazione del momento d'inerzia di un cilindro circolare retto omogeneo.



4.10.13 Figura. Illustrazione del momento d'inerzia di una sfera omogenea.