

Marco Modugno

Introduzione alla Meccanica dei SISTEMI CONTINUI

Appunti per gli studenti dei Corsi di Laurea in
“Ingegneria per l’Ambiente, le Risorse ed il Territorio”
“Ingegneria Edile”

Versione del 2016-12-20 - 16:02

Marco Modugno
Dipartimento di Matematica ed Informatica "U.Dini"
Università di Firenze
Via S. Marta 3, 50139 Firenze
email: `marco.modugno@unifi.it`

La filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi agli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non si impara a intender la lingua, e conoscer i caratteri, ne quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro labirinto.

G. Galilei, VI, 232, Il Saggiatore, 1623.

INDICE

Introduzione	9
1 Premesse matematiche	11
1.1 Spazi vettoriali ed applicazioni lineari	11
1.1.1 Spazi vettoriali	11
1.1.2 Spazi affini	13
1.1.3 Applicazioni lineari	14
1.1.4 Applicazioni affini	16
1.1.5 Forme lineari e spazio duale	16
1.1.6 Endomorfismi	18
1.1.7 Forme bilineari	19
1.1.7.1 Forme bilineari simmetriche ed antisimmetriche	21
1.1.7.2 Forme quadratiche	22
1.1.8 Cambiamenti di base	22
1.1.9 Invarianti di un endomorfismo	24
1.1.10 Invariante di una forma bilineare	25
1.1.11 Orientazione	26
1.1.12 Volumi	26
1.1.13 Significato del determinante di un endomorfismo	27
1.2 Spazi vettoriali euclidei	28
1.2.1 Metrica euclidea	28
1.2.2 Isomorfismo musicale	31
1.2.3 Ulteriore isomorfismo musicale	33
1.2.4 Trasposizione metrica di endomorfismi	34
1.2.5 Autovalori ed autovettori	35
1.3 Trasformazioni ortogonali e rigide	38
1.3.1 Trasformazioni ortogonali	38
1.3.2 Classificazione delle trasformazioni ortogonali	41
1.3.3 Trasformazioni rigide	45
1.4 Tensori	49
1.4.1 Prodotto tensoriale	49
1.4.2 Tensori simmetrici ed antisimmetrici	51
1.4.3 Contrazione di tensori	54
1.4.4 Prodotto interno	56

1.4.5	Tensori ed applicazioni lineari	58
1.4.6	Tensori e metrica euclidea	60
1.4.6.1	Tensori ed isomorfismi musicali	61
1.4.6.2	Tensori e prodotto scalare	65
1.4.6.3	Tensori antisimmetrici e forme volume	66
1.5	Applicazioni differenziabili	68
1.5.1	Applicazioni differenziabili e derivate	68
1.5.2	Derivate parziali	73
1.5.3	Regole di derivazione	75
1.5.4	Derivate seconde	78
1.6	Sistemi di coordinate	81
1.6.1	Funzioni e curve coordinate	81
1.6.2	Espressione in coordinate di derivate	84
1.6.3	Espressione in coordinate delle derivate seconde	89
1.6.4	Sistemi di coordinate notevoli	92
1.6.4.1	Sistema di coordinate cartesiano	92
1.6.4.2	Sistema di coordinate cilindrico	93
1.6.4.3	Sistema di coordinate sferico	96
1.7	Operatori differenziali	100
1.7.1	Gradiente	100
1.7.2	Commutatore	102
1.7.3	Rotore	103
1.7.4	Divergenza	107
1.7.5	Laplaciano	108
1.7.6	Proprietà degli operatori differenziali	110
2	Cinematica	113
2.1	Gli spazi di base	113
2.2	Moto	114
2.2.1	Moto come trasformazione	114
2.2.2	Moto come spostamento	115
2.3	Grandezze del continuo	118
2.3.1	Grandezze in forma lagrangiana ed euleriana	118
2.3.2	Derivate di una grandezza	118
2.4	Grandezze cinematiche	121
2.4.1	Velocità ed accelerazione	121
2.4.2	Jacobiano	122
2.4.3	tensore delle deformazioni	125
2.4.4	Isomorfismo di deformazione	128
2.4.5	Decomposizione dello jacobiano	129
2.4.6	Dilatazione di volume	132
2.4.7	Tensori delle deformazioni e delle rotazioni infinitesime	134

2.4.8	Dilatazione infinitesima di volume	138
2.4.9	Spostamento infinitesimo	139
2.5	Tipi notevoli di moti continui	142
2.5.1	Moti stazionari	142
2.5.2	Moti traslatori	142
2.5.3	Moti rigidi	144
2.6	Esempi notevoli di moti continui	149
2.6.1	Moti traslatori uniformi	149
2.6.2	Moti rotatori uniformi	150
2.6.3	Moti di espansione esponenziale sferica	152
2.7	Grandezze globali del continuo	155
2.7.1	Grandezze globali	155
2.7.2	Derivata del valore globale	156
2.7.3	Equazione di continuità	157
2.7.4	Teorema del trasporto	159
3	Dinamica	161
3.1	Il modello generale della dinamica	161
3.1.1	Sottodomini interni ed esterni	161
3.1.2	Densità di forza di volume	161
3.1.3	Densità di forza di superficie	162
3.1.4	Densità di carico	166
3.1.5	Le equazioni di moto in forma integrale	166
3.1.6	Linearità delle tensioni	168
3.1.6.1	Il teorema di Cauchy	168
3.1.6.2	Relazione tra carico e tensione sul bordo esterno	172
3.1.6.3	Linearità delle tensioni	172
3.1.6.4	Faccie principali ed autovalori	174
3.1.6.5	Sforzi di taglio	176
3.1.6.6	Rappresentazione matriciale del tensore delle tensioni	177
3.1.7	Equazioni di moto in forma differenziale	179
3.1.8	Statica	181
3.1.9	Il teorema dell'energia cinetica	182
3.2	Sistemi continui notevoli	189
3.2.1	Fluidi	189
3.2.1.1	Fluidi perfetti	189
3.2.1.2	Fluidi perfetti barotropici	193
3.2.1.3	Equazione di moto	195
3.2.2	Elastici	199
3.2.2.1	Elasticità finita	199
3.2.2.2	Elasticità lineare	201
3.2.2.3	Elasticità lineare isotropa	203

3.2.2.4 Elasticità lineare isotropa: inversione della legge costitutiva 210

Indice analitico **214**

INTRODUZIONE

Questo testo va inteso come complemento alle lezioni del corso di Meccanica Razionale.

Le lezioni orali costituiscono un'introduzione ed una guida informale ai concetti ed ai risultati basilari del corso, privilegiando gli aspetti pedagogici, intuitivi e pratici.

D'altra parte, il testo scritto è concepito come supporto e riferimento sufficientemente preciso per definizioni e teoremi. La natura spesso formale, astratta e stringata del testo scritto può renderne talvolta difficile la lettura, senza l'aiuto delle lezioni.

Vari argomenti ed alcune dimostrazioni sono state inserite per chiarezza e completezza di esposizione, anche se non fanno necessariamente parte del Programma del Corso. Questi argomenti vanno intesi come un possibile materiale per la consultazione da parte di chi vuole comprendere meglio. Dati i complessi intrecci delle varie nozioni, non è facile fare una lista dettagliata e ragionata degli argomenti fondamentali che fanno esplicitamente parte del Programma del Corso, di quelli che sono utili alla comprensione senza fare parte essenziale di tale Programma e di quelli che servono per maggiore chiarezza ed ulteriori approfondimenti. Le lezioni del Corso sono una guida valida e sufficiente per orientarsi in questa lettura consapevole e ragionata.

Per l'urgenza di fornire agli studenti un ausilio per la preparazione dell'esame, questi appunti non sono stati ancora sufficientemente riveduti e corretti e, pertanto, possono contenere delle sviste.

Ringrazio gli studenti Enzo Marino ed Enzo Saponara di Ingegneria Civile, per la realizzazione delle illustrazioni mediante CAD.

CAPITOLO 1

PREMESSE MATEMATICHE

Dedichiamo questo capitolo introduttivo ad alcuni richiami o complementi di algebra e geometria che saranno usati nel seguito.

1.1 Spazi vettoriali ed applicazioni lineari

Dedichiamo questa sezione introduttiva ad alcuni richiami di nozioni essenziali di algebra lineare. Con l'occasione, precisiamo anche alcune nostre convenzioni e notazioni.

1.1.1 Spazi vettoriali

Incominciamo con un breve richiamo della nozione di spazio vettoriale, di base e di dimensione.

Definiamo *spazio vettoriale* un insieme \bar{V} con un elemento privilegiato $\bar{0} \in \bar{V}$ ed un'operazione di addizione ed un'operazione di moltiplicazione per gli scalari

$$+ : \bar{V} \times \bar{V} : (\bar{u}, \bar{v}) \mapsto \bar{u} + \bar{v} \quad \text{e} \quad \cdot : \mathbb{R} \times \bar{V} : (\lambda, \bar{v}) \mapsto \lambda \bar{v},$$

che godono delle seguenti proprietà:

- 1) $\bar{u} + (\bar{v} + \bar{w}) = (\bar{u} + \bar{v}) + \bar{w}, \quad \forall \bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in \bar{V},$
- 2) $\bar{v} + \bar{0} = \bar{v}, \quad \forall \bar{v} \in \bar{V},$
- 3) $\forall \bar{v} \in \bar{V}, \exists (-\bar{v}) \in \bar{V}, \quad \text{tale che} \quad \bar{v} + (-\bar{v}) = \bar{0},$
- 4) $\bar{u} + \bar{v} = \bar{v} + \bar{u}, \quad \forall \bar{u}, \bar{v} \in \bar{V}.$

Gli elementi di uno spazio vettoriale sono detti *vettori*.

Definiamo *base* di uno spazio vettoriale \bar{V} un sottinsieme

$$\mathcal{B} := \{\bar{b}_i\}_{i \in \mathcal{I}} \subset \bar{V},$$

tale che ogni vettore $\bar{v} \in \bar{V}$ può essere scritto in uno ed in un solo modo come combinazione lineare (finita)

$$\bar{v} = \sum_{i \in \mathcal{I}} v^i \bar{b}_i, \quad \text{con } v^i \in \mathbb{R}.$$

Gli scalari v^i sono detti *le componenti* di \bar{v} relativamente alla base \mathcal{B} .

Si dimostra che ogni spazio vettoriale (non nullo) ammette una base (anzi, ne ammette infinite).

Si dimostra anche che tutte le basi di uno spazio vettoriale hanno la stessa cardinalità, ossia lo stesso numero di elementi. Tale numero cardinale è detto la *dimensione* dello spazio vettoriale. In fisica, la dimensione è detta anche *numero di gradi di libertà*.

Consideriamo ora uno spazio vettoriale \bar{V} di dimensione n ed una base

$$\mathcal{B} := (\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n).$$

Dunque, ogni vettore $\bar{v} \in \bar{V}$ può essere espresso in uno ed in un solo modo come combinazione lineare della base

$$\bar{v} = v^i \bar{b}_i := \sum_{1 \leq i \leq n} v^i \bar{b}_i, \quad \text{con } v^i \in \mathbb{R}.$$

Conveniamo, dunque, di denotare gli *indici degli elementi della base in basso* e gli *indici delle componenti dei vettori in alto*. Tale convenzione non è necessaria e molti autori usano una posizione fissa di tutti gli indici. Però, tale convenzione è utile sotto vari aspetti e perciò sarà adottata sistematicamente da noi.

Per abbreviare la scrittura di certe formule, conveniamo anche che, quando in una formula compare un indice ripetuto in alto ed in basso, si sottintenda una sommatoria rispetto a tale indice.

Possiamo anche rappresentare l'insieme delle componenti di un vettore in modo matriciale mediante una colonna, scrivendo

$$\bar{v} \simeq (v^i) = \begin{pmatrix} v^1 \\ \dots \\ v^n \end{pmatrix}.$$

La rappresentazione matriciale delle componenti dei vettori tramite una colonna corrisponde a considerare gli indici in alto come indici di righe.

Notiamo che abbiamo scritto l'uguaglianza $\bar{v} = v^i \bar{b}_i$, ma che $\bar{v} \simeq (v^i)$ non è propriamente un'uguaglianza, perché \bar{v} è rappresentato dalla matrice (v^i) solo quando sia stata scelta la base \mathcal{B} , che non compare esplicitamente nella seconda formula.

Chiaramente, per ogni $\bar{u}, \bar{v} \in \mathbb{R}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, abbiamo

$$(\lambda \bar{v})^i = \lambda v^i, \quad (\bar{u} + \bar{v})^i = u^i + v^i.$$

1.1.2 Spazi affini

Introduciamo la nozione di spazio affine associato ad uno spazio vettoriale.

Consideriamo uno spazio vettoriale $\bar{\mathbf{V}}$ di dimensione n .

Definiamo uno *spazio affine* associato a $\bar{\mathbf{V}}$ un insieme \mathbf{A} , i cui elementi sono detti *punti*, con un'applicazione, detta *traslazione*,

$$+ : \mathbf{A} \times \bar{\mathbf{V}} \rightarrow \mathbf{A} : (p, \bar{v}) \mapsto p + \bar{v},$$

la quale gode delle seguenti proprietà

- 1) $p + (\bar{u} + \bar{v}) = (p + \bar{u}) + \bar{v}, \quad \forall p \in \mathbf{A}, \forall \bar{u}, \bar{v} \in \bar{\mathbf{V}},$
- 2) $p + \bar{0} = p, \quad \forall p \in \mathbf{A},$
- 3) $p \in \mathbf{A}, \bar{v} \in \bar{\mathbf{V}}, \quad p + \bar{v} = p \quad \Rightarrow \quad \bar{v} = \bar{0},$
- 4) $p, q \in \mathbf{A}, \quad \Rightarrow \quad \exists \bar{v} \in \bar{\mathbf{V}}, \quad q = p + \bar{v}.$

I vettori $\bar{v} \in \bar{\mathbf{V}}$ sono detti i *vettori liberi* dello spazio affine. Le coppie $(p, \bar{v}) \in \mathbf{A} \times \bar{\mathbf{V}}$ sono detti i *vettori applicati* dello spazio affine.

La proprietà 1) è una proprietà di tipo associativo che permette di usare lo stesso simbolo $+$ sia per la somma tra vettori che per la somma tra punti e vettori, senza pericolo di confusione.

La proprietà 2) dice che il vettore nullo produce la traslazione nulla dei punti.

La proprietà 3) dice che solo il vettore nullo produce la traslazione nulla dei punti (basta che questo sia vero a partire da un certo punto p , perché risulti vero a partire da qualunque altro punto).

La proprietà 4) dice che a partire da un certo punto si possono raggiungere tutti gli altri punti mediante un'opportuna traslazione (basta che questo sia vero a partire da un certo punto p , perché risulti vero a partire da qualunque altro punto).

Inoltre, è facile dimostrare che il vettore \bar{v} tale che $q = p + \bar{v}$ è unico. Denoteremo allora tale vettore con il simbolo $\bar{v} = q - p$. Perciò, per ogni $p, q \in \mathbf{A}$, abbiamo

$$p + (q - p) = q, \quad p - p = \bar{0}, \quad p - q = -(q - p).$$

Notiamo, che, in generale, in uno spazio affine non ha senso la somma di due punti e non ha senso il prodotto di un punto per un numero, ma ha senso la somma di un punto ed un vettore ed ha senso la differenza di due punti.

Fissato un punto $o \in \mathbf{A}$, detto *origine*, l'applicazione

$$\mathbf{A} \rightarrow \bar{\mathbf{V}} : p \mapsto (p - o)$$

è biettiva e la sua inversa è l'applicazione

$$\bar{\mathbf{V}} \rightarrow \mathbf{A} : \bar{v} \mapsto o + \bar{v}.$$

Notiamo che, in generale, uno spazio affine non ha nessun punto privilegiato (e quindi non ha un'origine privilegiata).

L'insieme $\mathbf{A} \equiv \bar{\mathbf{V}}$ stesso risulta essere uno spazio affine, assumendo come traslazione la somma tra vettori. Ovviamente, in questo spazio affine particolare lo zero è un'origine privilegiata.

1.1.3 Applicazioni lineari

Studiamo poi le applicazioni lineari tra due spazi vettoriali e la loro rappresentazione matriciale.

Consideriamo uno spazio vettoriale $\bar{\mathbf{V}}$ di dimensione n ed uno spazio vettoriale $\bar{\mathbf{V}}'$ di dimensione m . Consideriamo anche una base $\mathcal{B} := (\bar{b}_i) \subset \bar{\mathbf{V}}$ ed una base $\mathcal{B}' := (\bar{b}'_i) \subset \bar{\mathbf{V}}'$.

Definiamo *applicazione lineare* tra $\bar{\mathbf{V}}$ e $\bar{\mathbf{V}}'$ un'applicazione

$$\hat{f} : \bar{\mathbf{V}} \rightarrow \bar{\mathbf{V}}',$$

tale che

- 1) $\hat{f}(\bar{u} + \bar{v}) = \hat{f}(\bar{u}) + \hat{f}(\bar{v}), \quad \forall \bar{u}, \bar{v} \in \bar{\mathbf{V}},$
- 2) $\hat{f}(\lambda \bar{v}) = \lambda \hat{f}(\bar{v}), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \bar{v} \in \bar{\mathbf{V}}.$

L'insieme delle applicazioni lineari tra $\bar{\mathbf{V}}$ e $\bar{\mathbf{V}}'$ costituisce uno spazio vettoriale di dimensione n per m

$$L(\bar{\mathbf{V}}, \bar{\mathbf{V}}') := \{\hat{f} : \bar{\mathbf{V}} \rightarrow \bar{\mathbf{V}}'\},$$

mediante la seguente definizione naturale

- 1) $(\hat{f} + \hat{g})(\bar{v}) := \hat{f}(\bar{v}) + \hat{g}(\bar{v}), \quad \forall \hat{f}, \hat{g} \in L(\bar{\mathbf{V}}, \bar{\mathbf{V}}'), \forall \bar{v} \in \bar{\mathbf{V}},$
- 2) $(\lambda \hat{f})(\bar{v}) := \lambda \hat{f}(\bar{v}), \quad \forall \hat{f} \in L(\bar{\mathbf{V}}, \bar{\mathbf{V}}'), \forall \bar{v} \in \bar{\mathbf{V}},$
- 3) $\hat{0}(\bar{v}) = \bar{0}, \quad \forall \bar{v} \in \bar{\mathbf{V}},$
- 2) $(-\hat{f})(\bar{v}) := -(\hat{f}(\bar{v})), \quad \forall \hat{f} \in L(\bar{\mathbf{V}}, \bar{\mathbf{V}}'), \forall \bar{v} \in \bar{\mathbf{V}}.$

Ad un'applicazioni lineare $\hat{f} \in L(\bar{\mathbf{V}}, \bar{\mathbf{V}}')$ possiamo associare la matrice

$$(f_j^i) := \begin{pmatrix} f_1^1 & \cdots & f_n^1 \\ \cdots & & \cdots \\ f_1^m & \cdots & f_n^m \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} (\hat{f}(\bar{b}_1))^1 & \cdots & (\hat{f}(\bar{b}_n))^1 \\ \cdots & & \cdots \\ (\hat{f}(\bar{b}_1))^m & \cdots & (\hat{f}(\bar{b}_n))^m \end{pmatrix}.$$

Dunque, conveniamo di inserire nella colonna i -ma le m componenti del vettore $\hat{f}(\bar{b}_i)$.

Perciò, la matrice ha un numero di colonne uguale alla dimensione dello spazio $\bar{\mathbf{V}}$ ed un numero di righe uguale alla dimensione dello spazio $\bar{\mathbf{V}}'$.

Per ogni $\bar{v} \in \bar{\mathbf{V}}$, tale matrice permette di calcolare le componenti del vettore immagine $\hat{f}(\bar{v})$, mediante la formula

$$(\hat{f}(\bar{v}))^i = \hat{f}_j^i v^j := \sum_{1 \leq j \leq n} \hat{f}_j^i v^j,$$

ossia mediante il prodotto righe per colonne tra matrici

$$\begin{pmatrix} (\hat{f}(\bar{v}))^1 \\ \cdots \\ (\hat{f}(\bar{v}))^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\hat{f}(\bar{b}_1))^1 & \cdots & (\hat{f}(\bar{b}_n))^1 \\ \cdots & & \cdots \\ (\hat{f}(\bar{b}_1))^m & \cdots & (\hat{f}(\bar{b}_n))^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{v}^1 \\ \cdots \\ \bar{v}^n \end{pmatrix}.$$

La rappresentazione matriciale delle applicazioni lineari gode delle seguenti proprietà:

- 1) $(\hat{f} + \hat{g})_j^i = (\hat{f})_j^i + (\hat{g})_j^i, \quad \forall \hat{f}, \hat{g} \in L(\bar{\mathbf{V}}, \bar{\mathbf{V}}')$,
- 2) $(\lambda \hat{g})_j^i = \lambda (\hat{g})_j^i, \quad \forall \hat{g} \in L(\bar{\mathbf{V}}, \bar{\mathbf{V}}') \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$

Inoltre, la matrice di un'applicazione lineare caratterizza l'applicazione lineare stessa.

Consideriamo un'applicazione lineare $\hat{f} \in L(\bar{\mathbf{V}}, \bar{\mathbf{V}}')$.

Allora, *l'immagine*

$$\text{im } \hat{f} := \hat{f}(\bar{\mathbf{V}}) \subset \bar{\mathbf{V}}'$$

ed *il nucleo*

$$\text{ker } \hat{f} := \hat{f}^{-1}(\bar{\mathbf{0}}) \subset \bar{\mathbf{V}}$$

sono due sottospazi vettoriali.

Inoltre, vale la formula

$$\dim \bar{\mathbf{V}} = \dim(\text{ker } \hat{f}) + \dim(\text{im } \hat{f}).$$

Un'applicazione lineare è *iniettiva* se e solo se $\text{ker } \hat{f} = \{\bar{\mathbf{0}}\}$.

Un'applicazione lineare è *suriettiva* se e solo se $\text{im } \hat{f} = \bar{\mathbf{V}}'$.

Se un'applicazione lineare è invertibile, allora l'inversa è anche lineare. Un'applicazione lineare invertibile è detta un *isomorfismo*. Un'applicazione lineare è un isomorfismo se e solo se è iniettiva e suriettiva.

1.1.4 Applicazioni affini

Possiamo generalizzare il concetto di applicazione lineare tra spazi vettoriali, introducendo la nozione di applicazione affine tra spazi affini.

Consideriamo due spazi affini \mathbf{A} ed \mathbf{A}' , associati rispettivamente agli spazi vettoriali $\bar{\mathbf{V}}$ e $\bar{\mathbf{V}}'$.

Definiamo *applicazione affine* tra \mathbf{A} ed \mathbf{A}' un'applicazione

$$f : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' ,$$

tale che, per ogni $p \in \mathbf{A}$ e $\bar{h} \in \bar{\mathbf{V}}$, esiste un'applicazione lineare

$$Df : \bar{\mathbf{V}} \rightarrow \bar{\mathbf{V}}' ,$$

per cui

$$f(p + \bar{h}) = f(p) + Df(\bar{h}) .$$

Tale formula dice che l'incremento $f(p + \bar{h}) - f(p)$ della funzione f , corrispondente ad un incremento \bar{h} del punto p , dipende linearmente dall'incremento \bar{h} del punto.

Si dimostra facilmente che l'applicazione lineare Df è unica ed non dipende dalla scelta del punto p .

L'applicazione Df è detta la *derivata* dell'applicazione affine.

In particolare, l'applicazione $\text{id}_{\mathbf{A}} : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}$ è affine e la sua derivata è l'applicazione lineare $\text{id}_{\bar{\mathbf{V}}} : \bar{\mathbf{V}} \rightarrow \bar{\mathbf{V}}$.

Inoltre, la composizione di due applicazioni affini è affine e la sua derivata è la composizione delle loro derivate.

Infine, ogni applicazione lineare tra due spazi vettoriali risulta essere anche affine e coincidente con la sua derivata.

1.1.5 Forme lineari e spazio duale

Come caso particolare di applicazioni lineari, consideriamo le forme lineari di uno spazio vettoriale.

Consideriamo uno spazio vettoriale $\bar{\mathbf{V}}$ di dimensione n ed una base $\mathcal{B} = (\bar{b}_i)$.

Definiamo *forma lineare* (o *covettore*) un'applicazione lineare a valori scalari

$$\alpha : \bar{\mathbf{V}} \rightarrow \mathbb{R} .$$

Per esempio, per ogni $1 \leq i \leq n$, l'applicazione

$$\underline{\beta}^i : \bar{\mathbf{V}} \rightarrow \mathbb{R} : \bar{v} \mapsto v^i ,$$

che associa ad ogni vettore $\bar{v} \in \bar{\mathbf{V}}$ la sua componente i -ma rispetto alla base \mathcal{B} , è una forma lineare. In altre parole, la forma $\underline{\beta}^i$ è definita dalla formula

$$\underline{\beta}^i(\bar{b}_j) = \delta_j^i.$$

Dunque, per ogni $\bar{v} \in \bar{\mathbf{V}}$, possiamo scrivere

$$\bar{v} = \underline{\beta}^i(\bar{v}) \bar{b}_i.$$

L'insieme delle forme lineari costituisce lo spazio vettoriale di dimensione n

$$\bar{\mathbf{V}}^* := L(\bar{\mathbf{V}}, \mathbb{R}),$$

che è detto il *duale* di $\bar{\mathbf{V}}$.

Si vede inoltre che l'insieme delle forme lineari

$$\mathcal{B}^* := (\underline{\beta}^1, \dots, \underline{\beta}^n),$$

definite sopra costituisce una base dello spazio duale.

Pertanto, ogni forma lineare $\underline{\alpha} \in \bar{\mathbf{V}}^*$ può essere espressa in uno ed in un solo modo come combinazione della base duale

$$\underline{\alpha} = \alpha_i \underline{\beta}^i := \sum_{1 \leq i \leq n} \alpha_i \underline{\beta}^i.$$

Conveniamo, dunque, di denotare gli *indici degli elementi della base duale in alto* e gli *indici delle componenti dei covettori in basso*. Tale convenzione può essere vista come una conseguenza della convenzione precedente, perché la posizione degli indici della base duale è determinata dalla posizione degli indici delle componenti dei vettori.

Possiamo anche rappresentare l'insieme delle componenti di un covettore in modo matriciale mediante una riga, scrivendo

$$\underline{\alpha} \simeq (\alpha_i) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n).$$

La rappresentazione matriciale delle componenti dei covettori tramite una riga corrisponde a considerare gli indici in basso come indici di colonne.

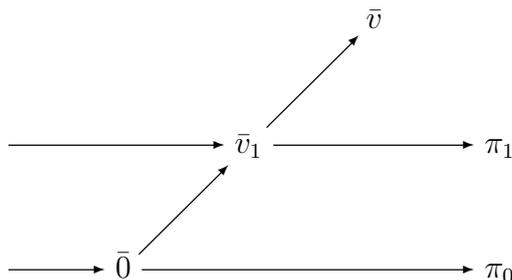
La precedente rappresentazione matriciale delle forme lineari può essere vista come caso particolare della rappresentazione matriciale delle applicazioni lineari, considerando la base naturale $(1) \subset \mathbb{R}$ dello spazio vettoriale \mathbb{R} .

Gli studenti incontrano molte forme lineari nel corso dei loro studi, anche se spesso non viene messa in evidenza il loro aspetto algebrico.

Per esempio, il differenziale in un punto di una funzione differenziabile è una forma lineare.

E' utile rappresentare geometricamente un vettore dello spazio vettoriale $\bar{\mathbf{V}}$ come una freccia orientata applicata in $\bar{0} \in \bar{\mathbf{V}}$.

Analogamente, è possibile trovare una rappresentazione geometrica di una forma lineare non nulla $\alpha \in \bar{\mathbf{V}}^*$. Infatti, la forma determina il piano $\pi_0 := \alpha^{-1}(0) \subset \bar{\mathbf{V}}$, di dimensione $n - 1$, costituito dai vettori su cui la forma si annulla ed il piano, parallelo al precedente, $\pi_1 := \alpha^{-1}(1) \subset \bar{\mathbf{V}}$, di dimensione $n - 1$, costituito dai vettori su cui la forma assume il valore 1. Questi due piani paralleli caratterizzano la forma stessa. Infatti, si vede facilmente che, per ogni vettore $\bar{v} \in \bar{\mathbf{V}}$, il numero $\alpha(\bar{v}) \in \mathbb{R}$ è uguale al rapporto orientato tra il vettore \bar{v} ed il vettore \bar{v}_1 ottenuto tagliando \bar{v} (o il suo opposto) mediante i due piani, come indicato in figura



1.1.6 Endomorfismi

Come caso particolare di applicazioni lineari, consideriamo gli endomorfismi di uno spazio vettoriale.

Consideriamo uno spazio vettoriale $\bar{\mathbf{V}}$ di dimensione n ed una base $\mathcal{B} = (\bar{b}_i)$.

Definiamo *endomorfismo* un'applicazione lineare

$$\hat{f} : \bar{\mathbf{V}} \rightarrow \bar{\mathbf{V}}.$$

L'insieme degli endomorfismi costituisce lo spazio vettoriale di dimensione n per n

$$\text{End}(\bar{\mathbf{V}}) := L(\bar{\mathbf{V}}, \bar{\mathbf{V}}) := \{\hat{f} : \bar{\mathbf{V}} \rightarrow \bar{\mathbf{V}}\}.$$

Ad un'endomorfismo $\hat{f} \in \text{End}(\bar{\mathbf{V}})$ possiamo associare, in accordo alla regola generale valida per ogni applicazione lineare, la matrice quadrata

$$(f_j^i) := \begin{pmatrix} f_1^1 & \cdots & f_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ f_1^n & \cdots & f_n^n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} (\hat{f}(\bar{b}_1))^1 & \cdots & (\hat{f}(\bar{b}_n))^1 \\ \vdots & & \vdots \\ (\hat{f}(\bar{b}_1))^n & \cdots & (\hat{f}(\bar{b}_n))^n \end{pmatrix}.$$

Perciò, la matrice ha un numero di righe e di colonne uguale alla dimensione dello spazio $\bar{\mathbf{V}}$.

Per ogni $\bar{v} \in \bar{\mathbf{V}}$, tale matrice permette di calcolare il vettore immagine $\hat{f}(\bar{v})$, mediante la formula

$$\hat{f}(\bar{v}) = f_j^i v^j \bar{b}_i := \sum_{1 \leq i, j \leq n} f_j^i v^j \bar{b}_i.$$

La rappresentazione matriciale degli endomorfismi gode delle seguenti proprietà:

- 1) $(\hat{f} + \hat{g})_j^i = (\hat{f})_j^i + (\hat{g})_j^i, \quad \forall \hat{f}, \hat{g} \in \text{End}(\bar{\mathbf{V}}),$
- 2) $(\lambda \hat{f})_j^i = \lambda (\hat{f})_j^i, \quad \forall \hat{f} \in \text{End}(\bar{\mathbf{V}}), \forall \lambda \in \mathbb{R}.$

Inoltre, la matrice di un endomorfismo caratterizza l'endomorfismo stesso.

E' anche conveniente introdurre la seguente notazione.

Possiamo infatti costruire una base dello spazio degli endomorfismi nel seguente modo.

Un vettore $\bar{v} \in \bar{\mathbf{V}}$ ed un covettore $\underline{\alpha} \in \bar{\mathbf{V}}^*$ inducono l'endomorfismo

$$\underline{\alpha} \otimes \bar{v} : \bar{\mathbf{V}} \rightarrow \bar{\mathbf{V}} : \bar{u} \mapsto (\underline{\alpha} \otimes \bar{v})(\bar{u}) := \underline{\alpha}(\bar{u}) \bar{v}.$$

Si vede allora facilmente che la base $\mathcal{B} = (\bar{b}_i)$ di $\bar{\mathbf{V}}$ induce in modo naturale l'insieme di n^2 endomorfismi

$$(\underline{\beta}^j \otimes \bar{b}_i)_{1 \leq i, j \leq n} \subset \text{End}(\bar{\mathbf{V}}),$$

che costituiscono una base di $\text{End}(\bar{\mathbf{V}})$.

Infatti, ogni endomorfismo $\hat{f} \in \text{End}(\bar{\mathbf{V}})$ può essere espresso in uno ed in un solo modo mediante la combinazione lineare

$$\hat{f} = f_j^i \underline{\beta}^j \otimes \bar{b}_i = \sum_{1 \leq i, j \leq n} f_j^i \underline{\beta}^j \otimes \bar{b}_i,$$

dove (f_j^i) è proprio la matrice associata ad \hat{f} dalla base \mathcal{B} .

Chiaramente, per ogni $\bar{u} \in \bar{\mathbf{V}}$, abbiamo

$$\begin{aligned} \hat{f}(\bar{u}) &= (f_j^i \underline{\beta}^j \otimes \bar{b}_i)(\bar{u}) \\ &= f_j^i (\underline{\beta}^j \otimes \bar{b}_i)(\bar{u}) \\ &= f_j^i \underline{\beta}^j(\bar{u}) \bar{b}_i \\ &= f_j^i u^j \bar{b}_i. \end{aligned}$$

1.1.7 Forme bilineari

Studiamo poi le forme bilineari di uno spazio vettoriale.

Consideriamo uno spazio vettoriale $\bar{\mathbf{V}}$ di dimensione n ed una base $\mathcal{B} = (\bar{b}_i)$.

Definiamo *forma bilineare* un'applicazione

$$\underline{f} : \bar{\mathbf{V}} \times \bar{\mathbf{V}} \rightarrow \mathbb{R},$$

che è lineare rispetto a ciascun fattore, ossia tale che

$$\begin{aligned} 1) \quad \underline{f}(\bar{u} + \bar{u}', \bar{v}) &= \underline{f}(\bar{u}, \bar{v}) + \underline{f}(\bar{u}', \bar{v}), & \underline{f}(\bar{u}, \bar{v} + \bar{v}') &= \underline{f}(\bar{u}, \bar{v}) + \underline{f}(\bar{u}, \bar{v}'), \\ 1) \quad \underline{f}(\lambda \bar{u}', \bar{v}) &= \lambda \underline{f}(\bar{u}', \bar{v}), & \underline{f}(\bar{u}, \lambda \bar{v}) &= \lambda \underline{f}(\bar{u}, \bar{v}), \end{aligned}$$

per ogni $\bar{u}, \bar{u}', \bar{v}, \bar{v}' \in \bar{\mathbf{V}}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

L'insieme delle forme bilineari costituisce lo spazio vettoriale di dimensione n per n

$$L^2(\bar{\mathbf{V}}, \mathbb{R}) := \{\underline{f} : \bar{\mathbf{V}} \times \bar{\mathbf{V}} \rightarrow \mathbb{R}\}.$$

Ad una forma bilineare $\underline{f} \in L^2(\bar{\mathbf{V}}, \mathbb{R})$ possiamo associare la matrice quadrata

$$(f_{ij}) := \begin{pmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1n} \\ \cdots & & \cdots \\ f_{n1} & \cdots & f_{nn} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \underline{f}(\bar{b}_1, \bar{b}_1) & \cdots & \underline{f}(\bar{b}_1, \bar{b}_n) \\ \cdots & & \cdots \\ \underline{f}(\bar{b}_1, \bar{b}_n) & \cdots & \underline{f}(\bar{b}_n, \bar{b}_n) \end{pmatrix}.$$

Perciò, la matrice ha un numero di righe e di colonne uguale alla dimensione dello spazio $\bar{\mathbf{V}}$.

Per ogni $\bar{u}, \bar{v} \in \bar{\mathbf{V}}$, tale matrice permette di calcolare lo scalare immagine $\underline{f}(\bar{u}, \bar{v})$, mediante la formula

$$\underline{f}(\bar{u}, \bar{v}) = f_{ij} u^i v^j := \sum_{1 \leq i, j \leq n} f_{ij} u^i v^j.$$

La rappresentazione matriciale delle forme bilineari gode delle seguenti proprietà:

$$\begin{aligned} 1) \quad (\underline{f} + \underline{g})_{ij} &= (\underline{f})_{ij} + (\underline{g})_{ij}, & \forall \underline{f}, \underline{g} \in L^2(\bar{\mathbf{V}}, \mathbb{R}), \\ 2) \quad (\lambda \underline{f})_{ij} &= \lambda (\underline{f})_{ij}, & \forall \underline{f} \in L^2(\bar{\mathbf{V}}, \mathbb{R}), \forall \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Inoltre, la matrice di una forma bilineare caratterizza la forma bilineare stessa.

E' anche conveniente introdurre la seguente notazione.

Possiamo infatti costruire una base dello spazio degli endomorfismi nel seguente modo.

Due covettori $\underline{\alpha}, \underline{\beta} \in \bar{\mathbf{V}}^*$ inducono la forma bilineare

$$\underline{\alpha} \otimes \underline{\beta} : \bar{\mathbf{V}} \times \bar{\mathbf{V}} \rightarrow \mathbb{R} : (\bar{u}, \bar{v}) \mapsto (\bar{u} \otimes \bar{v})(\underline{\alpha}) := \underline{\alpha}(\bar{u}) \underline{\beta}(\bar{v}).$$

Si vede allora facilmente che la base $\mathcal{B} = (\bar{b}_i)$ di $\bar{\mathbf{V}}$ induce in modo naturale l'insieme di n^2 forme bilineari

$$(\underline{\beta}^i \otimes \underline{\beta}^j)_{1 \leq i, j \leq n} \subset L^2(\bar{\mathbf{V}}, \mathbb{R}),$$

che costituiscono una base di $L^2(\bar{\mathbf{V}}, \mathbb{R})$.

Infatti, ogni forma bilineare $\underline{f} \in L^2(\bar{\mathbf{V}}, \mathbb{R})$ può essere espressa in uno ed in un solo modo mediante la combinazione lineare

$$\underline{f} = f_{ij} \underline{\beta}^i \otimes \underline{\beta}^j = \sum_{1 \leq i, j \leq n} f_{ij} \underline{\beta}^i \otimes \underline{\beta}^j,$$

dove (f_{ij}) è proprio la matrice associata ad \underline{f} dalla base \mathcal{B} .

Chiaramente, per ogni $\bar{u}, \bar{v} \in \bar{\mathbf{V}}$, abbiamo

$$\begin{aligned} \underline{f}(\bar{u}, \bar{v}) &= (f_{ij} \underline{\beta}^i \otimes \underline{\beta}^j)(\bar{u}, \bar{v}) \\ &= f_{ij} (\underline{\beta}^i \otimes \underline{\beta}^j)(\bar{u}, \bar{v}) \\ &= f_{ij} \underline{\beta}^i(\bar{u}) \underline{\beta}^j(\bar{v}) \\ &= f_{ij} u^i v^j. \end{aligned}$$

1.1.7.1 Forme bilineari simmetriche ed antisimmetriche

Consideriamo una forma bilineare $\underline{f} \in L^2(\bar{\mathbf{V}}, \mathbb{R})$.

Definiamo *trasposta* di \underline{f} la forma bilineare \underline{f}^t definita mediante la formula

$$\underline{f}^t(\bar{u}, \bar{v}) := \underline{f}(\bar{v}, \bar{u}), \quad \forall \bar{u}, \bar{v} \in \bar{\mathbf{V}}.$$

La forma bilineare \underline{f} è detta *simmetrica*, o *antisimmetrica* se, rispettivamente,

$$\underline{f}^t = \underline{f}, \quad \text{o} \quad \underline{f}^t = -\underline{f},$$

ossia se

$$\underline{f}(\bar{u}, \bar{v}) = \underline{f}(\bar{v}, \bar{u}), \quad \text{o} \quad \underline{f}(\bar{u}, \bar{v}) = -\underline{f}(\bar{v}, \bar{u}), \quad \forall \bar{u}, \bar{v} \in \bar{\mathbf{V}}.$$

La forma bilineare $\underline{f} \in L^2(\bar{\mathbf{V}}, \mathbb{R})$ si decompone univocamente in una componente simmetrica ed in una componente antisimmetrica, mediante la formula

$$\underline{f} = \text{Sim } \underline{f} + \text{Ant } \underline{f},$$

dove

$$\text{Sim } \underline{f} = \frac{1}{2} (\underline{f} + \underline{f}^t) \quad \text{e} \quad \text{Ant } \underline{f} = \frac{1}{2} (\underline{f} - \underline{f}^t).$$

Ossia,

$$(\text{Sim } \underline{f})(\bar{u}, \bar{v}) := \frac{1}{2} (\underline{f}(\bar{u}, \bar{v}) + \underline{f}(\bar{v}, \bar{u})) \quad \text{e} \quad (\text{Ant } \underline{f})(\bar{u}, \bar{v}) := \frac{1}{2} (\underline{f}(\bar{u}, \bar{v}) - \underline{f}(\bar{v}, \bar{u})).$$

1.1.7.2 Forme quadratiche

Consideriamo una forma bilineare simmetrica $\underline{f} \in L^2(\bar{\mathbf{V}}, \mathbb{R})$.

Definiamo *forma quadratica* associata alla forma bilineare simmetrica \underline{f} la funzione

$$f^\square : \bar{\mathbf{V}} \rightarrow \mathbb{R} : \bar{v} \mapsto f^\square(\bar{v}) := \underline{f}(\bar{v}, \bar{v}).$$

La forma quadratica soddisfa le seguenti proprietà:

- 1) $f^\square(\lambda \bar{v}) = \lambda^2 f^\square(\bar{v}), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \bar{v} \in \bar{\mathbf{V}},$
- 2) $f^\square(\bar{u} + \bar{v}) = f^\square(\bar{u}) + f^\square(\bar{v}) + 2 \underline{f}(\bar{u}, \bar{v}), \quad \forall \bar{u}, \bar{v} \in \bar{\mathbf{V}}.$

La seconda formula permette di caratterizzare la forma bilineare simmetrica \underline{f} mediante la sua forma quadratica, secondo la formula

$$\underline{f}(\bar{u}, \bar{v}) = \frac{1}{2} (f^\square(\bar{u} + \bar{v}) - f^\square(\bar{u}) - f^\square(\bar{v})).$$

Questa formula molto semplice (che è una banale conseguenza della bilinearità e simmetria di \underline{f}) è molto interessante e permette di unificare molti risultati noti in campi diversi.

Per esempio, scegliendo come \underline{f} il prodotto scalare, questa formula diventa il *Teorema di Carnot*; in particolare, per due vettori \bar{u} e \bar{v} ortogonali tra loro, questa formula diventa il teorema di Pitagora.

Analogamente, scegliendo come \underline{f} il tensore delle tensioni (vedi seguito), questa formula permette di calcolare gli sforzi di taglio conoscendo tre opportuni sforzi normali.

Analogamente, scegliendo come \underline{f} il tensore d'inerzia (vedi dispense sulla geometria delle masse), questa formula permette di calcolare i momenti deviatori conoscendo tre opportuni momenti d'inerzia.

La forma quadratica f^\square è detta *definita positiva* se

$$\forall \bar{0} \neq \bar{v} \in \bar{\mathbf{V}}, \quad \text{abbiamo} \quad f^\square(\bar{v}) := \underline{f}(\bar{v}, \bar{v}) > 0.$$

Se la forma quadratica f^\square è definita positiva, allora si dice anche (per abuso di linguaggio) che la forma bilineare \underline{f} è definita positiva.

Si può dimostrare che la forma bilineare simmetrica \underline{f} è definita positiva se e solo se tutti i minori principali della sua matrice (relativamente ad una base qualunque) hanno determinante positivi. In particolare, se la forma bilineare simmetrica \underline{f} è definita positiva, allora il determinante e gli elementi diagonali della sua matrice (relativamente ad una base qualunque) sono positivi.

1.1.8 Cambiamenti di base

Studiamo come si ripercuotono i cambiamenti di base sulle componenti di vettori, covettori, endomorfismi e forme bilineari.

Consideriamo uno spazio vettoriale $\bar{\mathbf{V}}$ di dimensione n .

Siano

$$\mathcal{B} = (\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n) \quad \text{e} \quad \mathcal{B}^* = (\underline{\beta}^1, \dots, \underline{\beta}^n)$$

una base e la sua duale.

Consideriamo poi un'altra n -pla di vettori

$$\mathcal{B}' = (\bar{b}'_1, \dots, \bar{b}'_n).$$

Le componenti di questi vettori rispetto alla base \mathcal{B} determinano la matrice quadrata

$$(S'^i_j) := \begin{pmatrix} \underline{\beta}^1(\bar{b}'_1) & \dots & \underline{\beta}^1(\bar{b}'_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ \underline{\beta}^n(\bar{b}'_1) & \dots & \underline{\beta}^n(\bar{b}'_n) \end{pmatrix}.$$

Si dimostra facilmente che la n -pla $\mathcal{B}' = (\bar{b}'_1, \dots, \bar{b}'_n)$ è una base se e solo se la matrice (S'^i_j) è invertibile.

Supponiamo ora che la matrice (S'^i_j) sia invertibile e che perciò $\mathcal{B}' = (\bar{b}'_1, \dots, \bar{b}'_n)$ sia un'altra base.

Indichiamo la matrice inversa di (S'^i_j) con

$$(S^h_k) = (S'^i_j)^{-1}$$

ed indichiamo la base duale di $\mathcal{B}' = (\bar{b}'_1, \dots, \bar{b}'_n)$ con

$$\mathcal{B}'^* = (\underline{\beta}'^1, \dots, \underline{\beta}'^n).$$

Allora, i cambiamenti di base sono dati dalle seguenti formule

$$\bar{b}'_i = S'^j_i \bar{b}_j, \quad \bar{b}_i = S^j_i \bar{b}'_j,$$

e

$$\underline{\beta}'^i = S^i_j \underline{\beta}^j, \quad \underline{\beta}^i = S'^i_j \underline{\beta}'^j.$$

Per ogni vettore

$$\bar{v} = v^i \bar{b}_i = v'^i \bar{b}'_i \in \bar{\mathbf{V}},$$

i cambiamenti di componenti sono dati dalla formula

$$v'^i = S^i_j v^j, \quad v^i = S'^i_j v'^j.$$

Per ogni covettore

$$\underline{\alpha} = \alpha_j \underline{\beta}^j = \alpha'_j \underline{\beta}'^j \in \bar{\mathbf{V}}^*,$$

i cambiamenti di componenti sono dati dalla formula

$$\alpha'_j = S'^i_j \alpha_i, \quad \alpha_j = S^i_j \alpha'_i.$$

Per ogni endomorfismo

$$\hat{f} = f_i^j \underline{\beta}^i \otimes \bar{b}_j = f_i^j \underline{\beta}^i \otimes \bar{b}'_j \in \text{End}(\bar{\mathbf{V}})$$

i cambiamenti di componenti sono dati dalla formula

$$f_i^j = S_h^i f_k^h S_j^k.$$

Per ogni forma bilineare

$$\underline{f} = f_{ij} \underline{\beta}^i \otimes \underline{\beta}_j = f'_{ij} \underline{\beta}^i \otimes \underline{\beta}'_j \in L^2(\bar{\mathbf{V}}, \mathbb{R}),$$

i cambiamenti di componenti sono dati dalla formula

$$f'_{ij} = S_i^h f_{hk} S_j^k, \quad f_{ij} = S_i^h f'_{hk} S_j^k.$$

Dunque, le componenti di un vettore, di un covettore, di un endomorfismo, di una forma bilineare (e così via) dipendono dalla base scelta. Ma, ovviamente, le seguenti espressioni non dipendono dalla scelta della base

$$\begin{aligned} \alpha(\bar{v}) = \alpha_i v^i &= \alpha'_i v'^i \in \mathbb{R}, & \forall \alpha \in \bar{\mathbf{V}}^*, \bar{v} \in \bar{\mathbf{V}}, \\ \hat{f}(\bar{v}) = f_j^i v^j &= f'_j{}^i v'^j \in \bar{\mathbf{V}}, & \forall \hat{f} \in \text{End}(\bar{\mathbf{V}}), \bar{v} \in \bar{\mathbf{V}}, \\ \underline{f}(\bar{u}, \bar{v}) = f_{ij} u^i v^j &= f'_{ij} u'^i v'^j \in \mathbb{R}, & \forall \underline{f} \in L^2(\bar{\mathbf{V}}, \mathbb{R}), \bar{u}, \bar{v} \in \bar{\mathbf{V}}. \end{aligned}$$

1.1.9 Invarianti di un endomorfismo

Mettiamo in evidenza delle entità associate ad un endomorfismo, che sono calcolate tramite una base, ma che non dipendono dalla scelta di tale base.

Consideriamo uno spazio vettoriale $\bar{\mathbf{V}}$ di dimensione n e due basi

$$\mathcal{B} = (\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n) \quad \text{e} \quad \mathcal{B}' = (\bar{b}'_1, \dots, \bar{b}'_n).$$

Siano (S'^i_j) e (S^i_j) la matrice del cambiamento di base e la sua inversa.

Consideriamo una matrice quadrata (a_j^i) di ordine n per n . Definiamo *minore principale* di ordine $0 \leq h \leq n-1$ di tale matrice è ogni sottomatrice $(a_j^i)_{[h]}$ ottenuta da (a_j^i) cancellando $n-h$ righe e le $n-h$ colonne con lo stesso indice. Per esempio, i minori principali di ordine 1 sono gli elementi diagonali ed il minore principale di ordine n è la matrice (a_j^i) stessa.

Per ogni $0 \leq h \leq n-1$, sia

$$\Delta_h := \sum \det(a_j^i)_{[h]} \in \mathbb{R}$$

la somma dei determinanti dei minori principali di ordine h .

Per esempio, per $h = 1$, abbiamo

$$\Delta_1 = \text{tr}(a_j^i) = \sum_i a_i^i$$

e, per $h = n$, abbiamo

$$\Delta_n = \det(a_j^i).$$

Consideriamo ora un endomorfismo $\hat{f} \in \text{End}(\bar{\mathbf{V}})$ e le sue rappresentazioni matriciali (f_j^i) nella base \mathcal{B} e (f'^i_j) nella base \mathcal{B}' , rispettivamente.

Allora, si può dimostrare che, per ogni $0 \leq h \leq n - 1$,

$$\Delta_h = \Delta'_h.$$

In particolare, per $h = 1$, abbiamo

$$\text{tr } \hat{f} := \Delta_1 = \text{tr}(f_j^i) = \text{tr}(f'^i_j)$$

e, per $h = n$, abbiamo

$$\det \hat{f} = \det(f_j^i) = \det(f'^i_j).$$

Infatti, abbiamo

$$\text{tr}(f'^i_j) = f'^i_i = S_h^i f_k^h S'^k_i = f_k^h S'^k_i S_h^i = f_k^h \delta_h^k = f_h^h = \text{tr}(f_k^h)$$

e

$$\begin{aligned} \det(f'^i_j) &= \det(S_h^i f_k^h S'^k_i) = \det(S_h^i) \det(f_k^h) \det(S'^r_s) = \\ &= \det(S_j^i) \det(f_k^h) \det(S_s^r)^{-1} = \det(f_k^h). \end{aligned}$$

Grazie a queste invarianze, diremo che $\text{tr } \hat{f} = \text{tr}(f_j^i) = \text{tr}(f'^i_j)$ è la *traccia* di \hat{f} e che $\det \hat{f} = \det(f_j^i) = \det(f'^i_j)$ è il *determinante* di \hat{f} .

Gli invarianti di un endomorfismo hanno un significato geometrico interessante. Per esempio, vedremo in seguito che il determinante di un endomorfismo è il rapporto tra due volumi orientati.

1.1.10 Invariante di una forma bilineare

Mettiamo in evidenza un segno associato ad una forma bilineare, che è calcolato tramite una base, ma che non dipende dalla scelta di tale base.

Per ogni $f \in L^2(\bar{\mathbf{V}}, \mathbb{R})$, abbiamo

$$\det \underline{f} = \text{sign } \det(f_{ij}) = \text{sign } \det(f'_{ij}).$$

Infatti, abbiamo

$$\det(f'_{ij}) = \det(f_{hk} S_i^h S_j^k) = \det(f_{hk}) \det(S_i^h) \det(S_j^k) = \det(f_{hk}) (\det(S_i^h))^2.$$

Ribadiamo che, per una forma bilineare il determinante della sua matrice non è invariante rispetto al cambiamento di base, ma lo è il segno di tale determinante.

1.1.11 Orientazione

Diamo una definizione algebrica della nozione di orientazione ed illustriamo il suo significato fisico intuitivo.

Consideriamo uno spazio vettoriale \bar{V} di dimensione n .

Si dice che due basi

$$\mathcal{B} = (\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n) \quad \text{e} \quad \mathcal{B}' = (\bar{b}'_1, \dots, \bar{b}'_n)$$

hanno la *stessa orientazione* se il determinante della matrice di transizione (S'^i_j) ha determinante positivo.

Si vede facilmente che l'avere la stessa orientazione è una relazione di equivalenza nell'insieme delle basi e che esistono esattamente due classi di equivalenza: tutte le basi di una stessa classe hanno la stessa orientazione e due basi delle due classi diverse non hanno la stessa orientazione.

Definiamo *orientazione* di \bar{V} una delle due classi di equivalenza.

Possiamo illustrare la nozione di orientazione nello spazio fisico tridimensionale usuale \bar{P} mediante le “regole della mano destra e della mano sinistra” nel seguente modo.

Il pollice, l'indice ed il medio di ciascuna delle due mani individuano due basi ordinate in \bar{P} . Ruotando ciascuna mano o inclinando le sue dita (senza far combaciare due dita) si ottiene una nuova base che ha la stessa orientazione di quella di partenza. D'altra parte, le basi individuate dalla mano sinistra e dalla mano destra hanno orientazioni diverse.

Pertanto, la scelta di una delle due mani determina la scelta di un'orientazione in \bar{P} .

Per poter portare le dita di una mano a combaciare con quelle dell'altra mano (in modo da determinare la stessa orientazione) occorrerebbe eseguire un movimento discontinuo, mediante un'operazione chirurgica, che è esclusa nella “regola delle due mani”.

1.1.12 Volumi

Definiamo la nozione algebrica di volume orientato.

Consideriamo uno spazio vettoriale \bar{V} di dimensione n .

Semplici considerazioni intuitive di geometria elementare suggeriscono la seguente definizione.

Definiamo *forma volume* una forma n lineare

$$\eta : \bar{V} \times \dots \times \bar{V} \rightarrow \mathbb{R},$$

che si annulla quando due variabili coincidono e che assume un valore non nullo su una base.

Consideriamo una forma volume η .

Dunque, la forma volume η associa ad ogni n -pla ordinata di vettori $(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n)$ il numero

$$\eta(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n) \in \mathbb{R},$$

che è detto il *volume orientato* dell' n -parallelepipedo generato dai vettori $(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n)$.

Si possono dimostrare i seguenti fatti.

La forma volume η è antisimmetrica, ossia per ogni $1 \leq i, j \leq n$,

$$\eta(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_i, \dots, \bar{v}_j, \dots, \bar{v}_i, \dots, \bar{v}_j, \dots, \bar{v}_n) = -\eta(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_j, \dots, \bar{v}_i, \dots, \bar{v}_i, \dots, \bar{v}_j, \dots, \bar{v}_n).$$

Si consideri una base $\mathcal{B} = (\bar{b}_i)$.

Per ogni n -pla ordinata di vettori

$$(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n) \quad \text{con} \quad \bar{v}_i = \sum_{1 \leq j \leq n} v_i^j \bar{b}_j,$$

abbiamo

$$\eta(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n) = \det(v_i^j) \eta(\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n).$$

In particolare, per ogni altra base $\mathcal{B}' = (\bar{b}'_1, \dots, \bar{b}'_n)$, abbiamo

$$\eta(\bar{b}'_1, \dots, \bar{b}'_n) = \det(S'^j_i) \eta(\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n).$$

Pertanto, il volume di ogni base è non nullo; inoltre, due basi hanno volume con lo stesso segno se e solo se hanno la stessa orientazione.

Inoltre, una n -pla ordinata di vettori ha volume non nullo se e solo se è una base.

Infine, una forma volume è completamente determinata dal valore che essa assume su una base (comunque scelta), che fungerà da *unità di misura dei volumi* unità di misura dei volumi. Tutte le altre basi, la cui matrice di cambiamento di base ha determinante 1, costituiscono un'unità di misura dei volumi equivalente alla precedente.

1.1.13 Significato del determinante di un endomorfismo

Possiamo ora mettere in evidenza il significato geometrico del determinante di un endomorfismo.

Consideriamo un endomorfismo $\hat{f} : \bar{V} \rightarrow \bar{V}$ ed una base $\mathcal{B} = (\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n)$.

Applicando l'endomorfismo \hat{f} ai vettori di tale base otteniamo la n -pla di vettori trasformati

$$\mathcal{B}' \equiv (\bar{b}'_1, \dots, \bar{b}'_n) := (\hat{f}(\bar{b}_1), \dots, \hat{f}(\bar{b}_n)).$$

Decomponendo i vettori trasformati secondo la base \mathcal{B} otteniamo

$$\bar{b}'_j = \sum_i f_j^i \bar{b}_i.$$

Dunque, la matrice di trasformazione tra le due n -ple è proprio la matrice (f_j^i) di \hat{f} nella base \mathcal{B} .

Pertanto, la n -pla \mathcal{B}' è una base se e solo se $\det(f_j^i) \neq 0$.

In altre parole, l'endomorfismo trasforma un “parallelepipedo” di dimensione n in un “parallelepipedo” di dimensione n se e solo se il suo determinante $\det \hat{f} = \det(f_j^i)$ è diverso da zero.

Ciò equivale a dire che l'endomorfismo è un isomorfismo se e solo se il suo determinante è diverso da zero.

D'altra parte, se il determinante dell'endomorfismo è nullo, allora l'endomorfismo trasforma un parallelepipedo di dimensione n in un parallelepipedo di dimensione minore di n .

Supponiamo ora che \hat{f} sia un isomorfismo.

Possiamo dimostrare facilmente che la base \mathcal{B}' ha la stessa orientazione della base \mathcal{B} se e solo se $\det \hat{f} > 0$.

In altra parole, abbiamo $\det \hat{f} > 0$, o $\det \hat{f} < 0$, secondo che \hat{f} preserva o non preserva l'orientazione dello spazio.

Inoltre, possiamo dimostrare facilmente che il numero $\det \hat{f}$ misura il rapporto tra il volume orientato dopo la trasformazione indotta da \hat{f} ed il volume originale prima della trasformazione.

1.2 Spazi vettoriali euclidei

1.2.1 Metrica euclidea

Introduciamo la nozione di spazio vettoriale euclideo.

Consideriamo uno spazio vettoriale \bar{V} di dimensione n ed una base $\mathcal{B} = (\bar{b}_i)$.

1.2.1 Definizione. Definiamo *metrica euclidea* una forma bilineare simmetrica e definita positiva

$$g : \bar{V} \times \bar{V} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Per ogni coppia di vettori $\bar{u}, \bar{v} \in \bar{\mathbf{V}}$, il numero

$$\bar{u} \cdot \bar{v} := \underline{g}(\bar{u}, \bar{v})$$

è detto *prodotto scalare* di \bar{u} e \bar{v} . \square

Consideriamo una metrica euclidea \underline{g} .

1.2.2 Definizione. Definiamo *norma* (o *modulo*, o *lunghezza*) del vettore $\bar{v} \in \bar{\mathbf{V}}$ il numero

$$\|\bar{v}\| := \sqrt{\underline{g}(\bar{v}, \bar{v})} \geq 0. \square$$

1.2.3 Proposizione. La norma soddisfa la *disuguaglianza di Schwarz*

$$|\bar{u} \cdot \bar{v}| \leq \|\bar{u}\| \|\bar{v}\|, \quad \forall \bar{u}, \bar{v} \in \bar{\mathbf{V}},$$

dove l'uguaglianza vale se e solo se \bar{u} e \bar{v} sono paralleli. \square

1.2.4 Nota. Dalla disuguaglianza di Schwarz segue che, se \bar{u} e \bar{v} sono due vettori non nulli, allora esiste un unico numero

$$0 \leq \phi \leq \pi, \quad \text{tale che} \quad \cos \phi = \frac{\bar{u} \cdot \bar{v}}{\|\bar{u}\| \|\bar{v}\|},$$

che è detto *angolo non orientato* formato dai vettori \bar{u} e \bar{v} .

Possiamo dunque scrivere

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = \|\bar{u}\| \|\bar{v}\| \cos \phi. \square$$

1.2.5 Proposizione. La matrice della metrica nella base \mathcal{B} è data, secondo la regola generale, dalla formula

$$g_{ij} = \underline{g}(\bar{b}_i, \bar{b}_j) := \bar{b}_i \cdot \bar{b}_j,$$

ossia

$$\begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{n1} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{b}_1 \cdot \bar{b}_1 & \cdots & \bar{b}_1 \cdot \bar{b}_n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \bar{b}_n \cdot \bar{b}_1 & \cdots & \bar{b}_n \cdot \bar{b}_n \end{pmatrix}.$$

Pertanto il prodotto scalare di due vettori \bar{u} e \bar{v} è espresso mediante la formula

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = g_{ij} u^i v^j = \sum_{1 \leq i, j \leq n} g_{ij} u^i v^j. \square$$

Due vettori $\bar{u}, \bar{v} \in \bar{\mathbf{V}}$ sono detti *ortogonali* se $\bar{u} \cdot \bar{v} = 0$.

Un vettore $\bar{u} \in \bar{\mathbf{V}}$ tale che $\|\bar{u}\| = 1$ è detto *versore*.

Definiamo *versore del vettore* $\bar{u} \neq \bar{0} \in \bar{\mathbf{V}}$ il versore

$$\text{vers } \bar{u} := \bar{u} / \|\bar{u}\|.$$

1.2.6 Proposizione. Sia $\bar{u} \in \bar{\mathbf{V}}$ un vettore non nullo. Allora, ogni vettore $\bar{v} \in \bar{\mathbf{V}}$ può essere univocamente decomposto nella componente parallela ed ortogonale ad \bar{u}

$$\bar{v} = \bar{v}^{\parallel} + \bar{v}^{\perp}, \quad \text{dove} \quad \bar{v}^{\parallel} = \frac{\bar{v} \cdot \bar{u}}{\|\bar{u}\|^2} \bar{u} = (\bar{v} \cdot \text{vers } \bar{u}) \text{vers } \bar{u}, \quad \bar{v}^{\perp} = \bar{v} - \bar{v}^{\parallel}.$$

In particolare, se \bar{u} è un versore, allora abbiamo

$$\bar{v}^{\parallel} = (\bar{v} \cdot \bar{u}) \bar{u}. \square$$

1.2.7 Definizione. Definiamo *base ortonormale* un insieme di n vettori

$$\mathcal{E} := (\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n) \subset \bar{\mathbf{V}},$$

costituito da versori ortogonali fra loro, ossia tali che

$$\bar{e}_i \cdot \bar{e}_j = \delta_{ij},$$

dove (δ_{ij}) è la matrice di Kronecker definita da

$$\begin{aligned} \delta_{ij} &:= 1, & \text{per} & \quad i = j \\ \delta_{ij} &:= 0, & \text{per} & \quad i \neq j. \square \end{aligned}$$

Si può dimostrare che una base ortonormale è una base dello spazio vettoriale $\bar{\mathbf{V}}$.

1.2.8 Proposizione. La matrice della metrica nella base ortonormale \mathcal{E} è data, secondo la regola generale, dalla formula

$$g_{ij} = \underline{g}(\bar{e}_i, \bar{e}_j) := \bar{e}_i \cdot \bar{e}_j = \delta_{ij},$$

ossia

$$\begin{pmatrix} g_{11} & \dots & g_{1n} \\ \dots & & \\ g_{n1} & \dots & g_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{e}_1 \cdot \bar{e}_1 & \dots & \bar{e}_1 \cdot \bar{e}_n \\ \dots & & \\ \bar{e}_n \cdot \bar{e}_1 & \dots & \bar{e}_n \cdot \bar{e}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \dots & & \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Pertanto il prodotto scalare di due vettori \bar{u} e \bar{v} in una base ortonormale è espresso mediante la formula

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = \delta_{ij} u^i v^j = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \delta_{ij} u^i v^j = u^1 v^1 + \dots + u^n v^n. \square$$

Se (\bar{e}_i) è una base ortonormale, allora indichiamo la base duale con (\underline{e}^j) .

1.2.9 Proposizione. Il cambiamento da una base ortonormale ad un'altra base ortonormale è espresso da una matrice ortogonale (S_j^i) .

Perciò, la matrici del cambiamento di base inversa è data dalla trasposta

$$(S_j^i) = (S_i^j). \square$$

1.2.10 Proposizione. Tutte le basi ortonormali con la stessa orientazione hanno lo stesso volume orientato.

Perciò, la metrica euclidea e la scelta di un'orientazione dello spazio determinando la forma volume $\underline{\eta}$ tale che (per una qualunque base ortonormale orientata positivamente)

$$\underline{\eta}(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n) = 1.$$

1.2.2 Isomorfismo musicale

La metrica induce un isomorfismo tra lo spazio vettoriale ed il suo duale.

Mediante tale isomorfismo possiamo trasformare vettori in covettori e viceversa.

Questo fatto è utile per utilizzare per uno stesso oggetto le interpretazioni e le tecniche di calcolo sia dei vettori che dei covettori.

Consideriamo uno spazio vettoriale \bar{V} di dimensione n , con una metrica euclidea \underline{g} .

Consideriamo anche una base $\mathcal{B} = (\bar{b}_i)$ una base ortonormale $\mathcal{E} = (\bar{e}_i)$ e le loro duali $\mathcal{B}^* = (\underline{\beta}^j)$ e $\mathcal{E}^* = (\underline{e}^j)$, rispettivamente.

1.2.11 Definizione. Definiamo *isomorfismo musicale* l'applicazione lineare

$$g^\flat : \bar{V} \rightarrow \bar{V}^* : \bar{v} \rightarrow \underline{v},$$

dove la forma lineare $\underline{v} : \bar{V} \rightarrow \mathbb{R}$ è definita mediante la formula

$$\underline{v}(\bar{u}) := \bar{v} \cdot \bar{u}, \quad \forall \bar{u} \in \bar{V}.$$

La forma lineare $\bar{v} := g^\flat(\bar{v})$ è detta *il covettore associato a \bar{v}* tramite la metrica. \square

1.2.12 Nota. Si vede facilmente che la forma \underline{v} è caratterizzata geometricamente dal piano π_0 (di dimensione $n-1$) ortogonale al vettore \bar{v} e dal piano π_1 parallelo a π_0 , posto nello stesso semispazio di \bar{v} e la cui distanza da π_0 è l'inversa di $\|\bar{v}\|$. \square

1.2.13 Proposizione. L'espressione di g^\flat è data, nella base \mathcal{B} , dalla formula

$$g^\flat(\bar{v}) = g_{ij} v^i \underline{\beta}^j = \sum_{1 \leq i, j \leq n} g_{ij} v^i \underline{\beta}^j$$

e, nella base ortonormale \mathcal{E} , dalla formula

$$g^\flat(\bar{v}) = \delta_{ij} v^i \underline{e}^j = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \delta_{ij} v^i \underline{e}^j.$$

In altre parole, nella base \mathcal{B} abbiamo

$$v_j = g_{ij} v^i = \sum_{1 \leq i \leq n} g_{ij} v^i$$

e nella base ortonormale \mathcal{E} abbiamo

$$v_j = \delta_{ij} v^i = \sum_{1 \leq i \leq n} \delta_{ij} v^i = v_j.$$

Dunque, le rappresentazioni matriciali di un vettore e del corrispondente covettore coincidono in una base ortonormale. \square

1.2.14 Proposizione. La base duale della base ortonormale risulta essere data dalla formula

$$\epsilon_i = g^\flat(\bar{e}_i) = e_i.$$

Pertanto, in una base ortonormale, le componenti di ogni vettore $\bar{v} \in \bar{\mathbf{V}}$ sono date dalla formula

$$v^i = \bar{v} \cdot \bar{e}_i. \square$$

La formula precedente non vale in una base non ortonormale!

1.2.15 Proposizione. Si può facilmente dimostrare che g^\flat è un'applicazione lineare invertibile.

Indichiamo l'applicazione lineare inversa di g^\flat con

$$g^\sharp : \bar{\mathbf{V}}^* \rightarrow \bar{\mathbf{V}} : \underline{v} \mapsto \bar{v}.$$

La matrice associata a g^\sharp è la matrice inversa della matrice (g_{ij}) ed è denotata da

$$(g^{hk}) := (g_{ij})^{-1}.$$

Dunque, per ogni $\underline{v} \in \bar{\mathbf{V}}^*$, nella base \mathcal{B} abbiamo

$$v^i = g^{ij} v_j = \sum_{1 \leq j \leq n} g^{ij} v_j$$

e nella base ortonormale \mathcal{E} abbiamo

$$v^i = \delta^{ij} v_j = \sum_{1 \leq j \leq n} \delta^{ij} v_j = v_i.$$

1.2.16 Proposizione. L'isomorfismo musicale ci permette di estendere il prodotto scalare allo spazio duale $\bar{\mathbf{V}}^*$ in modo naturale, mediante la seguente formula

$$\bar{g} : \bar{\mathbf{V}}^* \times \bar{\mathbf{V}}^* \rightarrow \mathbb{R} : (\underline{u}, \underline{v}) \mapsto \bar{u} \cdot \bar{v} := \bar{g}(\underline{u}, \underline{v}) := g^\sharp(\underline{u}) \cdot g^\sharp(\underline{v}).$$

Dunque, per ogni $\underline{u}, \underline{v} \in \bar{\mathbf{V}}^*$, nella base \mathcal{B} abbiamo

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = g^{ij} u_i v_j = \sum_{ij} g^{ij} u_i v_j$$

e nella base \mathcal{E} abbiamo

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = \delta^{ij} u_i v_j = \sum_{ij} \delta^{ij} u_i v_j = u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n. \square$$

1.2.3 Ulteriore isomorfismo musicale

La metrica induce anche un isomorfismo tra lo spazio degli endomorfismi e lo spazio vettoriale delle forme bilineari.

Mediante tale isomorfismo possiamo trasformare endomorfismi in forme bilineari e viceversa.

Questo fatto è utile per utilizzare per uno stesso oggetto le interpretazioni e le tecniche di calcolo sia degli endomorfismi che delle forme bilineari.

Consideriamo uno spazio vettoriale $\bar{\mathbf{V}}$ di dimensione n , con una metrica euclidea \underline{g} .

Consideriamo anche una base $\mathcal{B} = (\bar{b}_i)$ ed una base ortonormale $\mathcal{E} = (\bar{e}_i)$ e le loro duali $\mathcal{B}^* = (\underline{\beta}^j)$ e $\mathcal{E}^* = (\underline{\epsilon}^j)$, rispettivamente.

Definiamo *isomorfismo musicale* (anche) l'applicazione lineare (per semplicità indicata con lo stesso simbolo del precedente isomorfismo)

$$g^b : \text{End}(\bar{\mathbf{V}}) \rightarrow L^2(\bar{\mathbf{V}}, \mathbb{R}) : \hat{f} \rightarrow \underline{f},$$

dove la forma bilineare $\underline{f} : \bar{\mathbf{V}} \times \bar{\mathbf{V}} \rightarrow \mathbb{R}$ è definita mediante la formula

$$\underline{f}(\bar{u}, \bar{v}) := \hat{f}(\bar{u}) \cdot \bar{v}, \quad \forall \bar{u}, \bar{v} \in \bar{\mathbf{V}}.$$

In effetti, si può facilmente dimostrare che g^b è un'applicazione lineare invertibile.

La forma bilineare $\underline{f} := g^b(\hat{f})$ è detta *la forma bilineare associata ad \hat{f}* tramite la metrica.

In particolare, si vede facilmente che

$$g^b(\text{id}_{\bar{\mathbf{V}}}) = \underline{g},$$

ossia che la forma bilineare associata all'endomorfismo identità è proprio la metrica stessa.

L'espressione di g^b è data, nella base \mathcal{B} , dalla formula

$$g^b(\hat{f}) = (f_h^i g_{ik}) \underline{\beta}^h \otimes \underline{\beta}^k = \sum_{1 \leq i, h, k \leq n} (f_h^i g_{ik}) \underline{\beta}^h \otimes \underline{\beta}^k$$

e, nella base ortonormale \mathcal{E} , dalla formula

$$g^b(\hat{f}) = (f_h^i \delta_{ik}) \underline{\epsilon}^h \otimes \underline{\epsilon}^k = \sum_{1 \leq i, h, k \leq n} (f_h^i \delta_{ik}) \underline{\epsilon}^h \otimes \underline{\epsilon}^k = \sum_{1 \leq h, k \leq n} f_h^k \underline{\epsilon}^h \otimes \underline{\epsilon}^k$$

In altre parole, nella base \mathcal{B} abbiamo

$$f_{hk} = f_h^i g_{ik} = \sum_{1 \leq i \leq n} f_h^i g_{ik}$$

e nella base ortonormale \mathcal{E} abbiamo

$$f_{hk} = f_h^i \delta_{ik} = \sum_{1 \leq i \leq n} f_h^i \delta_{ik} = f_h^k.$$

Indichiamo l'applicazione lineare inversa di g^b con

$$g^\sharp : L^2(\bar{\mathbf{V}}, \mathbb{R}) \rightarrow \text{End}(\bar{\mathbf{V}}) : \underline{f} \mapsto \hat{f}.$$

Dunque, nella base \mathcal{B} abbiamo

$$f_i^j = f_{ih} g^{hj} = \sum_{1 \leq h \leq n} f_{ih} g^{hj}$$

e nella base ortonormale \mathcal{E} abbiamo

$$f_i^j = f_{ih} \delta^{hj} = \sum_{1 \leq h \leq n} f_{ih} \delta^{hj} = f_{ij}.$$

Dunque, le rappresentazioni matriciali di un endomorfismo e della corrispondente forma bilineare coincidono in una base ortonormale.

1.2.4 Trasposizione metrica di endomorfismi

La metrica permette di definire la trasposizione di endomorfismi.

Per ogni endomorfismo $\hat{f} \in \text{End}(\bar{\mathbf{V}})$, definiamo l'*endomorfismo trasposto*

$$\hat{f}^t \in \text{End}(\bar{\mathbf{V}})$$

mediante la formula

$$\hat{f}^t(\bar{u}) \cdot \bar{v} = \bar{u} \cdot \hat{f}(\bar{v}), \quad \forall \bar{u}, \bar{v} \in \bar{\mathbf{V}}.$$

Dunque, l'endomorfismo trasposto è ottenuto mediante la composizione dei seguenti tre isomorfismi

$$\hat{f} \xrightarrow{g^b} \underline{f} \xrightarrow{t} \underline{f}^t \xrightarrow{g^\sharp} \hat{f}^t.$$

In altre parole, gli isomorfismi musicali permettono di estendere agli endomorfismi la trasposizione che avevamo definito per le forme bilineari.

Il trasposto dell'endomorfismo identità è l'endomorfismo identità

$$(\text{id}_{\bar{V}})^t = \text{id}_{\bar{V}}$$

ed il trasposto di una composizione è la composizione dei trasposti nell'ordine inverso

$$(\hat{f} \circ \hat{f}')^t = \hat{f}'^t \circ \hat{f}^t.$$

L'espressione del trasposto è dato nella base \mathcal{B} dalla formula

$$(\hat{f}^t)_j^i = g_{ih} f_k^h g_{kj} = \sum_{1 \leq h, k \leq n} g_{ih} f_k^h g_{kj}$$

e nella base ortonormale \mathcal{E} dalla formula

$$(\hat{f}^t)_j^i = \delta_{ih} f_k^h \delta_{kj} = \sum_{1 \leq h, k \leq n} \delta_{ih} f_k^h \delta_{kj} = f_i^j.$$

Dunque, in una base ortonormale, la matrice dell'endomorfismo trasposto è la trasposta della matrice dell'endomorfismo.

Un endomorfismo \hat{f} è detto *simmetrico*, o *antisimmetrico* se, rispettivamente,

$$\hat{f}^t = \hat{f}, \quad \text{o} \quad \hat{f}^t = -\hat{f},$$

ossia se

$$\hat{f}(\bar{u}) \cdot \bar{v} = \hat{f}(\bar{v}) \cdot \bar{u}, \quad \text{o} \quad \hat{f}(\bar{u}) \cdot \bar{v} = -\hat{f}(\bar{v}) \cdot \bar{u}, \quad \forall \bar{u}, \bar{v} \in \bar{V}.$$

Ogni endomorfismo si decompone univocamente in una componente simmetrica ed in una componente antisimmetrica, mediante la formula

$$\hat{f} = \text{Sim } \hat{f} + \text{Ant } \hat{f},$$

dove

$$\text{Sim } \hat{f} = \frac{1}{2} (\hat{f} + \hat{f}^t) \quad \text{e} \quad \text{Ant } \hat{f} = \frac{1}{2} (\hat{f} - \hat{f}^t).$$

1.2.5 Autovalori ed autovettori

Studiamo gli autovettori e gli autovalori di un endomorfismo.

Consideriamo uno spazio vettoriale \bar{V} di dimensione n ed una base $\mathcal{B} = (\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n)$. Consideriamo anche un endomorfismo

$$\hat{f} : \bar{V} \rightarrow \bar{V}.$$

Se $\bar{v} \in \bar{V}$ è un vettore non nullo qualunque, in generale, il vettore $\hat{f}(\bar{v}) \in \bar{V}$ non è detto che abbia la direzione di \bar{v} .

Definiamo *autovettore* di \hat{f} un vettore \bar{v} non nullo tale che

$$\hat{f}(\bar{v}) = \lambda \bar{v}, \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Se \bar{v} è un autovettore, allora il numero λ è univocamente definito ed è detto *l'autovalore* di \bar{v} .

Si dimostrano facilmente i seguenti fatti.

Se \bar{v} è un autovettore con autovalore λ , allora ogni altro vettore del tipo $\mu \bar{v}$, con $\mu \neq 0$, è un autovettore con lo stesso autovalore λ . Chiamiamo *asse principale* la retta passante per $\bar{0} \in \bar{V}$ e generata da un autovettore \bar{v} .

Se \bar{u} e \bar{v} sono autovettori con lo stesso autovalore λ , allora ogni altro vettore non nullo del tipo $\mu \bar{u} + \nu \bar{v}$ è un autovettore con lo stesso autovalore λ .

Gli autovalori di \hat{f} sono le radici reali del *polinomio caratteristico* di grado n

$$\det(h_j^i - \lambda \delta_j^i) := a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0 = 0.$$

Dunque, per trovare gli autovalori e gli autovettori di \hat{f} occorre prima trovare le radici reali del polinomio caratteristico. Poi, per ogni radice reale λ , occorre trovare le soluzioni del sistema di n equazioni lineari nelle n incognite v^j

$$\sum_{1 \leq j \leq n} h_j^i v^j = \lambda v^i, \quad \text{con } i = 1, \dots, n.$$

I coefficienti del polinomio caratteristico sono *invarianti*, ossia non dipendono dalla base scelta.

Più precisamente, si può verificare che tali coefficienti sono dati dalla formula

$$a_h = (-1)^h \Delta_h, \quad 0 \leq h \leq n-1, \quad a_n = (-1)^n,$$

dove Δ_h è l'invariante di ordine h dell'endomorfismo \hat{f} .

In particolare, abbiamo

$$a_0 = \det \hat{f}, \quad \dots, \quad a_{n-1} = (-1)^{n-1} \text{tr} \hat{f}.$$

Se la dimensione dello spazio n è dispari, allora, per il teorema fondamentale dell'algebra, il polinomio caratteristico ha almeno una radice reale e quindi l'endomorfismo \hat{f} ha almeno un autovalore ed un autovettore.

Supponiamo ora che lo spazio vettoriale \bar{V} sia dotato di una metrica euclidea g .

1.2.17 Teorema (Teorema spettrale.). *Sia $\hat{f} \in \text{End}(\bar{V})$ un endomorfismo simmetrico.*

Allora esistono n autovalori reali ed è possibile trovare una base ortonormale di autovettori.

Più precisamente, se gli autovalori sono tutti distinti fra loro, allora esistono esattamente n assi principali e questi sono ortogonali tra loro.

Se due autovalori coincidono, allora i loro due assi principali generano un piano di assi principali corrispondenti allo stesso autovalore. Inoltre, gli assi principali relativi agli altri autovalori sono ortogonali a tale piano. \square

1.3 Trasformazioni ortogonali e rigide

Dedichiamo questa sezione allo studio delle trasformazioni ortogonali e rigide, come introduzione al successivo studio dei moti rigidi.

Per ragioni didattiche, ci limitiamo a considerare il caso di uno spazio vettoriale di dimensione 3.

Però, la maggior parte delle nozioni e dei risultati non dipendono dalla dimensione.

Consideriamo dunque uno spazio vettoriale euclideo $\bar{\mathbf{P}}$ di dimensione 3.

1.3.1 Trasformazioni ortogonali

Definiamo le trasformazioni ortogonali, studiamo le loro prime proprietà ed i criteri pratici che le caratterizzano.

1.3.1 Definizione. Una *trasformazione ortogonale* è definita come un'applicazione

$$\hat{f} : \bar{\mathbf{P}} \rightarrow \bar{\mathbf{P}}$$

che conserva i prodotti scalari, ossia tale che

$$\hat{f}(\bar{u}) \cdot \hat{f}(\bar{v}) = \bar{u} \cdot \bar{v}, \quad \forall \bar{u}, \bar{v} \in \bar{\mathbf{P}}. \square$$

1.3.2 Lemma. Ogni trasformazione ortogonale $\hat{f} : \bar{\mathbf{P}} \rightarrow \bar{\mathbf{P}}$ trasforma una base ortonormale $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ nella base ortonormale $(\hat{f}(\bar{e}_1), \hat{f}(\bar{e}_2), \hat{f}(\bar{e}_3))$.

DIMOSTRAZIONE. Segue immediatamente dal fatto che \hat{f} conserva i prodotti scalari. QED

1.3.3 Proposizione. Ogni trasformazione ortogonale $\hat{f} : \bar{\mathbf{P}} \rightarrow \bar{\mathbf{P}}$ è un'applicazione lineare.

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo una base ortonormale $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ ed un vettore $\bar{v} \in \bar{\mathbf{P}}$. Abbiamo

$$\bar{v} = \sum_i v^i \bar{e}_i, \quad \text{con} \quad v^i = \bar{v} \cdot \bar{e}_i$$

ed analogamente

$$\hat{f}(\bar{v}) = \sum_i (\hat{f}(\bar{v}))^i \hat{f}(\bar{e}_i), \quad \text{con} \quad (\hat{f}(\bar{v}))^i = \hat{f}(\bar{v}) \cdot \hat{f}(\bar{e}_i).$$

Perciò, possiamo scrivere

$$\hat{f}(\bar{v}) = \sum_i (\hat{f}(\bar{v}))^i \hat{f}(\bar{e}_i) = \sum_i (\hat{f}(\bar{v}) \cdot \hat{f}(\bar{e}_i)) \hat{f}(\bar{e}_i) = \sum_i (\bar{v} \cdot \bar{e}_i) \hat{f}(\bar{e}_i) = \sum_i v^i \hat{f}(\bar{e}_i).$$

Dunque, \hat{f} è lineare. QED

1.3.4 Proposizione. Consideriamo un'applicazione lineare $\hat{f} : \bar{\mathbf{P}} \rightarrow \bar{\mathbf{P}}$. Le seguenti tre condizioni sono equivalenti:

1) l'applicazione \hat{f} conserva i prodotti scalari, ossia

$$\hat{f}(\bar{u}) \cdot \hat{f}(\bar{v}) = \bar{u} \cdot \bar{v}, \quad \forall \bar{u}, \bar{v} \in \bar{\mathbf{P}};$$

2) l'applicazione \hat{f} conserva le lunghezze dei vettori, ossia

$$\|\hat{f}(\bar{u})\| = \|\bar{u}\|, \quad \forall \bar{u} \in \bar{\mathbf{P}};$$

3) l'applicazione \hat{f} conserva le lunghezze dei vettori unitari, ossia

$$\|\hat{f}(\bar{u})\| = \|\bar{u}\|, \quad \forall \bar{u} \in \bar{\mathbf{P}}, \text{ con } \|\bar{u}\| = 1.$$

DIMOSTRAZIONE. 1) \Rightarrow 2) per la definizione di norma:

$$\|\hat{f}(\bar{u})\| := \sqrt{\hat{f}(\bar{u}) \cdot \hat{f}(\bar{u})} = \sqrt{\bar{u} \cdot \bar{u}} := \|\bar{u}\|.$$

2) \Rightarrow 1) per il teorema di Carnot:

$$\begin{aligned} \hat{f}(\bar{u}) \cdot \hat{f}(\bar{v}) &= \frac{1}{2} (\|\hat{f}(\bar{u}) + \hat{f}(\bar{v})\|^2 - \|\hat{f}(\bar{u})\|^2 - \|\hat{f}(\bar{v})\|^2) \\ &= \frac{1}{2} (\|\hat{f}(\bar{u} + \bar{v})\|^2 - \|\hat{f}(\bar{u})\|^2 - \|\hat{f}(\bar{v})\|^2) \\ &= \frac{1}{2} (\|\bar{u} + \bar{v}\|^2 - \|\bar{u}\|^2 - \|\bar{v}\|^2) \\ &= \bar{u} \cdot \bar{v}. \end{aligned}$$

2) \Leftrightarrow 3) segue immediatamente da

$$\|\lambda \bar{u}\| = |\lambda| \|\bar{u}\|. \text{ QED}$$

1.3.5 Nota. Sia \hat{f} una trasformazione ortogonale. Se $\bar{u}, \bar{v} \in \bar{\mathbf{P}}$ sono due vettori ortogonali, allora anche i loro trasformati $\hat{f}(\bar{u}), \hat{f}(\bar{v}) \in \bar{\mathbf{P}}$ sono ortogonali.

E' questa propriet a l'origine del termine "trasformazione ortogonale".

Per , questa terminologia non deve trarre in inganno. Infatti, se una trasformazione \hat{f} conserva l'ortogonalit , non   detto che conservi tutti i prodotti scalari. Per esempio, l'applicazione $\hat{f} := \lambda \text{id}_{\bar{\mathbf{P}}}$, con $\pm 1 \neq \lambda \in \mathbb{R}$, conserva l'ortogonalit , ma non conserva tutti i prodotti scalari. \square

In pratica, per vedere se un'applicazione lineare   ortogonale conviene utilizzare uno dei due criteri seguenti.

1.3.6 Proposizione. [*Criterio della trasposta.*] Sia $\hat{f} : \bar{\mathbf{P}} \rightarrow \bar{\mathbf{P}}$ un'applicazione lineare. Allora le due condizioni seguenti sono equivalenti:

1) l'applicazione \hat{f} conserva i prodotti scalari, ossia

$$\hat{f}(\bar{u}) \cdot \hat{f}(\bar{v}) = \bar{u} \cdot \bar{v}, \quad \forall \bar{u}, \bar{v} \in \bar{\mathbf{P}};$$

2) l'applicazione \hat{f} è invertibile e l'inversa è uguale alla trasposta, ossia

$$\hat{f}^{-1} = \hat{f}^t.$$

DIMOSTRAZIONE. 1) \Rightarrow 2. Per 1) e per la definizione di trasposta, otteniamo, per ogni $\bar{u}, \bar{v} \in \bar{\mathbf{P}}$,

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = \hat{f}(\bar{u}) \cdot \hat{f}(\bar{v}) = \bar{u} \cdot \left(\hat{f}^t(\hat{f}(\bar{v})) \right),$$

la quale implica (dato che g è non degenere)

$$\hat{f}^t(\hat{f}(\bar{v})) = \bar{v}, \quad \forall \bar{v} \in \bar{\mathbf{P}}.$$

2) \Rightarrow 1. Per 2) e per la definizione di trasposta, otteniamo, per ogni $\bar{u}, \bar{v} \in \bar{\mathbf{P}}$,

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = \bar{u} \cdot \hat{f}^t(\hat{f}(\bar{v})) = \hat{f}(\bar{u}) \cdot \hat{f}(\bar{v}). \text{ QED}$$

Questo primo criterio mostra immediatamente anche delle interessanti proprietà delle trasformazioni ortogonali.

1.3.7 Corollario. Ogni trasformazione ortogonale $\hat{f} : \bar{\mathbf{P}} \rightarrow \bar{\mathbf{P}}$ è un isomorfismo lineare e l'inversa $\hat{f}^{-1} : \bar{\mathbf{P}} \rightarrow \bar{\mathbf{P}}$ è anche ortogonale.

DIMOSTRAZIONE. Per le proprietà della trasposizione metrica possiamo scrivere

$$(\hat{f}^{-1})^{-1} = \hat{f} \quad \text{e} \quad (\hat{f}^{-1})^t = (\hat{f}^t)^{-1} = (\hat{f}^{-1})^{-1} = \hat{f}.$$

Dunque, per il criterio della trasposta, \hat{f}^{-1} è una trasformazione ortogonale. QED

1.3.8 Corollario. Ogni trasformazione ortogonale $\hat{f} : \bar{\mathbf{P}} \rightarrow \bar{\mathbf{P}}$ ha determinante ± 1 , ossia

$$\det \hat{f} = \pm 1.$$

DIMOSTRAZIONE. Ricordando che $\det \hat{f}^t = \det \hat{f}$, otteniamo

$$1 = \det \text{id}_{\bar{\mathbf{P}}} = \det(\hat{f}^{-1} \circ \hat{f}) = \det(\hat{f}^t \circ \hat{f}) = \det(\hat{f} \circ \hat{f}) = \det(\hat{f}) \det(\hat{f}). \text{ QED}$$

La precedente proprietà ha un chiaro significato intuitivo. Infatti, il determinante di un endomorfismo \hat{f} è uguale al rapporto tra il volume orientato della base trasformata $(\hat{f}(e_1), \hat{f}(e_2), \hat{f}(e_3))$ ed il volume orientato della base originale $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$. Perciò, \hat{f} , conservando i prodotti scalari, conserva i volumi in valore assoluto, ma può eventualmente cambiare la loro orientazione.

1.3.9 Corollario. Se una trasformazione ortogonale $\hat{f} : \bar{\mathbf{P}} \rightarrow \bar{\mathbf{P}}$ ha un autovettore \bar{u} , allora il corrispondente autovalore è

$$\lambda = \pm 1.$$

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo

$$\bar{u} \cdot \bar{u} = \hat{f}(\bar{u}) \cdot \hat{f}(\bar{u}) = (\lambda \bar{u}) \cdot (\lambda \bar{u}) = \lambda^2 (\bar{u} \cdot \bar{u}). \text{ QED}$$

Abbiamo già visto che una trasformazione ortogonale trasforma una base ortonormale in una base ortonormale. Possiamo aggiungere che questa proprietà caratterizza le trasformazioni ortogonali.

1.3.10 Proposizione. [*Criterio della base ortonormale.*] Sia $\hat{f} : \bar{\mathcal{P}} \rightarrow \bar{\mathcal{P}}$ un'applicazione lineare e sia $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ una base ortonormale. Allora, le due condizioni seguenti sono equivalenti:

- 1) l'applicazione \hat{f} è ortogonale,
- 2) la terna di vettori $(\hat{f}(\bar{e}_1), \hat{f}(\bar{e}_2), \hat{f}(\bar{e}_3))$ è una base ortonormale.

DIMOSTRAZIONE. 1) \Rightarrow 2). E' già stato dimostrato e segue immediatamente dalla definizione di trasformazione ortogonale.

2) \Rightarrow 1). Per ogni $\bar{u}, \bar{v} \in \bar{\mathcal{P}}$, abbiamo

$$\hat{f}(\bar{u}) \cdot \hat{f}(\bar{v}) = \hat{f}\left(\sum_i u^i \bar{e}_i\right) \cdot \hat{f}\left(\sum_j v^j \bar{e}_j\right) = \sum_{i,j} u^i v^j (\hat{f}(\bar{e}_i) \cdot \hat{f}(\bar{e}_j)) = \sum_{i,j} u^i v^j \delta_{ij} = \bar{u} \cdot \bar{v}. \text{ QED}$$

1.3.11 Proposizione. La trasformazione $\text{id}_{\bar{\mathcal{P}}}$ è ortogonale. \square

1.3.12 Proposizione. Se $\hat{f} : \bar{\mathcal{P}} \rightarrow \bar{\mathcal{P}}$ e $\hat{g} : \bar{\mathcal{P}} \rightarrow \bar{\mathcal{P}}$ sono due trasformazioni ortogonali, allora la loro composizione

$$\hat{g} \circ \hat{f} : \bar{\mathcal{P}} \rightarrow \bar{\mathcal{P}}$$

è una trasformazione ortogonale.

DIMOSTRAZIONE. Infatti, abbiamo

$$(\hat{g} \circ \hat{f})^{-1} = \hat{f}^{-1} \circ \hat{g}^{-1} = \hat{f}^t \circ \hat{g}^t = (\hat{g} \circ \hat{f})^t. \text{ QED}$$

1.3.2 Classificazione delle trasformazioni ortogonali

Ci proponiamo ora di classificare tutte le trasformazioni ortogonali.

Incominciamo a studiare le trasformazioni ortogonali in uno spazio vettoriale euclideo di dimensione 2.

Sia $\bar{\mathcal{V}}$ uno spazio vettoriale euclideo di dimensione 2 e consideriamo una base ortonormale (\bar{e}_1, \bar{e}_2) .

1.3.13 Lemma. Ogni trasformazione ortogonale $\hat{f} : \bar{\mathbf{V}} \rightarrow \bar{\mathbf{V}}$ è rappresentata da una delle due seguenti matrici

$$(f_j^i) = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}, \quad (f_j^i) = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ \sin \phi & -\cos \phi \end{pmatrix}, \quad \text{con } 0 \leq \phi < 2\pi,$$

rispettivamente, secondo che

$$\det \hat{f} = 1, \quad \text{o} \quad \det \hat{f} = -1.$$

DIMOSTRAZIONE. Sia \hat{f} un'applicazione lineare e sia

$$\begin{pmatrix} f_1^1 & f_2^1 \\ f_1^2 & f_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Allora, per il criterio della trasposta, \hat{f} è una trasformazione ortogonale se e solo se

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

cioè se e solo se

$$a^2 + b^2 = 1, \quad 1)$$

$$c^2 + d^2 = 1, \quad 2)$$

$$ac + bd = 0. \quad 3)$$

Dunque, le matrici delle trasformazioni ortogonali sono date dalle soluzioni del precedente sistema di tre equazioni (non lineari) nelle quattro incognite $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Per le equazioni 3) ed 1) e le equazioni 3) e 2) otteniamo, rispettivamente,

$$\begin{aligned} a^2 c^2 = b^2 d^2 &\Rightarrow a^2 (1 - d^2) = (1 - a^2) d^2 &\Rightarrow a^2 = d^2 \\ a^2 c^2 = b^2 d^2 &\Rightarrow (1 - b^2) c^2 = b^2 (1 - c^2) &\Rightarrow c^2 = b^2. \end{aligned}$$

L'equazione 1) implica che a e b possono essere scritti nella forma $0 \leq \phi < 2\pi$, tale che

$$a = \cos \phi, \quad b = \pm \sin \phi, \quad \text{con } 0 \leq \phi < 2\pi.$$

Dunque, le equazioni 1), 2) e 3) implica che la matrice di \hat{f} va ricercata tra i due tipi

$$(f_j^i) = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}, \quad (f_j^i) = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ \sin \phi & -\cos \phi \end{pmatrix}, \quad \text{con } 0 \leq \phi < 2\pi.$$

Effettivamente, si verifica facilmente che entrambi questi due tipi di matrici soddisfano il richiesto criterio della trasposta. QED

1.3.14 Proposizione. Sia $\hat{f} : \bar{\mathbf{V}} \rightarrow \bar{\mathbf{V}}$ una trasformazione ortogonale a determinante 1, rappresentata quindi dalla matrice

$$(f_j^i) = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}, \quad \text{con } 0 \leq \phi < 2\pi.$$

Allora, \hat{f} ha autovalori reali se e solo se $\phi = 0$ o $\phi = \pi$.

Nel primo caso, entrambi gli autovalori sono uguali a 1, e quindi $\hat{f} = \text{id}_{\bar{V}}$.

Nel secondo caso, entrambi gli autovalori sono uguali a -1, e quindi $\hat{f} = -\text{id}_{\bar{V}}$. \square

Possiamo anche studiare le trasformazioni ortogonali a determinante -1.

1.3.15 Nota. Sia $\hat{f} : \bar{V} \rightarrow \bar{V}$ una trasformazione ortogonale a determinante -1, rappresentata quindi dalla matrice

$$(f_j^i) = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ \sin \phi & -\cos \phi \end{pmatrix}, \quad \text{con } 0 \leq \phi < 2\pi.$$

Allora, \hat{f} è un endomorfismo simmetrico e quindi ha autovalori reali $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -1$.

Possono verificarsi i seguenti tre casi, relativamente alla base ortonormale scelta.

1) Se $\phi = 0$, allora \hat{f} ha autovalore 1 con autovettore \bar{e}_1 ed autovalore -1 con autovettore \bar{e}_2 .

2) Se $\phi = \pi$, allora \hat{f} ha autovalore 1 con autovettore \bar{e}_2 ed autovalore -1 con autovettore \bar{e}_1 .

3) Se $\phi \neq 0, \pi$, allora \hat{f} ha autovalore 1 con autovettore $-\sin \phi \bar{e}_1 + (\cos \phi - 1) \bar{e}_2$ ed autovalore -1 con autovettore $-\sin \phi \bar{e}_1 + (\cos \phi + 1) \bar{e}_2$. \square

1.3.16 Definizione. Una trasformazione ortogonale $\hat{f} : \bar{V} \rightarrow \bar{V}$ a determinante 1 è detta una *rotazione* del piano \bar{V} . \square

1.3.17 Proposizione. Sia $\hat{f} : \bar{V} \rightarrow \bar{V}$ una trasformazione ortogonale a determinante -1.

Allora, \hat{f} ha due assi principali ortogonali r_+ ed r_- con autovalore, rispettivamente, $\lambda_+ = 1$ e $\lambda_- = -1$.

Inoltre, \hat{f} è una simmetria rispetto all'asse principale r_+ .

Ossia, per ogni $\bar{u} = \bar{u}_+ + \bar{u}_- \in \bar{V}$, indicando con \bar{u}_+ e \bar{u}_- le componenti di \bar{u} parallela ad r_+ e parallela ad r_- , abbiamo

$$\hat{f} : \bar{u} \mapsto \bar{u}_+ - \bar{u}_-. \quad \square$$

Possiamo ora classificare le trasformazioni ortogonali di \bar{P} .

1.3.18 Lemma. Sia $\hat{f} : \bar{P} \rightarrow \bar{P}$ una trasformazione ortogonale.

Allora \hat{f} ha almeno un asse principale con autovalore $\lambda = \pm 1$.

Più precisamente, possono capitare solo i seguenti tre casi:

- 1) esiste un solo asse principale con autovalore $\lambda = \pm 1$;
- 2) esiste un asse principale con autovalore $\lambda_1 = \pm 1$ e tutti gli assi ortogonali a questo sono principali con lo stesso autovalore $\lambda_2 = -\lambda_1 = \mp 1$;
- 3) tutti gli assi sono principali con lo stesso autovalore $\lambda = \pm 1$.

DIMOSTRAZIONE. Infatti, per il teorema fondamentale dell'algebra, il polinomio caratteristico di \hat{f} è di terzo grado (dispari) e, perciò ha almeno una radice reale, che, per quanto visto precedentemente, è uguale a ± 1 .

Inoltre, la discussione dei tre casi si ottiene facilmente considerando il fatto che gli autovalori possibili sono $\lambda = \pm 1$. QED

1.3.19 Lemma. Sia $\hat{f} : \bar{\mathbf{P}} \rightarrow \bar{\mathbf{P}}$ una trasformazione ortogonale, r un suo asse principale (il cui autovalore è ± 1) e π il piano ortogonale ad r .

Allora, \hat{f} trasforma il piano π in sé stesso e la restrizione $\hat{f}^\perp : \pi \rightarrow \pi$ di \hat{f} a π è ancora una trasformazione ortogonale.

DIMOSTRAZIONE. Sia $0 \neq \bar{u} \in r$. Se $\bar{v} \in \pi$, allora

$$\hat{f}(\bar{v}) \in \pi,$$

perché

$$\hat{f}(\bar{v}) \cdot \hat{f}(\bar{u}) = \bar{v} \cdot \bar{u} = 0.$$

Dunque, \hat{f} si restringe ad un'applicazione $\hat{f}^\perp : \pi \rightarrow \pi$. Ovviamente, \hat{f}^\perp conserva i prodotti scalari perché \hat{f} conserva i prodotti scalari.

Dunque, \hat{f} risulta decomposto nella somma diretta

$$\hat{f} = \pm \text{id}_r \oplus \hat{f}^\perp.$$

In altre parole, per ogni $\bar{u} \in \bar{\mathbf{P}}$, indicando con $\bar{u}^\parallel \in r$ e $\bar{u}^\perp \in \pi$ le componenti di \bar{u} relative ad r ed a π , abbiamo

$$\hat{f}(\bar{u}) = \pm \bar{u}^\parallel + \hat{f}^\perp(\bar{u}^\perp). \text{ QED}$$

Pertanto, lo studio delle trasformazioni ortogonali di $\bar{\mathbf{P}}$ è rimandato allo studio delle trasformazioni ortogonali di π .

1.3.20 Teorema. Sia $\hat{f} : \bar{\mathbf{P}} \rightarrow \bar{\mathbf{P}}$ una trasformazione ortogonale.

1) Se $\det \hat{f} = 1$, allora esiste almeno un autovalore $\lambda = 1$, corrispondente ad un asse principale r .

Pertanto, per ogni $\bar{u} = \bar{u}^\parallel + \bar{u}^\perp \in \bar{\mathbf{P}}$, indicando con $\bar{u}^\parallel \in r$ e $\bar{u}^\perp \in \pi$ le componenti di \bar{u} relative ad r ed a π , abbiamo

$$\hat{f}(\bar{u}) = \bar{u}^\parallel + \hat{f}^\perp(\bar{u}^\perp),$$

dove \hat{f}^\perp è una rotazione del piano π .

2) Se $\det \hat{f} = -1$, allora esiste almeno un autovalore $\lambda = -1$, corrispondente ad un asse principale r .

Pertanto, per ogni $\bar{u} = \bar{u}^\parallel + \bar{u}^\perp \in \bar{\mathbf{P}}$, indicando con $\bar{u}^\parallel \in r$ e $\bar{u}^\perp \in \pi$ le componenti di \bar{u} relative ad r ed a π , abbiamo

$$\hat{f}(\bar{u}) = -\bar{u}^\parallel + \hat{f}^\perp(\bar{u}^\perp),$$

dove \hat{f}^\perp è una rotazione del piano π .

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo successivamente i due casi.

1) Sia $\det \hat{f} = 1$.

Se abbiamo un autovalore $\lambda_1 = -1$, corrispondente ad un asse principale r_1 , allora la restrizione \hat{f}^\perp al piano ortogonale ha determinante -1 e perciò ha un autovalore $\lambda_2 = 1$, che è anche un autovalore di \hat{f} . Dunque, \hat{f} ha almeno un autovalore $\lambda = 1$ corrispondente ad un asse principale r .

Allora, la restrizione \hat{f}^\perp al piano π ortogonale ad r ha determinante 1 e perciò è una rotazione.

2) Sia $\det \hat{f} = -1$.

Se abbiamo un autovalore $\lambda_1 = 1$, corrispondente ad un asse principale r_1 , allora la restrizione \hat{f}^\perp al piano ortogonale ha determinante -1 e perciò ha un autovalore $\lambda_2 = -1$, che è anche un autovalore di \hat{f} . Dunque, \hat{f} ha almeno un autovalore $\lambda = -1$ corrispondente ad un asse principale r .

Allora, la restrizione \hat{f}^\perp al piano π ortogonale ad r ha determinante 1 e perciò è una rotazione. QED

1.3.21 Definizione. Una trasformazione ortogonale $\hat{f} : \bar{\mathbf{P}} \rightarrow \bar{\mathbf{P}}$ a determinante 1, con asse principale r corrispondente all'autovalore $\lambda = 1$, è detta una *rotazione con asse di rotazione r* . \square

Possiamo anche studiare le trasformazioni ortogonali riferendoci ad una base ortonormale tale che \bar{e}_3 sia un autovettore.

1.3.22 Nota. Sia $\hat{f} : \bar{\mathbf{P}} \rightarrow \bar{\mathbf{P}}$ una trasformazione ortogonale.

1) Se $\det \hat{f} = 1$, allora \hat{f} è rappresentata da una delle seguenti matrici

$$\begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{o} \quad \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ \sin \phi & -\cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

2) Se $\det \hat{f} = -1$, allora \hat{f} è rappresentata da una delle seguenti matrici

$$\begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ \sin \phi & -\cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{o} \quad \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad \square$$

1.3.23 Nota. Le trasformazioni ortogonali hanno 3 gradi di libertà, di cui 2 sono dovuti alla scelta dell'asse principale ed 1 alla rotazione intorno a tale asse. \square

1.3.3 Trasformazioni rigide

Studiamo ora le trasformazioni rigide di uno spazio affine euclideo in se stesso.

Per ragioni didattiche, ci limitiamo a considerare il caso di uno spazio affine di dimensione 3.

Però, la maggior parte delle nozioni e dei risultati non dipendono dalla dimensione.

Consideriamo dunque uno spazio affine euclideo \mathbf{P} di dimensione 3.

1.3.24 Definizione. Definiamo *trasformazione rigida* di \mathbf{P} un'applicazione

$$f : \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P},$$

che conserva le distanze tra i punti, ossia tale che

$$\|(f(q) - f(p))\| = \|(q - p)\|, \quad \forall p, q \in \mathbf{P}. \square$$

Cerchiamo ora la più generale espressione di una trasformazione rigida.

1.3.25 Lemma. Sia $f : \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P}$ un'applicazione del tipo

$$f(p) = f(o) + \bar{f}(p - o), \quad \forall p \in \mathbf{P},$$

dove $o \in \mathbf{P}$ è un punto fissato ed

$$\bar{f} : \bar{\mathbf{P}} \rightarrow \bar{\mathbf{P}}$$

è un'applicazione lineare. Allora, \bar{f} non dipende dalla scelta del punto o .

Ossia, per ogni altro punto o' , possiamo scrivere

$$f(p) = f(o') + \bar{f}(p - o'), \quad \forall p \in \mathbf{P},$$

DIMOSTRAZIONE. Per l'ipotesi, abbiamo

$$f(o') = f(o) + \bar{f}(o' - o).$$

Dunque, tenendo conto di questa uguaglianza e della linearità di \bar{f} , otteniamo

$$\begin{aligned} f(p) &= f(o) + \bar{f}(p - o) \\ &= f(o') - \bar{f}(o' - o) + \bar{f}(p - o) \\ &= f(o') + \bar{f}((p - o) - (o' - o)) \\ &= f(o') + \bar{f}(p - o'). \text{ QED} \end{aligned}$$

1.3.26 Proposizione. Le trasformazioni rigide di \mathbf{P} sono le applicazioni del tipo

$$f(p) = f(o) + \hat{\mathcal{R}}(p - o), \quad \forall p \in \mathbf{P},$$

dove $o \in \mathbf{P}$ è un punto qualunque di \mathbf{P} ed

$$\hat{\mathcal{R}} : \bar{\mathbf{P}} \rightarrow \bar{\mathbf{P}}$$

è un'applicazione ortogonale, che non dipende da o .

DIMOSTRAZIONE. 1) Supponiamo che f sia rigida. Scegliamo un punto $o \in \mathbf{P}$ e definiamo l'applicazione

$$\hat{\mathcal{R}}(o) : \bar{\mathbf{P}} \rightarrow \bar{\mathbf{P}} : \bar{h} \mapsto f(o + \bar{h}) - f(o).$$

Dato che l'applicazione f è rigida, otteniamo

$$\begin{aligned}\|\hat{\mathcal{R}}(o)(\bar{h})\|^2 &:= \|f(o + \bar{h}) - f(o)\|^2 \\ &= \|o + \bar{h} - o\|^2 \\ &= \|\bar{h}\|^2\end{aligned}$$

e perciò l'applicazione $\hat{\mathcal{R}}(o)$ risulta essere ortogonale.

Dunque, possiamo scrivere

$$f(p) = f(o) + \hat{\mathcal{R}}(o)(p - o), \quad \forall p \in \mathbf{P},$$

dove $\hat{\mathcal{R}}(o) : \bar{\mathbf{P}} \rightarrow \bar{\mathbf{P}}$ è un'applicazione ortogonale.

Inoltre, $\hat{\mathcal{R}}(o)$ non dipende dalla scelta del punto $o \in \mathbf{P}$ per il Lemma precedente.

2) Supponiamo che f sia del tipo

$$f(p) = f(o) + \hat{\mathcal{R}}(p - o), \quad \forall p \in \mathbf{P},$$

dove $o \in \mathbf{P}$ è un punto qualunque di \mathbf{P} ed $\hat{\mathcal{R}} : \bar{\mathbf{P}} \rightarrow \bar{\mathbf{P}}$ è un'applicazione ortogonale.

Allora, tenendo conto della linearità ed ortogonalità di $\hat{\mathcal{R}}$, otteniamo

$$\begin{aligned}\|f(q) - f(p)\| &= \|(f(o) + \hat{\mathcal{R}}(q - o)) - (f(o) + \hat{\mathcal{R}}(p - o))\| \\ &= \|\hat{\mathcal{R}}(q - o) - \hat{\mathcal{R}}(p - o)\| \\ &= \|\hat{\mathcal{R}}(q - p)\| \\ &= \|q - p\|.\end{aligned}$$

Quindi, f è rigida. QED

Dunque, una trasformazione rigida è caratterizzata dallo spostamento di un punto (comunque scelto), che chiameremo “polo” (sul quale non è imposta nessuna condizione) e da una trasformazione ortogonale, che non dipende dalla scelta del polo.

Dunque, le trasformazioni rigide hanno solamente 6 gradi di libertà, di cui 3 dovuti allo spostamento del polo e 3 alla trasformazione ortogonale (mentre una qualunque trasformazione di \mathbf{P} senza vincoli ha infiniti gradi di libertà).

1.3.27 Nota. Un'applicazione $f : \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P}$ conserva le distanze se e solo se conserva i prodotti scalari, ossia le due condizioni seguenti sono equivalenti:

$$1) \quad \|(f(q) - f(p))\| = \|(q - p)\|, \quad \forall p, q \in \mathbf{P},$$

$$2) \quad (f(p + \bar{h}) - f(p)) \cdot (f(p + \bar{k}) - f(p)) = \bar{h} \cdot \bar{k}, \quad \forall p \in \mathbf{P}, \forall \bar{h}, \bar{k} \in \bar{\mathbf{P}}.$$

DIMOSTRAZIONE. Dimostriamo le due implicazioni.

1) \Rightarrow 2). Tenendo conto successivamente della bilinearità del prodotto scalare e di 1), abbiamo

$$\begin{aligned}
 & 2(f(p + \bar{h}) - f(p)) \cdot (f(p + \bar{k}) - f(p)) = \\
 & = -(f(p + \bar{h}) - f(p) - f(p + \bar{k}) + f(p))^2 + (f(p + \bar{h}) - f(p))^2 + (f(p + \bar{k}) - f(p))^2 \\
 & = -(f(p + \bar{h}) - f(p + \bar{k}))^2 + (f(p + \bar{h}) - f(p))^2 + (f(p + \bar{k}) - f(p))^2 \\
 & = -((p + \bar{h}) - (p + \bar{k}))^2 + ((p + \bar{h}) - p)^2 + ((p + \bar{k}) - p)^2 \\
 & = -(\bar{h} - \bar{k})^2 + \bar{h}^2 + \bar{k}^2 \\
 & = 2\bar{h} \cdot \bar{k}.
 \end{aligned}$$

2) \Rightarrow 1). Per 2), abbiamo

$$\begin{aligned}
 \|f(q) - f(p)\|^2 & \equiv \|f(p + (q - p)) - f(p)\|^2 \\
 & := (f(p + (q - p)) - f(p)) \cdot (f(p + (q - p)) - p) \\
 & = ((p + (q - p)) - p) \cdot ((p + (q - p)) - p) \\
 & = (q - p) \cdot (q - p) \\
 & := \|q - p\|^2. \text{ QED}
 \end{aligned}$$

1.4 Tensori

Le applicazioni lineari e multilineari sono molto importanti per descrivere tanti fenomeni fisici. Esse potrebbero essere sostanzialmente sufficienti per i nostri scopi.

Tuttavia, è anche conveniente e tradizionale utilizzare la notazione tensoriale che è adeguata ad esprimere ed unificare formalmente varie proprietà algebriche delle applicazioni lineari e multilineari. Per esempio, abbiamo già incontrato un'utile notazione di tipo tensoriale per indicare le basi dello spazio degli endomorfismi e dello spazio delle forme bilineari indotte da una base dello spazio vettoriale.

Accenniamo qui ad una trattazione più sistematica di tale notazione tensoriale.

Questo argomento di natura tecnica è piuttosto formale ed astratto. In questo capitolo, per ragioni di chiarezza espositiva, discutiamo anche aspetti non strettamente essenziali ai fini del Corso. È inteso che fanno parte del Programma del Corso solo quelle nozioni essenziali che vengono usate esplicitamente nel seguito. Il resto va inteso come materiale per una possibile consultazione da parte di chi vuole comprendere meglio questo argomento.

1.4.1 Prodotto tensoriale

Introduciamo il prodotto tensoriale di due o più spazi vettoriali. Qui diamo una definizione un po' semplicata di prodotto tensoriale: una definizione più rigorosa coinvolgerebbe un formalismo astratto che va oltre le possibilità di questo corso.

In particolare, consideriamo i prodotti tensoriali di uno spazio vettoriale e del suo duale.

Consideriamo due spazi vettoriali \bar{U} e \bar{V} .

1.4.1 Definizione. Definiamo *prodotto tensoriale* l'insieme $\bar{U} \otimes \bar{V}$, costituito da tutte le combinazioni formali del tipo

$$\bar{t} := \sum_{i,j} t^{ij} \bar{u}_i \otimes \bar{v}_j, \quad \text{con} \quad t^{ij} \in \mathbb{R}, \quad \bar{u}_i \in \bar{U}, \quad \bar{v}_j \in \bar{V},$$

nel quale definiamo le operazioni formali di addizione e di moltiplicazione per gli scalari in modo naturale ed imponiamo le identità del tipo

$$\begin{aligned} (\bar{u} + \bar{u}') \otimes \bar{v} &= \bar{u} \otimes \bar{v} + \bar{u}' \otimes \bar{v}, & \bar{u} \otimes (\bar{v} + \bar{v}') &= \bar{u} \otimes \bar{v} + \bar{u} \otimes \bar{v}', \\ (\lambda \bar{u}) \otimes \bar{v} &= \lambda \bar{u} \otimes \bar{v}, & \bar{u} \otimes (\lambda \bar{v}) &= \lambda \bar{u} \otimes \bar{v}, \end{aligned}$$

per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ ed $\bar{u}, \bar{u}' \in \bar{U}$ e $\bar{v}, \bar{v}' \in \bar{V}$.

Gli elementi \bar{t} di $\bar{U} \otimes \bar{V}$ sono detti *tensori*.

Gli elementi $\bar{t} \in \bar{\mathbf{U}} \otimes \bar{\mathbf{V}}$ del tipo $\bar{t} = \bar{u} \otimes \bar{v}$, con $\bar{u} \in \bar{\mathbf{U}}$, $\bar{v} \in \bar{\mathbf{V}}$, ossia gli elementi $\bar{t} \in \bar{\mathbf{U}} \otimes \bar{\mathbf{V}}$ che sono espressi come somma di un un solo termine con coefficiente 1, sono detti *decomponibili*. \square

1.4.2 Proposizione. Il prodotto tensoriale $\bar{\mathbf{U}} \otimes \bar{\mathbf{V}}$ è uno spazio vettoriale e l'applicazione

$$\otimes : \bar{\mathbf{U}} \times \bar{\mathbf{V}} \rightarrow \bar{\mathbf{U}} \otimes \bar{\mathbf{V}} : (\bar{u}, \bar{v}) \mapsto \bar{u} \otimes \bar{v}$$

è bilineare.

Se $\bar{\mathbf{U}}$ e $\bar{\mathbf{V}}$ hanno dimensione m ed n , rispettivamente, allora $\bar{\mathbf{U}} \otimes \bar{\mathbf{V}}$ ha dimensione mn .

Inoltre, se $\mathcal{B} = (\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_m)$ è una base di $\bar{\mathbf{U}}$ e $\mathcal{C} = (\bar{c}_1, \dots, \bar{c}_n)$ è una base di $\bar{\mathbf{V}}$, allora

$$\mathcal{B} \otimes \mathcal{C} := (\bar{b}_1 \otimes \bar{c}_1, \dots, \bar{b}_i \otimes \bar{c}_j, \dots, \bar{b}_m \otimes \bar{c}_n)$$

è una base di $\bar{\mathbf{U}} \otimes \bar{\mathbf{V}}$.

Perciò, ogni tensore $\bar{t} \in \bar{\mathbf{U}} \otimes \bar{\mathbf{V}}$ si può esprimere in uno ed in un solo modo come combinazione lineare del tipo

$$\bar{t} = \sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} t^{ij} \bar{b}_i \otimes \bar{c}_j.$$

DIMOSTRAZIONE. È facile dimostrare che lo spazio $\bar{\mathbf{U}} \otimes \bar{\mathbf{V}}$ è uno spazio vettoriale e che l'applicazione \otimes è bilineare.

Omettiamo la dimostrazione del fatto che il prodotto tensoriale di due basi è una base. QED

Possiamo generalizzare facilmente la nozione di prodotto tensoriale al caso di più di due spazi vettoriali.

Per esempio, possiamo definire il prodotto tensoriale di ordine r dello spazio vettoriale $\bar{\mathbf{U}}$ (ossia il prodotto tensoriale di r fattori uguali a $\bar{\mathbf{U}}$)

$$\otimes^r \bar{\mathbf{U}} := \bar{\mathbf{U}} \otimes \dots \otimes \bar{\mathbf{U}}.$$

Inoltre, possiamo definire i prodotti tensoriali del tipo

$$(\otimes^p \bar{\mathbf{V}}^*) \otimes (\otimes^q \bar{\mathbf{V}}) := (\bar{\mathbf{V}}^* \otimes \dots \otimes \bar{\mathbf{V}}^*) \otimes (\bar{\mathbf{V}} \otimes \dots \otimes \bar{\mathbf{V}}),$$

in cui il fattore $\bar{\mathbf{V}}^*$ è ripetuto p volte ed il fattore $\bar{\mathbf{V}}$ è ripetuto q volte. Diciamo che gli elementi di tale spazio sono di *ordine* (p, q) .

I tensori di ordine $(p, 0)$ sono detti *covarianti* e quelli di ordine $(0, q)$ sono detti *controvarianti*.

Poniamo anche

$$\begin{aligned} \otimes^0 \bar{\mathbf{V}} &= \mathbb{R}, & \otimes^0 \bar{\mathbf{V}}^* &= \mathbb{R}, \\ \otimes^1 \bar{\mathbf{V}} &= \bar{\mathbf{V}}, & \otimes^1 \bar{\mathbf{V}}^* &= \bar{\mathbf{V}}^*. \end{aligned}$$

Supponiamo che $\dim \bar{\mathbf{V}} = n$.

Con riferimento ad una base $(\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n)$ di $\bar{\mathbf{V}}$ ed alla sua duale $(\underline{\beta}^1, \dots, \underline{\beta}^n)$, gli elementi $\bar{t} \in \otimes^p \bar{\mathbf{V}}$ e $\underline{t} \in \otimes^p \bar{\mathbf{V}}^*$ hanno espressioni del tipo

$$\bar{t} = \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_p \leq n} t^{i_1, \dots, i_p} \bar{b}_{i_1} \otimes \dots \otimes \bar{b}_{i_p} \quad \text{e} \quad \underline{t} = \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_p \leq n} t_{i_1, \dots, i_p} \underline{\beta}^{i_1} \otimes \dots \otimes \underline{\beta}^{i_p}.$$

Abbiamo $\dim \otimes^p \bar{\mathbf{V}} = \dim \otimes^p \bar{\mathbf{V}}^* = n^p$.

1.4.2 Tensori simmetrici ed antisimmetrici

Consideriamo uno spazio vettoriale $\bar{\mathbf{V}}$ di dimensione n ed una base $(\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n) \subset \bar{\mathbf{V}}$.

1.4.3 Definizione. Un tensore

$$\bar{t} = \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_p \leq v} t^{i_1, \dots, i_p} \bar{b}_{i_1} \otimes \dots \otimes \bar{b}_{i_p} \in \otimes^p \bar{\mathbf{V}}$$

è detto

- *simmetrico* se è invariante rispetto allo scambio di due indici qualunque,
- *antisimmetrico* se cambia di segno scambiando due indici qualunque.

Indichiamo con

$$S^p \bar{\mathbf{V}} \subset \otimes^p \bar{\mathbf{V}} \quad \text{e} \quad \Lambda^p \bar{\mathbf{V}} \subset \otimes^p \bar{\mathbf{V}}$$

i sottinsiemi costituiti, rispettivamente, dai tensori simmetrici ed antisimmetrici di ordine p . \square

In particolare abbiamo

$$S^0 \bar{\mathbf{V}} := \mathbb{R}, \quad \Lambda^0 \bar{\mathbf{V}} := \mathbb{R}, \quad S^1 \bar{\mathbf{V}} = \bar{\mathbf{V}}, \quad \Lambda^1 \bar{\mathbf{V}} = \bar{\mathbf{V}}.$$

1.4.4 Nota. Consideriamo un tensore $\bar{t} \in \otimes^p \bar{\mathbf{V}}$. Allora valgono i seguenti fatti.

Il tensore \bar{t} è simmetrico se e solo se, per ogni permutazione σ dell'insieme ordinato $(1, \dots, p)$, abbiamo

$$\sum_{1 \leq i_1, \dots, i_p \leq v} t^{i_1, \dots, i_p} \bar{b}_{i_1} \otimes \dots \otimes \bar{b}_{i_p} = \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_p \leq v} t^{i_1, \dots, i_p} \bar{b}_{i_{\sigma(1)}} \otimes \dots \otimes \bar{b}_{i_{\sigma(p)}},$$

ossia

$$t^{i_1, \dots, i_p} = t^{i_{\sigma(1)}, \dots, i_{\sigma(p)}}.$$

Il tensore \bar{t} è antisimmetrico se e solo se, per ogni permutazione σ dell'insieme ordinato $(1, \dots, p)$, abbiamo

$$\sum_{1 \leq i_1, \dots, i_p \leq v} t^{i_1, \dots, i_p} \bar{b}_{i_1} \otimes \dots \otimes \bar{b}_{i_p} = \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_p \leq v} |\sigma| t^{i_1, \dots, i_p} \bar{b}_{i_{\sigma(1)}} \otimes \dots \otimes \bar{b}_{i_{\sigma(p)}},$$

ossia

$$t^{i_1 \dots i_p} = |\sigma| t^{i_{\sigma(1)} \dots i_{\sigma(p)}},$$

dove $|\sigma|$ indica il segno della permutazione σ .

In altre parole, se il tensore \bar{t} è antisimmetrico, allora tutte le componenti che hanno due indici uguali sono nulle. \square

1.4.5 Proposizione. I sottinsiemi $S^p \bar{\mathbf{V}} \subset \otimes^p \bar{\mathbf{V}}$ e $\Lambda^p \bar{\mathbf{V}} \subset \otimes^p \bar{\mathbf{V}}$ sono due sotto spazi vettoriali.

In altre parole, la somma di due tensori simmetrici è un tensore simmetrico ed il prodotto di un numero reale per un tensore simmetrico è un tensore simmetrico, ed analogamente, la somma di due tensori antisimmetrici è un tensore antisimmetrico ed il prodotto di un numero reale per un tensore antisimmetrico è un tensore antisimmetrico; inoltre, il tensore nullo è sia simmetrico che antisimmetrico.

Abbiamo

$$\dim S^p \bar{\mathbf{V}} = C(n, p) \quad \text{e} \quad \dim \Lambda^p \bar{\mathbf{V}} = \binom{n}{p},$$

dove $C(n, p)$ è il numero delle combinazioni con ripetizione di n elementi a p alla volta e $\binom{n}{p}$ è il numero delle disposizioni di n elementi a p alla volta.

In particolare, abbiamo

$$\dim S^0 \bar{\mathbf{V}} \equiv \dim \mathbb{R} = 1, \quad \dim S^1 \bar{\mathbf{V}} \equiv \dim \mathbf{V} = n, \quad \dim S^2 \bar{\mathbf{V}} = \frac{1}{2} n(n+1),$$

e

$$\begin{aligned} \dim \Lambda^0 \bar{\mathbf{V}} &= 1, & \dim \Lambda^1 \bar{\mathbf{V}} &= n, \\ \dim \Lambda^n \bar{\mathbf{V}} &= 1, & \dim \Lambda^{n-1} \bar{\mathbf{V}} &= n. \end{aligned}$$

Inoltre, i tensori antisimmetrici di ordine $p > n$ sono tutti nulli. \square

1.4.6 Proposizione. Esistono due proiezioni lineari naturali che mandano tensori qualunque in tensori simmetrici ed antisimmetrici, rispettivamente,

$$\text{Sim} : \otimes^p \bar{\mathbf{V}} \rightarrow S^p \bar{\mathbf{V}} : \bar{t} \mapsto \text{Sim } \bar{t} \quad \text{e} \quad \text{Ant} : \otimes^p \bar{\mathbf{V}} \rightarrow \Lambda^p \bar{\mathbf{V}} : \bar{t} \mapsto \text{Ant } \bar{t},$$

le quali sono caratterizzate, rispettivamente, dalle formule

$$\begin{aligned} \text{Sim} : \bar{v}_1 \otimes \dots \otimes \bar{v}_p &\mapsto \frac{1}{p!} \sum_{\sigma} \bar{v}_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes \bar{v}_{\sigma(p)} \\ \text{Ant} : \bar{v}_1 \otimes \dots \otimes \bar{v}_p &\mapsto \frac{1}{p!} \sum_{\sigma} |\sigma| \bar{v}_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes \bar{v}_{\sigma(p)}, \end{aligned}$$

dove σ indica le permutazioni dell'insieme ordinato degli indici $(1, \dots, p)$, $p!$ è il numero delle permutazioni di tale insieme e $|\sigma|$ è il segno della permutazione σ .

Naturalmente, valgono le seguenti proprietà:

se $\bar{t} \in \otimes^p \bar{\mathbf{V}}$ è simmetrico, allora $\text{Sim } \bar{t} = \bar{t}$ e $\text{Ant } \bar{t} = 0$,
 se $\bar{t} \in \otimes^p \bar{\mathbf{V}}$ è antisimmetrico, allora $\text{Ant } \bar{t} = \bar{t}$ e $\text{Sim } \bar{t} = 0$. \square

1.4.7 Esempio. Consideriamo il caso $p = 2$ ed un tensore $\bar{t} = \sum_{ij} t^{ij} \bar{b}_i \otimes \bar{b}_j$.
 Il tensore \bar{t} è simmetrico se $t^{ij} = t^{ji}$ ed è antisimmetrico se $t^{ij} = -t^{ji}$.
 Il simmetrizzato del tensore \bar{t} è

$$\text{Sim } \bar{t} = \frac{1}{2} \sum_{ij} (t^{ij} + t^{ji}) \bar{b}_i \otimes \bar{b}_j = \frac{1}{2} \sum_{ij} t^{ij} (\bar{b}_i \otimes \bar{b}_j + \bar{b}_j \otimes \bar{b}_i).$$

L'antisimmetrizzato del tensore \bar{t} è

$$\text{Ant } \bar{t} = \frac{1}{2} \sum_{ij} (t^{ij} - t^{ji}) \bar{b}_i \otimes \bar{b}_j = \frac{1}{2} \sum_{ij} t^{ij} (\bar{b}_i \otimes \bar{b}_j - \bar{b}_j \otimes \bar{b}_i).$$

Inoltre vale la seguente uguaglianza (solo per il caso $p = 2$):

$$\bar{t} = \text{Sim } \bar{t} + \text{Ant } \bar{t}.$$

Abbiamo

$$\dim S^2 \bar{\mathbf{V}} = n + \frac{1}{2} (n^2 - n) = \frac{1}{2} n (n + 1), \quad \dim \Lambda^2 \bar{\mathbf{V}} = \frac{1}{2} n (n - 1).$$

In particolare, se $n = \dim \bar{\mathbf{V}} = 3$, allora abbiamo

$$\dim S^2 \bar{\mathbf{V}} = 6, \quad \dim \Lambda^2 \bar{\mathbf{V}} = 3. \square$$

I tensori antisimmetrici giocano un ruolo importante geometrico perché permettono di esprimere i determinanti ed i volumi. Conseguentemente, i tensori antisimmetrici sono coinvolti nell'espressione di alcuni operatori differenziali (per esempio del rotore). È utile discutere ulteriormente i tensori antisimmetrici ed introdurre alcuni simboli specifici.

1.4.8 Definizione. Definiamo *prodotto esterno* di p vettori $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_p \in \bar{\mathbf{V}}$ il tensore antisimmetrico

$$\bar{v}_1 \wedge \dots \wedge \bar{v}_p := \frac{1}{p!} \sum_{\sigma} |\sigma| \bar{v}_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge \bar{v}_{\sigma(p)} \in \Lambda^p \bar{\mathbf{V}}. \square$$

1.4.9 Proposizione. Il sottinsieme di $\binom{n}{p}$ tensori antisimmetrici

$$(\bar{b}_{i_1} \wedge \dots \wedge \bar{b}_{i_p}) \subset \Lambda^p \bar{\mathbf{V}}, \quad \text{con} \quad 1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n,$$

è una base di $\Lambda^p \bar{\mathbf{V}}$. \square

1.4.10 Esempio. Supponiamo che $n = \dim \bar{\mathbf{V}} = 3$. Allora,

$$\begin{aligned} \text{per } p = 1, & \quad (\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n) && \text{è una base di } \Lambda^1 \bar{\mathbf{V}} = \bar{\mathbf{V}}; \\ \text{per } p = 2, & \quad (\bar{b}_1 \wedge \bar{b}_2, \bar{b}_1 \wedge \bar{b}_3, \bar{b}_2 \wedge \bar{b}_3) && \text{è una base di } \Lambda^2 \bar{\mathbf{V}}; \\ \text{per } p = 3, & \quad (\bar{b}_1 \wedge \bar{b}_2 \wedge \bar{b}_3) && \text{è una base di } \Lambda^3 \bar{\mathbf{V}}. \end{aligned}$$

Quindi, abbiamo le seguenti espressioni:

$$\begin{aligned} \text{se } \bar{t} \in \Lambda^1 \bar{\mathbf{V}}, & \quad \text{allora } \bar{t} = t^1 \bar{b}_1 + t^2 \bar{b}_2 + t^3 \bar{b}_3; \\ \text{se } \bar{t} \in \Lambda^2 \bar{\mathbf{V}}, & \quad \text{allora } \bar{t} = 2! (t^{12} \bar{b}_1 \otimes \bar{b}_2 + t^{13} \bar{b}_1 \otimes \bar{b}_3 + t^{23} \bar{b}_2 \otimes \bar{b}_3) \\ & \quad = 2! (t^{12} \bar{b}_1 \wedge \bar{b}_2 + t^{13} \bar{b}_1 \wedge \bar{b}_3 + t^{23} \bar{b}_2 \wedge \bar{b}_3) \\ & \quad \text{e } t^{11} = t^{22} = t^{33} = 0, \quad t^{12} = t^{21}, \quad t^{13} = t^{31}, \quad t^{23} = t^{32}; \\ \text{se } \bar{t} \in \Lambda^3 \bar{\mathbf{V}}, & \quad \text{allora } \bar{t} = 3! t^{123} \bar{b}_1 \otimes \bar{b}_2 \otimes \bar{b}_3 \\ & \quad = 3! t^{123} \bar{b}_1 \wedge \bar{b}_2 \wedge \bar{b}_3 \\ & \quad \text{e } t^{111} = t^{222} = t^{333} = 0 \\ & \quad t^{122} = t^{133} = t^{211} = t^{233} = t^{311} = t^{322} = 0 \\ & \quad t^{212} = t^{313} = t^{121} = t^{323} = t^{131} = t^{232} = 0 \\ & \quad t^{221} = t^{331} = t^{112} = t^{332} = t^{113} = t^{223} = 0 \\ & \quad t^{123} = -t^{132} = -t^{213} = t^{231} = -t^{321} = t^{312}. \quad \square \end{aligned}$$

1.4.3 Contrazione di tensori

Consideriamo uno spazio vettoriale $\bar{\mathbf{V}}$ di dimensione n e riferiamoci ad una base (\bar{b}_i) di $\bar{\mathbf{V}}$ ed alla sua duale (β^j) .

Possiamo definire la contrazione dei tensori di ordine misto nel seguente modo.

Incominciamo ad osservare che, per ogni $\underline{\alpha} \in \bar{\mathbf{V}}^*$ e $\bar{v} \in \bar{\mathbf{V}}$, otteniamo lo scalare $\alpha(\bar{v}) \in \mathbb{R}$.

1.4.11 Lemma. Esiste un'unica applicazione lineare, detta *traccia*,

$$\text{tr} : \bar{\mathbf{V}}^* \otimes \bar{\mathbf{V}} \rightarrow \mathbb{R},$$

che, sui tensori decomponibili $\underline{\alpha} \otimes \bar{v} \in \bar{\mathbf{V}}^* \otimes \bar{\mathbf{V}}$ è data da

$$\text{tr}(\underline{\alpha} \otimes \bar{v}) := \alpha(\bar{v}).$$

Più precisamente, per ogni tensore $\hat{t} \in \bar{\mathbf{V}}^* \otimes \bar{\mathbf{V}}$, abbiamo

$$\text{tr } \hat{t} = \text{tr} \left(\sum_{1 \leq i, j \leq n} t_i^j \beta^i \otimes \bar{b}_j \right) = \sum_{1 \leq i \leq n} t_i^i.$$

L'applicazione tr non dipende dalla base scelta. \square

Possiamo estendere facilmente l'applicazione precedente a tensori misti di ordine superiore.

1.4.12 Proposizione. Per ogni $p \geq 1$ e $q \geq 1$ e per ogni $1 \geq h \geq p$ e $1 \geq k \geq q$, esiste un'unica applicazione lineare, detta *contrazione* dell'indice covariante h -mo con l'indice controvariante k -mo,

$$C_h^k : (\otimes^p \bar{\mathbf{V}}^*) \otimes (\otimes^q \bar{\mathbf{V}}) \rightarrow (\otimes^{p-1} \bar{\mathbf{V}}^*) \otimes (\otimes^{q-1} \bar{\mathbf{V}}),$$

che, sui tensori decomponibili $\underline{\alpha}_1 \otimes \dots \otimes \underline{\alpha}_p \otimes \bar{v}^1 \otimes \dots \otimes \bar{v}^q$, è data da

$$\begin{aligned} C_h^k(\underline{\alpha}_1 \otimes \dots \otimes \underline{\alpha}_p \otimes \bar{v}^1 \otimes \dots \otimes \bar{v}^q) &:= \\ &:= \underline{\alpha}_h(\bar{v}^k) (\underline{\alpha}_1 \otimes \dots \otimes \underline{\alpha}_{h-1} \otimes \underline{\alpha}_{h+1} \otimes \dots \otimes \underline{\alpha}_p \bar{v}^1 \otimes \dots \otimes \bar{v}^{k-1} \otimes \bar{v}^{k+1} \otimes \dots \otimes \bar{v}^q). \end{aligned}$$

Più precisamente, per ogni tensore $\hat{t} \in (\otimes^p \bar{\mathbf{V}}^*) \otimes (\otimes^q \bar{\mathbf{V}})$, abbiamo

$$\begin{aligned} C_h^k \hat{t} &= C_h^k \left(\sum_{1 \leq i_r, j_s \leq n} t_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} \underline{\beta}^{i_1} \otimes \dots \otimes \underline{\beta}^{i_p} \otimes \bar{b}_{j_1} \otimes \dots \otimes \bar{b}_{j_q} \right) = \\ &= \sum_{\substack{1 \leq h \leq n \\ 1 \leq i_r, j_s \leq n}} t_{i_1 \dots i_{h-1} h i_{h+1} \dots i_p}^{j_1 \dots j_{k-1} h j_{k+1} \dots j_q} \underline{\beta}^{i_1} \otimes \dots \otimes \underline{\beta}^{i_{h-1}} \underline{\beta}^{i_{h+1}} \dots \otimes \underline{\beta}^{i_p} \otimes \bar{b}_{j_1} \otimes \dots \otimes \bar{b}_{j_{k-1}} \otimes \bar{b}_{j_{k+1}} \otimes \dots \otimes \bar{b}_{j_q}. \end{aligned}$$

L'applicazione C_h^k non dipende dalla base scelta. \square

Naturalmente, si possono definire in modo simile le contrazioni di un indice covariante h con un indice controvariante k per un tensore misto in cui gli indici covarianti e controvarianti siano ordinati in modo qualunque; considereremo h come l' h -mo indice tra quelli covarianti e k come il k -mo indice tra quelli controvarianti.

Ovviamente, nel caso in cui $p = q = 1$ abbiamo

$$C_1^1 = \text{tr}.$$

1.4.13 Esempio. Per $p = q = 2$ e $h = 1$ e $k = 2$, abbiamo

$$C_1^2 \hat{t} = C_1^2 \left(\sum_{1 \leq i_1, i_2, j_1, j_2 \leq n} t_{j_1 j_2}^{i_1 i_2} \underline{\beta}^{i_1} \otimes \underline{\beta}^{i_2} \otimes \bar{b}_{j_1} \otimes \bar{b}_{j_2} \right) = \sum_{ij} \left(\sum_h t_{hi}^{jh} \right) \underline{\beta}^i \otimes \bar{b}_j. \square$$

La contrazione di un indice covariante con un indice controvariante può essere iterata più volte.

1.4.14 Esempio. Per $p = q = 2$ e $h = 1$ e $k = 2$, abbiamo

$$C_1^1 C_1^2 \hat{t} = C_1^1 \left(\sum_{ij} \left(\sum_h t_{hi}^{jh} \right) \underline{\beta}^i \otimes \bar{b}_j \right) = \sum_{hk} t_{hk}^{kh}. \square$$

Come caso particolare di contrazione iterata, introduciamo la seguente definizione.

1.4.15 Definizione. Dati due tensori $\bar{t} \in \otimes^r \mathbf{V}$ e $\underline{\alpha} \in \otimes^s \bar{\mathbf{V}}^*$, con $0 < r \geq s$, definiamo *contrazione totale* di \bar{t} con $\underline{\alpha}$ il tensore ottenuto iterando r volte la contrazione

$$\bar{t} \lrcorner \underline{\alpha} := C_1^1 \dots C_1^1 (\bar{t} \otimes \underline{\alpha}) \in \otimes^{s-r} \bar{\mathbf{V}}^* .$$

1.4.16 Esempio. Se

$$\hat{t} = \sum_{1 \leq j_1, j_2 \leq n} t^{j_1 j_2} \bar{b}_{j_1} \otimes \bar{b}_{j_2} \quad \text{ed} \quad \underline{\alpha} = \sum_{1 \leq i_1, i_2, i_3 \leq n} \alpha_{i_1 i_2 i_3} \underline{\beta}^{i_1} \otimes \underline{\beta}^{i_2} \otimes \underline{\beta}^{i_3} ,$$

allora

$$\hat{t} \lrcorner \underline{\alpha} = \sum_{\substack{1 \leq h, k \leq n \\ 1 \leq i \leq n}} t^{hk} \alpha_{hki} \underline{\beta}^i . \square$$

1.4.4 Prodotto interno

Nel caso di tensori antisimmetrici è anche utile introdurre una contrazione totale normalizzata, in un modo adattato ai tensori antisimmetrici.

Consideriamo uno spazio vettoriale $\bar{\mathbf{V}}$ di dimensione n e riferiamoci ad una base (\bar{b}_i) di $\bar{\mathbf{V}}$ ed alla sua duale $(\underline{\beta}^j)$.

1.4.17 Proposizione. Per ogni vettore $\bar{v} \in \bar{\mathbf{V}}$, esiste un'unica applicazione lineare, detta *prodotto interno*,

$$i(\bar{v}) : \Lambda^p \bar{\mathbf{V}}^* \rightarrow \Lambda^{p-1} \bar{\mathbf{V}}^* ,$$

che, sulle forme decomponibili, è data da

$$i(\bar{v}) \underline{\alpha}_1 \wedge \dots \wedge \underline{\alpha}_p := \sum_{1 \geq h \geq p} (-1)^{h-1} \alpha_h(\bar{v}) \underline{\alpha}_1 \wedge \dots \wedge \hat{\underline{\alpha}}_h \wedge \dots \wedge \underline{\alpha}_p ,$$

dove l'elemento con il cappello $\hat{\underline{\alpha}}_h$ si intende soppresso.

Più precisamente, per ogni vettore $\bar{v} \in \bar{\mathbf{V}}$ e per ogni tensore antisimmetrico $\underline{\alpha} \in \Lambda^p \bar{\mathbf{V}}^*$, abbiamo

$$\begin{aligned} i(\bar{v}) \underline{\alpha} &= i(\bar{v}) \left(\sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_p \leq n} p! \alpha_{i_1 \dots i_p} \underline{\beta}^{i_1} \wedge \dots \wedge \underline{\beta}^{i_p} \right) \\ &= \sum_{\substack{1 \leq h \leq p \\ 1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_h \leq i_{h+1} \leq \dots \leq i_p \leq n}} (-1)^{h-1} p! \alpha_{i_1 \dots i_h \dots i_p} (\bar{v}^{i_h}) \underline{\beta}^{i_1} \wedge \dots \wedge \hat{\underline{\beta}}_{i_h} \wedge \dots \wedge \underline{\beta}^{i_p} , \end{aligned}$$

dove l'elemento con il cappello $\hat{\underline{\beta}}_{i_h}$ si intende soppresso.

Le contrazioni $i(\bar{v})\underline{\alpha}$ e $\bar{v} \lrcorner \underline{\alpha}$ coincidono a meno di un fattore numerico; infatti abbiamo

$$i(\bar{v})\underline{\alpha} = p \bar{v} \lrcorner \underline{\alpha} . \square$$

1.4.18 Esempio. Sia $\dim \bar{V} = 3$. Se $\bar{v} \in \bar{V}$ e $\underline{\alpha} \in \Lambda^2 \bar{V}^*$, allora abbiamo

$$\begin{aligned} i(\bar{v})\underline{\alpha} &= i(v^1 \bar{b}_1 + v^2 \bar{b}_2 + v^3 \bar{b}_3)(2 \alpha_{12} \underline{\beta}^1 \wedge \underline{\beta}^2 + 2 \alpha_{13} \underline{\beta}^1 \wedge \underline{\beta}^3 + 2 \alpha_{23} \underline{\beta}^2 \wedge \underline{\beta}^3) = \\ &= 2(\alpha_{12} v^1 \underline{\beta}^2 - \alpha_{12} v^2 \underline{\beta}^1 + \alpha_{13} v^1 \underline{\beta}^3 - \alpha_{13} v^3 \underline{\beta}^1 + \alpha_{23} v^2 \underline{\beta}^3 - \alpha_{23} v^3 \underline{\beta}^2) \\ &= -2(\alpha_{12} v^2 + \alpha_{13} v^3) \underline{\beta}^1 + 2(\alpha_{12} v^1 - \alpha_{23} v^3) \underline{\beta}^2 + 2(\alpha_{13} v^1 + \alpha_{23} v^2) \underline{\beta}^3 \\ &= 2(\alpha_{21} v^2 + \alpha_{31} v^3) \underline{\beta}^1 + 2(\alpha_{12} v^1 + \alpha_{32} v^3) \underline{\beta}^2 + 2(\alpha_{13} v^1 + \alpha_{23} v^2) \underline{\beta}^3 . \end{aligned}$$

Inoltre, abbiamo

$$\begin{aligned} \bar{v} \lrcorner \underline{\alpha} &= (v^1 \bar{b}_1 + v^2 \bar{b}_2 + v^3 \bar{b}_3) \lrcorner \left(\sum_{1 \leq i, j \leq 3} \alpha_{ij} \underline{\beta}^i \otimes \underline{\beta}^j \right) \\ &= \sum_{\substack{1 \leq h \leq 3 \\ 1 \leq j \leq 3}} v^h \alpha_{hj} \underline{\beta}^j \\ &= (\alpha_{21} v^2 + \alpha_{31} v^3) \underline{\beta}^1 + (\alpha_{12} v^1 + \alpha_{32} v^3) \underline{\beta}^2 + (\alpha_{13} v^1 + \alpha_{23} v^2) \underline{\beta}^3 . \square \end{aligned}$$

1.4.19 Esempio. Sia $\dim \bar{V} = 3$. Se $\bar{v} \in \bar{V}$ e $\underline{\alpha} \in \Lambda^3 \bar{V}^*$, allora abbiamo

$$\begin{aligned} i(\bar{v})\underline{\alpha} &= i(v^1 \bar{b}_1 + v^2 \bar{b}_2 + v^3 \bar{b}_3)(3! \alpha_{123} \underline{\beta}^1 \wedge \underline{\beta}^2 \wedge \underline{\beta}^3) \\ &= 3! \alpha_{123} (v^1 \underline{\beta}^2 \wedge \underline{\beta}^3 - v^2 \underline{\beta}^1 \wedge \underline{\beta}^3 + v^3 \underline{\beta}^1 \wedge \underline{\beta}^2) . \end{aligned}$$

Inoltre, abbiamo

$$\begin{aligned} \bar{v} \lrcorner \underline{\alpha} &= (v^1 \bar{b}_1 + v^2 \bar{b}_2 + v^3 \bar{b}_3) \lrcorner \left(\sum_{1 \leq i, j, k \leq 3} \alpha_{ijk} \underline{\beta}^i \otimes \underline{\beta}^j \otimes \underline{\beta}^k \right) \\ &= \sum_{\substack{1 \leq h \leq 3 \\ 1 \leq j, k \leq 3}} v^h \alpha_{hjk} \underline{\beta}^j \otimes \underline{\beta}^k \\ &= \sum_{\substack{1 \leq h \leq 3 \\ 1 \leq j, k \leq 3}} v^h \alpha_{hjk} \underline{\beta}^j \wedge \underline{\beta}^k \\ &= 2 \sum_{\substack{1 \leq h \leq 3 \\ 1 \leq j < k \leq 3}} v^h \alpha_{hjk} \underline{\beta}^j \wedge \underline{\beta}^k \\ &= 2 \alpha_{123} (v^1 \underline{\beta}^2 \wedge \underline{\beta}^3 - v^2 \underline{\beta}^1 \wedge \underline{\beta}^3 + v^3 \underline{\beta}^1 \wedge \underline{\beta}^2) . \square \end{aligned}$$

Iterando il precedente prodotto interno di un singolo vettore, possiamo estendere il prodotto interno ai tensori controvarianti di ordine maggiore di 1 nel modo seguente.

1.4.20 Proposizione. Per ogni $1 \leq q \leq p \leq n$, esiste un'unica applicazione lineare

$$i : \Lambda^q \bar{\mathbf{V}} \times \Lambda^p \bar{\mathbf{V}}^* \rightarrow \Lambda^{p-q} \bar{\mathbf{V}}^* : (\bar{t}, \underline{\alpha}) \mapsto i(\bar{t})\underline{\alpha},$$

che, sui tensori controvarianti antisimmetrici decomponibili, è data da

$$i(\bar{v}_1 \wedge \dots \wedge \bar{v}_q) \underline{\alpha} := i(\bar{v}_p) \dots i(\bar{v}_1) \underline{\alpha}. \square$$

1.4.21 Corollario. Se $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_p \in \bar{\mathbf{V}}$ e $\underline{\alpha}^1, \dots, \underline{\alpha}^p \in \bar{\mathbf{V}}^*$, allora abbiamo

$$i(\bar{v}_1 \wedge \dots \wedge \bar{v}_p)(\underline{\alpha}^1, \dots, \underline{\alpha}^p) = \det(\underline{\alpha}^i(\bar{v}_j)). \square$$

1.4.22 Esempio. Sia $\dim \bar{\mathbf{V}} = 3$. Se $\bar{u}, \bar{v} \in \bar{\mathbf{V}}$ e $\underline{\alpha} \in \Lambda^3 \bar{\mathbf{V}}^*$, allora abbiamo

$$\begin{aligned} i(\bar{u} \wedge \bar{v})\underline{\alpha} &= i(\bar{u} \wedge \bar{v})(3! \alpha_{123} \underline{\beta}^1 \wedge \underline{\beta}^2 \wedge \underline{\beta}^3) \\ &= 3! \alpha_{123} ((u^2 v^3 - u^3 v^2) \underline{\beta}^1 + (u^3 v^1 - u^1 v^3) \underline{\beta}^2 + (u^1 v^2 - u^2 v^1) \underline{\beta}^3). \square \end{aligned}$$

1.4.23 Esempio. Sia $\dim \bar{\mathbf{V}} = 3$. Allora abbiamo

$$i(\bar{b}_1 \wedge \bar{b}_2 \wedge \bar{b}_3)(\underline{\beta}^1 \wedge \underline{\beta}^2 \wedge \underline{\beta}^3) = \det(\underline{\beta}^i(\bar{b}_j)) = \det(\delta_j^i) = 1. \square$$

1.4.5 Tensori ed applicazioni lineari

I tensori permettono di rappresentare le applicazioni lineari e multilineari, in particolare, gli endomorfismi lineari e le forme bilineari, in modo comodo, mediante le seguenti regole.

Queste regole giustificano essenzialmente il nostro interesse per i tensori, come un modo formale comodo per descrivere vari aspetti delle applicazioni lineari e multilineari.

Consideriamo uno spazio vettoriale $\bar{\mathbf{V}}$ di dimensione n .

1) *Prima regola.*

1.4.24 Proposizione. Esiste un'unica applicazione lineare

$$\bar{\mathbf{V}}^* \otimes \bar{\mathbf{V}} \rightarrow L(\bar{\mathbf{V}}, \bar{\mathbf{V}}) : \hat{t} \mapsto \hat{f}_{\hat{t}},$$

che, sui tensori decomponibili, è data da

$$\bar{\mathbf{V}}^* \otimes \bar{\mathbf{V}} \rightarrow L(\bar{\mathbf{V}}, \bar{\mathbf{V}}) : \underline{\alpha} \otimes \bar{v} \mapsto \hat{f}_{\underline{\alpha} \otimes \bar{v}},$$

dove

$$\hat{f}_{\underline{\alpha} \otimes \bar{v}} : \bar{\mathbf{V}} \rightarrow \bar{\mathbf{V}} : \bar{u} \mapsto \underline{\alpha}(\bar{u}) \bar{v}.$$

Più esplicitamente, per ogni $\hat{t} = \sum_{ij} t_i^j \underline{\beta}^i \otimes \bar{b}_j \in \bar{\mathbf{V}}^* \otimes \bar{\mathbf{V}}$, abbiamo

$$\hat{f}_{\hat{t}}(\bar{u}) = \sum_{ij} t_i^j u^i \bar{b}_j;$$

in altre parole, in una qualunque base, la matrice del tensore \hat{t} coincide con la matrice dell'endomorfismo $\hat{f}_{\hat{t}}$.

L'applicazione $\bar{\mathbf{V}}^* \otimes \bar{\mathbf{V}} \rightarrow L(\bar{\mathbf{V}}, \bar{\mathbf{V}}) : \hat{t} \mapsto \hat{f}_{\hat{t}}$ è un isomorfismo.

Mediante tale isomorfismo, identificheremo gli spazi $\bar{\mathbf{V}}^* \otimes \bar{\mathbf{V}}$ e $L(\bar{\mathbf{V}}, \bar{\mathbf{V}})$ scrivendo

$$\bar{\mathbf{V}}^* \otimes \bar{\mathbf{V}} \simeq L(\bar{\mathbf{V}}, \bar{\mathbf{V}}) \quad \text{e} \quad \hat{t} \simeq \hat{f}_{\hat{t}}.$$

Questa identificazione è in accordo con la notazione che avevamo già usato per indicare la base dello spazio degli endomorfismi.

2) *Seconda regola.*

1.4.25 Proposizione. Esiste un'unica applicazione lineare

$$\bar{\mathbf{V}}^* \otimes \bar{\mathbf{V}}^* \rightarrow L^2(\bar{\mathbf{V}}, \mathbb{R}) : \underline{t} \mapsto \underline{f}_{\underline{t}},$$

che, sui tensori decomponibili, è data da

$$\bar{\mathbf{V}}^* \otimes \bar{\mathbf{V}}^* \rightarrow L^2(\bar{\mathbf{V}}, \mathbb{R}) : \alpha \otimes \underline{\beta} \mapsto \underline{f}_{\alpha \otimes \underline{\beta}},$$

dove

$$\underline{f}_{\alpha \otimes \underline{\beta}} : \bar{\mathbf{V}} \times \bar{\mathbf{V}} \rightarrow \mathbb{R} : (\bar{u}, \bar{v}) \mapsto \alpha(\bar{u}) \underline{\beta}(\bar{v}).$$

Più esplicitamente, per ogni $\underline{t} = \sum_{ij} t_{ij} \underline{\beta}^i \otimes \underline{\beta}^j \in \bar{\mathbf{V}}^* \otimes \bar{\mathbf{V}}^*$, abbiamo

$$\underline{f}_{\underline{t}}(\bar{u}, \bar{v}) = \sum_{ij} t_{ij} u^i v^j;$$

in altre parole, in una qualunque base, la matrice del tensore \underline{t} coincide con la matrice della forma bilineare $\underline{f}_{\underline{t}}$.

L'applicazione $\bar{\mathbf{V}}^* \otimes \bar{\mathbf{V}}^* \rightarrow L^2(\bar{\mathbf{V}}, \mathbb{R}) : \underline{t} \mapsto \underline{f}_{\underline{t}}$ è un isomorfismo. \square

Mediante tale isomorfismo, identificheremo gli spazi $\bar{\mathbf{V}}^* \otimes \bar{\mathbf{V}}^*$ e $L^2(\bar{\mathbf{V}}, \mathbb{R})$ scrivendo

$$\bar{\mathbf{V}}^* \otimes \bar{\mathbf{V}}^* \simeq L^2(\bar{\mathbf{V}}, \mathbb{R}) \quad \text{e} \quad \underline{t} \simeq \underline{f}_{\underline{t}}.$$

Questa identificazione è in accordo con la notazione che avevamo già usato per indicare la base dello spazio delle forme bilineari.

In modo analogo alle precedenti regole, possiamo identificare i tensori di ordine (p, q) con applicazioni lineari e multilineari in molti modi.

1.4.26 Esempio. Consideriamo un tensore antisimmetrico covariante di ordine $\underline{\alpha} \in \Lambda^n \mathbf{V}^*$ di ordine n .

In accordo alla generalizzazione all'ordine n della regola 2), possiamo identificare $\underline{\alpha}$ con la forma n -lineare antisimmetrica

$$\underline{\alpha} : \text{Ant}^n(\bar{\mathbf{V}}, \mathbb{R}) : (\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n) \mapsto \underline{\alpha}(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n).$$

Ma possiamo anche identificare $\underline{\alpha}$ con la forma n -lineare antisimmetrica

$$\underline{\alpha} : \text{Ant}^n(\bar{\mathbf{V}}, \mathbb{R}) : (\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n) \mapsto i(\bar{v}_n) \dots i(\bar{v}_1) \underline{\alpha}.$$

Si noti che le due identificazioni differiscono per un fattore; infatti, abbiamo

$$i(\bar{v}_n) \dots i(\bar{v}_1) \underline{\alpha} = n! \underline{\alpha}(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n).$$

Per quanto riguarda l'identificazione delle forme volume con tensori antisimmetrici covarianti di ordine n , conviene usare la seconda delle precedenti identificazioni. \square

1.4.6 Tensori e metrica euclidea

Varie operazioni indotte dalla metrica sullo spazio vettoriale $\bar{\mathbf{V}}$ possono essere estese facilmente, in modo molto naturale, ai prodotti tensoriali.

Le formule che esprimono queste operazioni sono apparentemente complesse, ma, in realtà, è molto semplice afferrarne l'idea essenziale. Perciò, queste formule sono più facili da capire che da scrivere. Inoltre, in una base ortonormale queste formule sono banali. Invitiamo lo studente a leggere questa sezione con questo spirito in mente.

Consideriamo uno spazio vettoriale $\bar{\mathbf{V}}$ di dimensione n , con una metrica euclidea g . Riferiamoci ad una base (\bar{b}_i) ed alla sua duale $(\underline{\beta}^i)$ e ad una base ortonormale (\bar{e}_i) ed alla sua duale $(\underline{\epsilon}^i)$.

Ricordiamo che la metrica euclidea g induce gli isomorfismi musicali, mutualmente inversi,

$$g^\flat : \bar{\mathbf{V}} \rightarrow \bar{\mathbf{V}}^* : \bar{v} \mapsto \underline{v} \quad \text{e} \quad g^\sharp : \bar{\mathbf{V}}^* \rightarrow \bar{\mathbf{V}} : \underline{v} \mapsto \bar{v},$$

caratterizzati dall'uguaglianza

$$v(\bar{u}) = \bar{v} \cdot \bar{u}, \quad \forall \bar{u} \in \bar{\mathbf{V}}.$$

Ricordiamo anche che la metrica euclidea g di $\bar{\mathbf{V}}$ induce la metrica euclidea \bar{g} di $\bar{\mathbf{V}}^*$ mediante l'uguaglianza

$$\underline{u} \cdot \underline{v} \equiv \bar{g}(\underline{u}, \underline{v}) := g(g^\sharp(\underline{u}), g^\sharp(\underline{v})) \equiv \bar{u} \cdot \bar{v}.$$

Con riferimento alla base (\bar{b}_i) , le matrici di \underline{g} e di g^b e la matrice di \bar{g} e di g^\sharp sono

$$\begin{aligned}(\underline{g}) &= (g^b) = g_{ij} := \underline{g}(\bar{b}_i, \bar{b}_j) \equiv \bar{b}_i \cdot \bar{b}_j \\ (\bar{g}) &= (g^\sharp) = g^{ij} := \bar{g}(\underline{\beta}^i, \underline{\beta}^j) \equiv \underline{\beta}^i \cdot \underline{\beta}^j,\end{aligned}$$

dove

$$(g^{ij}) = (g_{hk})^{-1}.$$

Con riferimento alla base (\bar{e}_i) , le matrici di \underline{g} e di g^b e la matrice di \bar{g} e di g^\sharp sono

$$\begin{aligned}(\underline{g}) &= (g^b) = \delta_{ij} := \underline{g}(\bar{e}_i, \bar{e}_j) \equiv \bar{e}_i \cdot \bar{e}_j \\ (\bar{g}) &= (g^\sharp) = \delta^{ij} := \bar{g}(\underline{\epsilon}^i, \underline{\epsilon}^j) \equiv \underline{\epsilon}^i \cdot \underline{\epsilon}^j.\end{aligned}$$

1.4.6.1 Tensori ed isomorfismi musicali

Possiamo estendere naturalmente gli isomorfismi musicali ai prodotti tensoriali nel seguente modo.

1.4.27 Proposizione. Sia $1 \leq p$. Esiste un'unica applicazione lineare

$$\otimes^p g^b : \otimes^p \bar{\mathbf{V}} \rightarrow \otimes^p \bar{\mathbf{V}}^* : \bar{t} \mapsto \underline{t},$$

che, per i tensori decomponibili, è data da

$$\otimes^p g^b(\bar{v}_1 \otimes \dots \otimes \bar{v}_p) := g^b(\bar{v}_1) \otimes \dots \otimes g^b(\bar{v}_p).$$

Più esplicitamente, per ogni $\bar{t} = \sum t^{i_1 \dots i_p} \bar{b}_{i_1} \otimes \dots \otimes \bar{b}_{i_p} \in \otimes^p \bar{\mathbf{V}}$, abbiamo

$$\otimes^p g^b(\bar{t}) = \sum_{1 \leq i_1, j_1, \dots, i_p, j_p \leq n} g_{i_1 j_1} \dots g_{i_p j_p} t^{j_1 \dots j_p} \underline{\beta}^{i_1} \otimes \dots \otimes \underline{\beta}^{i_p},$$

cioè

$$t_{i_1 \dots i_p} = \sum_{1 \leq j_1, \dots, j_p \leq n} g_{i_1 j_1} \dots g_{i_p j_p} t^{j_1 \dots j_p}.$$

In particolare, in una base ortonormale, per ogni $\bar{t} = \sum t^{i_1 \dots i_p} \bar{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \bar{e}_{i_p} \in \otimes^p \bar{\mathbf{V}}$, abbiamo

$$\otimes^p g^b(\bar{t}) = \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_p \leq n} t^{i_1 \dots i_p} \underline{\epsilon}^{i_1} \otimes \dots \otimes \underline{\epsilon}^{i_p},$$

cioè

$$t_{i_1 \dots i_p} = t^{i_1 \dots i_p} . \square$$

1.4.28 Proposizione. Sia $1 \leq p$. Esiste un'unica applicazione lineare

$$\otimes^p g^\sharp : \otimes^p \bar{\mathbf{V}}^* \rightarrow \otimes^p \bar{\mathbf{V}} : \underline{t} \mapsto \bar{t},$$

che, per i tensori decomponibili, è data da

$$\otimes^p g^\sharp(\underline{v}^1 \otimes \dots \otimes \underline{v}^p) := g^\sharp(\underline{v}^1) \otimes \dots \otimes g^\sharp(\underline{v}^p).$$

Più esplicitamente, per ogni $\underline{t} = \sum t_{i_1 \dots i_p} \underline{\beta}^{i_1} \otimes \dots \otimes \underline{\beta}^{i_p} \in \otimes^p \bar{\mathbf{V}}^*$, abbiamo

$$\otimes^p g^\sharp(\underline{t}) = \sum_{1 \leq i_1, j_1, \dots, i_p, j_p \leq n} g^{i_1 j_1} \dots g^{i_p j_p} t_{j_1 \dots j_p} \bar{b}_{i_1} \otimes \dots \otimes \bar{b}_{i_p},$$

cioè

$$t^{i_1 \dots i_p} = \sum_{1 \leq j_1, \dots, j_p \leq n} g^{i_1 j_1} \dots g^{i_p j_p} t_{j_1 \dots j_p}.$$

In particolare, in una base ortonormale, per ogni $\underline{t} = \sum t_{i_1 \dots i_p} \underline{\epsilon}^{i_1} \otimes \dots \otimes \underline{\epsilon}^{i_p} \in \otimes^p \bar{\mathbf{V}}^*$, abbiamo

$$\otimes^p g^\sharp(\underline{t}) = \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_p \leq n} t_{i_1 \dots i_p} \bar{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \bar{e}_{i_p},$$

cioè

$$t^{i_1 \dots i_p} = t_{i_1 \dots i_p} \cdot \square$$

Chiaramente, le due applicazioni precedente sono l'una l'inversa dell'altra.

1.4.29 Proposizione. Sia $1 \leq p, q$. Esiste un'unica applicazione lineare

$$(\otimes^p \hat{\text{id}}) \otimes (\otimes^q g^b) : (\otimes^p \bar{\mathbf{V}}^*) \otimes (\otimes^q \bar{\mathbf{V}}) \rightarrow \otimes^{p+q} \bar{\mathbf{V}}^* : \hat{t} \mapsto \underline{t},$$

che, per i tensori decomponibili, è data da

$$(\otimes^p \hat{\text{id}}) \otimes (\otimes^q g^b)(\underline{u}^1 \otimes \dots \otimes \underline{u}^p \otimes \bar{v}_1 \otimes \dots \otimes \bar{v}_q) := \underline{u}^1 \otimes \dots \otimes \underline{u}^p \otimes g^b(\bar{v}_1) \otimes \dots \otimes g^b(\bar{v}_q).$$

Più esplicitamente, per ogni

$$\hat{t} = \sum t_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} \underline{\beta}^{i_1} \otimes \dots \otimes \underline{\beta}^{i_p} \otimes \bar{b}_{j_1} \otimes \dots \otimes \bar{b}_{j_q} \in (\otimes^p \bar{\mathbf{V}}^*) \otimes (\otimes^q \bar{\mathbf{V}}),$$

abbiamo

$$\begin{aligned} (\otimes^p \hat{\text{id}}) \otimes (\otimes^q g^b)(\hat{t}) &= \\ &= \sum_{1 \leq i_1, j_1, h_1, \dots, i_p, j_p, h_p \leq n} g_{j_1 h_1} \dots g_{j_p h_p} t_{i_1 \dots i_p}^{h_1 \dots h_p} \underline{\beta}^{i_1} \otimes \dots \otimes \underline{\beta}^{i_p} \otimes \underline{\beta}^{j_1} \otimes \dots \otimes \underline{\beta}^{j_p}, \end{aligned}$$

cioè

$$t_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} = \sum_{1 \leq h_1, \dots, h_q \leq n} g_{j_1 h_1} \dots g_{j_q h_q} t_{i_1 \dots i_p}^{h_1 \dots h_q}.$$

In particolare, in una base ortonormale, per ogni

$$\hat{t} = \sum t_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} \underline{\epsilon}^{i_1} \otimes \dots \otimes \underline{\epsilon}^{i_p} \otimes \bar{e}_{j_1} \otimes \dots \otimes \bar{e}_{j_q} \in (\otimes^p \bar{\mathbf{V}}^*) \otimes (\otimes^q \bar{\mathbf{V}}),$$

abbiamo

$$(\otimes^p \hat{\text{id}}) \otimes (\otimes^q g^b)(\hat{t}) = \sum_{1 \leq i_1, j_1, \dots, i_p, j_q, \leq n} t_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} \underline{\epsilon}^{i_1} \otimes \dots \otimes \underline{\epsilon}^{i_p} \otimes \underline{\epsilon}^{j_1} \otimes \dots \otimes \underline{\epsilon}^{j_q},$$

cioè

$$t_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} = t_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}. \square$$

1.4.30 Proposizione. Sia $1 \leq p, q$. Esiste un'unica applicazione lineare

$$(\otimes^p g^\#) \otimes (\otimes^q \hat{\text{id}}) : (\otimes^p \bar{\mathbf{V}}^*) \otimes (\otimes^q \bar{\mathbf{V}}) \rightarrow \otimes^{p+q} \bar{\mathbf{V}} : \hat{t} \mapsto \bar{t},$$

che, per i tensori decomponibili, è data da

$$(\otimes^p g^\#) \otimes (\otimes^q \hat{\text{id}})(\underline{u}^1 \otimes \dots \otimes \underline{u}^p \otimes \bar{v}_1 \otimes \dots \otimes \bar{v}_q) := g^\#(\underline{u}^1) \otimes \dots \otimes g^\#(\underline{u}^p) \otimes \bar{v}_1 \otimes \dots \otimes \bar{v}_q.$$

Più esplicitamente, per ogni

$$\hat{t} = \sum t_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} \underline{\beta}^{i_1} \otimes \dots \otimes \underline{\beta}^{i_p} \otimes \bar{b}_{j_1} \otimes \dots \otimes \bar{b}_{j_q} \in (\otimes^p \bar{\mathbf{V}}^*) \otimes (\otimes^q \bar{\mathbf{V}}),$$

abbiamo

$$\begin{aligned} (\otimes^p g^\#) \otimes (\otimes^q \hat{\text{id}})(\hat{t}) &= \\ &= \sum_{1 \leq i_1, h_1, j_1, \dots, i_p, h_p, j_q \leq n} g^{i_1 h_1} \dots g^{i_p h_p} t_{h_1 \dots h_p}^{j_1 \dots j_q} \bar{b}_{i_1} \otimes \dots \otimes \bar{b}_{i_p} \otimes \bar{b}_{j_1} \otimes \dots \otimes \bar{b}_{j_q}, \end{aligned}$$

cioè

$$t_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} = \sum_{1 \leq h_1, \dots, h_p \leq n} g^{i_1 h_1} \dots g^{i_p h_p} t_{h_1 \dots h_p}^{j_1 \dots j_q}.$$

In particolare, in una base ortonormale, per ogni

$$\hat{t} = \sum t_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} \underline{\epsilon}^{i_1} \otimes \dots \otimes \underline{\epsilon}^{i_p} \otimes \bar{e}_{j_1} \otimes \dots \otimes \bar{e}_{j_q} \in (\otimes^p \bar{\mathbf{V}}^*) \otimes (\otimes^q \bar{\mathbf{V}}),$$

abbiamo

$$(\otimes^p g^\#) \otimes (\otimes^q \hat{\text{id}})(\hat{t}) = \sum_{1 \leq i_1, j_1, \dots, i_p, j_q, \leq n} t_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} \bar{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \bar{e}_{i_p} \otimes \bar{e}_{j_1} \otimes \dots \otimes \bar{e}_{j_q},$$

cioè

$$t_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} = t_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}. \square$$

In maniera analoga, possiamo definire le applicazioni musicali che abbassano solo alcuni degli indici controvarianti, o alzano solo alcuni degli indici covarianti.

1.4.31 Esempio. Abbiamo gli isomorfismi

$$\begin{aligned}
g^b \otimes g^b &: \bar{V} \otimes \bar{V} \rightarrow \bar{V}^* \otimes \bar{V}^* : \bar{t} \mapsto \underline{t}, \\
g^\sharp \otimes g^\sharp &: \bar{V}^* \otimes \bar{V}^* \rightarrow \bar{V} \otimes \bar{V} : \underline{t} \mapsto \bar{t}, \\
g^b \otimes \hat{\text{id}} &: \bar{V} \otimes \bar{V} \rightarrow \bar{V}^* \otimes \bar{V} : \bar{t} \mapsto \hat{t}, \\
g^\sharp \otimes \hat{\text{id}} &: \bar{V}^* \otimes \bar{V} \rightarrow \bar{V} \otimes \bar{V} : \bar{t} \mapsto \hat{t}, \\
\hat{\text{id}} \otimes g^b &: \bar{V}^* \otimes \bar{V} \rightarrow \bar{V}^* \otimes \bar{V}^* : \hat{t} \mapsto \underline{t}, \\
\hat{\text{id}} \otimes g^\sharp &: \bar{V}^* \otimes \bar{V}^* \rightarrow \bar{V}^* \otimes \bar{V} : \underline{t} \mapsto \hat{t},
\end{aligned}$$

le cui espressioni sono

$$\begin{aligned}
(g^b \otimes g^b) \left(\sum_{ij} t^{ij} \bar{b}_i \otimes \bar{b}_j \right) &= \sum_{ihjk} g_{ih} g_{jk} t^{hk} \underline{\beta}^i \otimes \underline{\beta}^j = \sum_{ij} t_{ij} \underline{\beta}^i \otimes \underline{\beta}^j, \\
(g^\sharp \otimes g^\sharp) \left(\sum_{ij} t_{ij} \underline{\beta}^i \otimes \underline{\beta}^j \right) &= \sum_{ihjk} g^{ih} g^{jk} t_{hk} \bar{b}_i \otimes \bar{b}_j = \sum_{ij} t^{ij} \bar{b}_i \otimes \bar{b}_j, \\
(g^b \otimes \hat{\text{id}}) \left(\sum_{ij} t^{ij} \bar{b}_i \otimes \bar{b}_j \right) &= \sum_{ihj} g_{ih} t^{hj} \underline{\beta}^i \otimes \bar{b}_j = \sum_{ij} t_i^j \underline{\beta}^i \otimes \bar{b}_j, \\
(g^\sharp \otimes \hat{\text{id}}) \left(\sum_{ij} t_i^j \underline{\beta}^i \otimes \bar{b}_j \right) &= \sum_{ihjk} g^{ih} t_h^j \bar{b}_i \otimes \bar{b}_j = \sum_{ij} t^{ij} \bar{b}_i \otimes \bar{b}_j, \\
(\hat{\text{id}} \otimes g^b) \left(\sum_{ij} t_i^j \underline{\beta}^i \otimes \bar{b}_j \right) &= \sum_{ihj} g_{jh} t_i^h \underline{\beta}^i \otimes \underline{\beta}^j = \sum_{ij} t_{ij} \underline{\beta}^i \otimes \underline{\beta}^j, \\
(\hat{\text{id}} \otimes g^\sharp) \left(\sum_{ij} t_{ij} \underline{\beta}^i \otimes \underline{\beta}^j \right) &= \sum_{ijh} g^{jh} t_{ih} \bar{b}_i \otimes \bar{b}_j = \sum_{ij} t^{ij} \bar{b}_i \otimes \bar{b}_j.
\end{aligned}$$

In particolare, in una base ortonormale gli isomorfismi musicali lasciano inalterate le componenti dei tensori:

$$\begin{aligned}
(g^b \otimes g^b) \left(\sum_{ij} t^{ij} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j \right) &= \sum_{ihjk} t^{ij} \underline{\epsilon}^i \otimes \underline{\epsilon}^j = \sum_{ij} t_{ij} \underline{\epsilon}^i \otimes \underline{\epsilon}^j, \\
(g^\sharp \otimes g^\sharp) \left(\sum_{ij} t_{ij} \underline{\epsilon}^i \otimes \underline{\epsilon}^j \right) &= \sum_{ihjk} t_{ij} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j = \sum_{ij} t^{ij} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j, \\
(g^b \otimes \hat{\text{id}}) \left(\sum_{ij} t^{ij} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j \right) &= \sum_{ihj} t^{ij} \underline{\epsilon}^i \otimes \bar{e}_j = \sum_{ij} t_i^j \underline{\epsilon}^i \otimes \bar{e}_j, \\
(g^\sharp \otimes \hat{\text{id}}) \left(\sum_{ij} t_i^j \underline{\epsilon}^i \otimes \bar{e}_j \right) &= \sum_{ihjk} t_i^j \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j = \sum_{ij} t^{ij} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j, \\
(\hat{\text{id}} \otimes g^b) \left(\sum_{ij} t_i^j \underline{\epsilon}^i \otimes \bar{e}_j \right) &= \sum_{ihj} t_i^j \underline{\epsilon}^i \otimes \underline{\epsilon}^j = \sum_{ij} t_{ij} \underline{\epsilon}^i \otimes \underline{\epsilon}^j, \\
(\hat{\text{id}} \otimes g^\sharp) \left(\sum_{ij} t_{ij} \underline{\epsilon}^i \otimes \underline{\epsilon}^j \right) &= \sum_{ij} t_{ij} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j = \sum_{ij} t^{ij} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j.
\end{aligned}$$

Le seguenti coppie di isomorfismi

$$\begin{aligned} g^b \otimes g^b : \bar{\mathbf{V}} \otimes \bar{\mathbf{V}} &\rightarrow \bar{\mathbf{V}}^* \otimes \bar{\mathbf{V}}^* & \text{e} & & g^\sharp \otimes g^\sharp : \bar{\mathbf{V}}^* \otimes \bar{\mathbf{V}}^* &\rightarrow \bar{\mathbf{V}} \otimes \bar{\mathbf{V}}, \\ g^b \otimes \hat{\text{id}} : \bar{\mathbf{V}} \otimes \bar{\mathbf{V}} &\rightarrow \bar{\mathbf{V}}^* \otimes \bar{\mathbf{V}} & \text{e} & & g^\sharp \otimes \hat{\text{id}} : \bar{\mathbf{V}}^* \otimes \bar{\mathbf{V}} &\rightarrow \bar{\mathbf{V}} \otimes \bar{\mathbf{V}}, \\ \hat{\text{id}} \otimes g^b : \bar{\mathbf{V}}^* \otimes \bar{\mathbf{V}} &\rightarrow \bar{\mathbf{V}}^* \otimes \bar{\mathbf{V}}^* & \text{e} & & \hat{\text{id}} \otimes g^\sharp : \bar{\mathbf{V}}^* \otimes \bar{\mathbf{V}}^* &\rightarrow \bar{\mathbf{V}}^* \otimes \bar{\mathbf{V}} \end{aligned}$$

sono mutuamente inversi.

Inoltre, abbiamo

$$(g^b \otimes \hat{\text{id}}) \circ (\hat{\text{id}} \otimes g^b) = g^b \otimes g^b \quad \text{e} \quad (g^\sharp \otimes \hat{\text{id}}) \circ (\hat{\text{id}} \otimes g^\sharp) = g^\sharp \otimes g^\sharp.$$

1.4.32 Proposizione. Abbiamo

$$(g^\sharp \otimes g^\sharp)(\underline{g}) = \bar{g}, \quad (g^b \otimes g^b)(\bar{g}) = \underline{g}, \quad (g^\sharp \otimes \hat{\text{id}})(\text{id}) = \bar{g}, \quad (\text{id} \otimes g^b)(\text{id}) = \underline{g}.$$

Ossia, in una qualunque base, valgono le seguenti formule

$$g^{ij} = \sum_{hk} g^{ih} g^{jk} g_{hk}, \quad \delta_i^j = \sum_h g_{ih} g^{hj}, \quad g_{ij} = \sum_{hk} g_{ih} g_{jk} g^{hk}. \quad \square$$

1.4.6.2 Tensori e prodotto scalare

Possiamo estendere naturalmente il prodotto scalare ai prodotti tensoriali nel seguente modo. Sia $1 \leq p$.

1.4.33 Proposizione. Esiste un'unica forma bilineare

$$\otimes^p g : (\otimes^p \bar{\mathbf{V}}) \times (\otimes^p \bar{\mathbf{V}}) \rightarrow \mathbb{R} : (\bar{t}, \bar{s}) \mapsto \bar{t} \cdot \bar{s},$$

che, sui tensori decomponibili, è data da

$$(\bar{u}_1 \otimes \dots \otimes \bar{u}_p) \cdot (\bar{v}_1 \otimes \dots \otimes \bar{v}_p) := (\bar{u}_1 \cdot \bar{v}_1) \dots (\bar{u}_p \cdot \bar{v}_p).$$

Più esplicitamente, per ogni $\bar{t}, \bar{s} \in \otimes^p \bar{\mathbf{V}}$, abbiamo

$$\bar{t} \cdot \bar{s} = \sum g_{i_1 j_1} \dots g_{i_p j_p} t^{i_1 \dots i_1} s^{j_1 \dots j_p}.$$

La forma bilineare $\otimes^p g$ è una metrica euclidea dello spazio vettoriale $\otimes^p \bar{\mathbf{V}}$. Inoltre, per ogni $\bar{t}, \bar{s} \in \otimes^p \bar{\mathbf{V}}$, abbiamo

$$\bar{t} \cdot \bar{s} = \bar{s} \lrcorner ((\otimes^p g^b)(\bar{t})) = \bar{t} \lrcorner ((\otimes^p g^b)(\bar{s})). \quad \square$$

1.4.34 Proposizione. Esiste un'unica forma bilineare

$$\otimes^p \bar{g} : (\otimes^p \bar{\mathbf{V}}^*) \times (\otimes^p \bar{\mathbf{V}}^*) \rightarrow \mathbb{R} : (\underline{t}, \underline{s}) \mapsto \underline{t} \cdot \underline{s},$$

che, sui tensori decomponibili, è data da

$$(\underline{u}^1 \otimes \dots \otimes \underline{u}^p) \cdot (\underline{v}^1 \otimes \dots \otimes \underline{v}^p) := (\underline{u}^1 \cdot \underline{v}^1) \dots (\underline{u}^p \cdot \underline{v}^p).$$

Più esplicitamente, per ogni $\underline{t}, \underline{s} \in \otimes^p \bar{\mathbf{V}}^*$, abbiamo

$$\underline{t} \cdot \underline{s} = \sum g^{i_1 j_1} \dots g^{i_p j_p} t_{i_1 \dots i_p} s_{j_1 j_p}.$$

La forma bilineare $\otimes^p \bar{g}$ è una metrica euclidea dello spazio vettoriale $\otimes^p \bar{\mathbf{V}}^*$. Inoltre, per ogni $\underline{t}, \underline{s} \in \otimes^p \bar{\mathbf{V}}^*$, abbiamo

$$\underline{t} \cdot \underline{s} = ((\otimes^p g^\sharp)(\underline{t})) \lrcorner \underline{s} = ((\otimes^p g^\sharp)(\underline{s})) \lrcorner \underline{t}. \square$$

In modo analogo possiamo definire il prodotto scalare di tensori misti.

1.4.6.3 Tensori antisimmetrici e forme volume

Nel caso di tensori antisimmetrici conviene definire il prodotto scalare mediante il prodotto interno, invece che mediante la contrazione totale. Il prodotto scalare così definito definisce da quello introdotto nella sezione precedente per un fattore intero.

1.4.35 Definizione. Per ogni $\bar{t}, \bar{s} \in \Lambda^p \bar{\mathbf{V}}$ e $\underline{\alpha}, \underline{\beta} \in \Lambda^p \bar{\mathbf{V}}^*$, definiamo

$$\bar{t} \cdot \bar{s} := i(\bar{t}) \lrcorner ((\otimes^p g^\flat)(\underline{s})) \quad \text{e} \quad \underline{\alpha} \cdot \underline{\beta} := i((\otimes^p g^\sharp)(\underline{\alpha})) \lrcorner \underline{\beta}. \square$$

Abbiamo visto che la metrica euclidea \underline{g} e la scelta di un'orientazione dello spazio $\bar{\mathbf{V}}$ inducono la forma volume

$$\eta \in \text{Ant}^n(\bar{\mathbf{V}}, \mathbb{R}) \simeq \Lambda^n \bar{\mathbf{V}}^*,$$

che è caratterizzata dalla condizione

$$i(\bar{e}_n) \dots i(\bar{e}_1) \eta = 1,$$

per ogni base ortonormale $(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n)$ orientata positivamente.

1.4.36 Lemma. Esiste un unico (a meno del segno) tensore antisimmetrico controvariante $\bar{t} \in \Lambda^n \bar{\mathbf{V}}$ ed un unico (a meno del segno) tensore antisimmetrico covariante $\underline{s} \in \Lambda^n \bar{\mathbf{V}}^*$ tali che, rispettivamente

$$\bar{t} \cdot \bar{t} = 1 \quad \text{e} \quad \underline{s} \cdot \underline{s} = 1.$$

Inoltre, abbiamo

$$i(\bar{t})\underline{s} = \pm 1 \quad \text{e} \quad \bar{t} = \pm(\otimes^n g^\sharp)(\underline{s}), \quad \underline{s} = \pm(\otimes^n g^\flat)(\bar{t}),$$

dove il segno è positivo (negativo) se i due tensori corrispondono alla stessa (opposta) orientazione. \square

1.4.37 Proposizione. La forma volume $\underline{\eta}$ è determinata (a meno del segno) dalla condizione

$$\underline{\eta} \cdot \underline{\eta} = 1.$$

In una qualunque base $(\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n)$ orientata positivamente l'espressione della forma volume è

$$\underline{\eta} = \sqrt{\det(g_{hk})} \underline{\beta}^1 \wedge \dots \wedge \underline{\beta}^n. \square$$

1.4.38 Nota. Il tensore antisimmetrico controvariante

$$\bar{\eta} := (\otimes^n g^\sharp)(\underline{\eta}) \in \Lambda^n \bar{\mathbf{V}}$$

soddisfa la proprietà

$$\bar{\eta} \cdot \bar{\eta} = i(\bar{\eta})\underline{\eta} = 1$$

e la sua espressione in una base qualunque $(\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n)$ è

$$\bar{\eta} = \frac{1}{\sqrt{\det(g_{hk})}} \bar{b}_1 \wedge \dots \wedge \bar{b}_n = \sqrt{\det(g^{hk})} \bar{b}_1 \wedge \dots \wedge \bar{b}_n. \square$$

1.5 Applicazioni differenziabili

Riassumiamo brevemente le nozioni fondamentali sulle applicazioni differenziabili tra spazi affini.

Usualmente, queste nozioni sono introdotte per gli spazi numerici \mathbb{R}^n (o, più generalmente, per spazi vettoriali). Ma la nostra formulazione intrinseca della meccanica richiede gli spazi affini. D'altra parte, gli spazi affini sono proprio gli spazi con le proprietà minime necessarie per introdurre la nozione di differenziabilità. Infatti, in uno spazio vettoriale abbiamo un'origine (il vettore nullo) che non gioca nessun ruolo essenziale ai fini del concetto di differenziabilità. A maggior ragione, in \mathbb{R}^n abbiamo un'origine, una base privilegiata ed una metrica euclidea, che non giocano nessun ruolo essenziale ai fini del concetto di differenziabilità.

In questo contesto ci riferiamo sempre a spazi affini e vettoriali di dimensione finita.

Per parlare di differenziabilità abbiamo bisogno di considerare infinitesimi di ordine superiore al primo e per parlare di infinitesimi abbiamo bisogno di riferirci ad una norma (per esempio, generata da una metrica euclidea). Ma, si può dimostrare che in spazi vettoriali a dimensione finita tutte le norme sono equivalenti. Perciò, non abbiamo stretto bisogno di scegliere esplicitamente una norma particolare. D'altra parte, se vogliamo essere più concreti, allora possiamo assumere (per esempio) una metrica euclidea negli spazi vettoriali in cui abbiamo bisogno di una norma.

La presente trattazione è introduttiva e schematica. Per ulteriori dettagli, sviluppi ed approfondimenti rimandiamo al corso di Analisi Matematica.

1.5.1 Applicazioni differenziabili e derivate

Consideriamo due spazi affini \mathbf{A} e \mathbf{B} ed un'applicazione $f : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$.

1.5.1 Definizione. Diciamo che l'applicazione f è *differenziabile* se vale l'uguaglianza

$$f(a + \bar{h}) = f(a) + (Df)_a(\bar{h}) + \bar{o}_a(\bar{h}), \quad \forall a \in \mathbf{A}, \forall \bar{h} \in \bar{\mathbf{A}},$$

dove $(Df)_a : \bar{\mathbf{A}} \rightarrow \bar{\mathbf{B}}$ è un'applicazione lineare ed $\bar{o}_a(\bar{h}) \in \bar{\mathbf{B}}$ è un infinitesimo di ordine superiore ad \bar{h} .

Si dimostra facilmente che, se l'uguaglianza precedente è verificata, allora l'applicazione lineare $(Df)_a : \bar{\mathbf{A}} \rightarrow \bar{\mathbf{B}}$ è unicamente definita.

Se l'applicazione f è differenziabile, allora l'applicazione

$$Df : \mathbf{A} \rightarrow \text{Lin}(\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}}) \simeq \bar{\mathbf{A}}^* \otimes \bar{\mathbf{B}} : a \mapsto (Df)_a$$

è detta la *derivata* di f .

Per ogni campo vettoriale $\bar{u} : \mathbf{A} \rightarrow \bar{\mathbf{A}}$, definiamo l'applicazione

$$D_{\bar{u}}f : \mathbf{A} \rightarrow \bar{\mathbf{B}} : a \mapsto (Df)_a(\bar{u}(a)). \quad \square$$

1.5.2 Nota. Se l'applicazione f è differenziabile, allora essa può essere approssimata nell'intorno di ogni punto $o \in \mathbf{A}$ mediante l'applicazione affine

$$f(a) = f(o) + (Df)_o(a - o), \quad \forall a \in \mathbf{A},$$

commettendo un errore che è un infinitesimo di ordine superiore ad $(a - o)$. \square

Analizziamo più in dettaglio alcuni casi notevoli con riferimento a diverse scelte degli spazi \mathbf{A} e \mathbf{B} .

1.5.3 Esempio. Le definizioni precedenti valgono senza nessun cambiamento essenziale nei casi particolari in cui $\mathbf{A} \equiv \mathbf{U}$ sia uno spazio vettoriale, o $\mathbf{B} \equiv \mathbf{V}$ sia uno spazio vettoriale, o entrambi siano spazi vettoriali. L'unica semplificazione da tenere in conto è che in tali casi abbiamo $\bar{\mathbf{A}} \equiv \bar{\mathbf{U}} = \mathbf{U}$ e $\bar{\mathbf{B}} \equiv \bar{\mathbf{V}} = \mathbf{V}$. \square

1.5.4 Esempio. Consideriamo il caso particolare in cui $\mathbf{A} = \mathbf{B} \equiv \mathbb{R}$. La funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è differenziabile se

$$f(x + h) = f(x) + (Df)_x(h) + o_x(h), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall h \in \mathbb{R},$$

dove $(Df)_x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è un'applicazione lineare ed $o_x(h) \in \mathbb{R}$ è un infinitesimo di ordine superiore ad h . Inoltre, abbiamo l'identificazione naturale

$$\text{Lin}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^* \otimes \mathbb{R} \simeq \mathbb{R},$$

per cui possiamo scrivere

$$Df : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Mettendo in evidenza il punto di applicazione della derivata, chiamiamo *differenziale* di f l'applicazione

$$df : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x \mapsto (x, (Df)_x). \square$$

Consideriamo ora uno spazio affine \mathbf{P} .

1.5.5 Esempio. Consideriamo il caso particolare in cui $\mathbf{A} \equiv \mathbb{R}$ e $\mathbf{B} \equiv \mathbf{P}$. La curva $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbf{P}$ è differenziabile se

$$c(\lambda + h) = c(\lambda) + (Dc)_\lambda(h) + \bar{o}_\lambda(h), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall h \in \mathbb{R},$$

dove $(Dc)_\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \bar{\mathbf{P}}$ è un'applicazione lineare ed $\bar{o}_\lambda(h) \in \bar{\mathbf{P}}$ è un infinitesimo di ordine superiore ad h . Inoltre, abbiamo l'identificazione naturale

$$\text{Lin}(\mathbb{R}, \bar{\mathbf{P}}) \equiv \mathbb{R} \otimes \bar{\mathbf{P}} \equiv \bar{\mathbf{P}},$$

per cui possiamo scrivere

$$Dc : \mathbb{R} \rightarrow \bar{\mathbf{P}}.$$

Mettendo in evidenza il punto di applicazione della derivata, chiamiamo *differenziale* di c l'applicazione

$$dc : \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P} \times \bar{\mathbf{P}} : \lambda \mapsto (\lambda, (Dc)_\lambda) . \square$$

1.5.6 Esempio. Consideriamo il caso particolare in cui $\mathbf{A} \equiv \mathbf{P}$ e $\mathbf{B} \equiv \mathbb{R}$. La funzione $\phi : \mathbf{P} \rightarrow \mathbb{R}$ è differenziabile se

$$\phi(p + \bar{h}) = \phi(p) + (D\phi)_p(\bar{h}) + o_p(\bar{h}), \quad \forall p \in \mathbf{P}, \forall \bar{h} \in \bar{\mathbf{P}},$$

dove $(D\phi)_p : \bar{\mathbf{P}} \rightarrow \mathbb{R}$ è un'applicazione lineare ed $o_p(\bar{h}) \in \mathbb{R}$ è un infinitesimo di ordine superiore ad \bar{h} . Inoltre, abbiamo

$$\text{Lin}(\bar{\mathbf{P}}, \mathbb{R}) \equiv \bar{\mathbf{P}}^*,$$

per cui possiamo scrivere

$$D\phi : \mathbf{P} \rightarrow \bar{\mathbf{P}}^* .$$

Mettendo in evidenza il punto di applicazione della derivata, chiamiamo *differenziale* di ϕ l'applicazione

$$d\phi : \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P} \times \bar{\mathbf{P}}^* : p \mapsto (p, (D\phi)_p) . \square$$

1.5.7 Esempio. Consideriamo il caso particolare in cui $\mathbf{A} \equiv \mathbf{B} \equiv \mathbf{P}$. La trasformazione $f : \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P}$ è differenziabile se

$$f(p + \bar{h}) = f(p) + (Df)_p(\bar{h}) + \bar{o}_p(\bar{h}), \quad \forall p \in \mathbf{P}, \forall \bar{h} \in \bar{\mathbf{P}},$$

dove $(Df)_p : \bar{\mathbf{P}} \rightarrow \bar{\mathbf{P}}$ è un'applicazione lineare ed $\bar{o}_p(\bar{h}) \in \bar{\mathbf{P}}$ è un infinitesimo di ordine superiore ad \bar{h} . Inoltre, abbiamo

$$\text{Lin}(\bar{\mathbf{P}}, \bar{\mathbf{P}}) \equiv \bar{\mathbf{P}}^* \otimes \bar{\mathbf{P}},$$

per cui possiamo scrivere

$$Df : \mathbf{P} \rightarrow \bar{\mathbf{P}}^* \otimes \bar{\mathbf{P}} . \square$$

1.5.8 Esempio. Consideriamo il caso particolare in cui $\mathbf{A} = \mathbf{P}$ e $\mathbf{B} = \bar{\mathbf{P}}$. Il campo vettoriale $\bar{v} : \mathbf{P} \rightarrow \bar{\mathbf{P}}$ è differenziabile se

$$\bar{v}(p + \bar{h}) = \bar{v}(p) + (D\bar{v})_p(\bar{h}) + \bar{o}_p(\bar{h}), \quad \forall p \in \mathbf{P}, \forall \bar{h} \in \bar{\mathbf{P}},$$

dove $(D\bar{v})_p : \bar{\mathbf{P}} \rightarrow \bar{\mathbf{P}}$ è un'applicazione lineare ed $\bar{o}_p(\bar{h}) \in \bar{\mathbf{P}}$ è un infinitesimo di ordine superiore ad \bar{h} . Inoltre, abbiamo

$$\text{Lin}(\bar{\mathbf{P}}, \bar{\mathbf{P}}) \equiv \bar{\mathbf{P}}^* \otimes \bar{\mathbf{P}},$$

per cui possiamo scrivere

$$D\bar{v} : \mathbf{P} \rightarrow \bar{\mathbf{P}}^* \otimes \bar{\mathbf{P}} .$$

Mettendo in evidenza il punto di applicazione della derivata, chiamiamo *differenziale covariante* di \bar{v} l'applicazione

$$\nabla \bar{v} : \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P} \times (\bar{\mathbf{P}}^* \otimes \bar{\mathbf{P}}) : p \mapsto (p, (D\bar{v})_p).$$

Per ogni campo vettoriale $\bar{u} : \mathbf{P} \rightarrow \bar{\mathbf{P}}$, definiamo l'applicazione

$$\nabla_{\bar{u}} \bar{v} : \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P} \times \bar{\mathbf{P}} : p \mapsto (p, (D\bar{v})_p(\bar{u}(p))). \square$$

1.5.9 Esempio. Consideriamo il caso particolare in cui $\mathbf{A} = \mathbf{P}$ e $\mathbf{B} = \bar{\mathbf{P}}^*$. La forma differenziale $\alpha : \mathbf{P} \rightarrow \bar{\mathbf{P}}^*$ è differenziabile se

$$\alpha(p + \bar{h}) = \alpha(p) + (D\alpha)_p(\bar{h}) + \mathfrak{o}_p(\bar{h}), \quad \forall p \in \mathbf{P}, \forall \bar{h} \in \bar{\mathbf{P}},$$

dove $(D\alpha)_p : \bar{\mathbf{P}} \rightarrow \bar{\mathbf{P}}^*$ è un'applicazione lineare ed $\mathfrak{o}_p(\bar{h}) \in \bar{\mathbf{P}}^*$ è un infinitesimo di ordine superiore ad \bar{h} . Inoltre, abbiamo

$$\text{Lin}(\bar{\mathbf{P}}, \bar{\mathbf{P}}^*) \equiv \bar{\mathbf{P}}^* \otimes \bar{\mathbf{P}},$$

per cui possiamo scrivere

$$D\alpha : \mathbf{P} \rightarrow \bar{\mathbf{P}}^* \otimes \bar{\mathbf{P}}.$$

Mettendo in evidenza il punto di applicazione della derivata, chiamiamo *differenziale covariante* di α l'applicazione

$$\nabla \alpha : \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P} \times (\bar{\mathbf{P}}^* \otimes \bar{\mathbf{P}}) : p \mapsto (p, (D\alpha)_p).$$

Per ogni campo vettoriale $\bar{u} : \mathbf{P} \rightarrow \bar{\mathbf{P}}$, definiamo l'applicazione

$$\nabla_{\bar{u}} \alpha : \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P} \times \bar{\mathbf{P}}^* : p \mapsto (p, (D\alpha)_p(\bar{u}(p))). \square$$

1.5.10 Esempio. Consideriamo il caso particolare in cui $\mathbf{A} = \mathbf{P}$ e $\mathbf{B} = \bar{\mathbf{P}} \otimes \bar{\mathbf{P}}$. Il campo tensoriale controvariante $\bar{\tau} : \mathbf{P} \rightarrow \bar{\mathbf{P}} \otimes \bar{\mathbf{P}}$ è differenziabile se

$$\bar{\tau}(p + \bar{h}) = \bar{\tau}(p) + (D\bar{\tau})_p(\bar{h}) + \bar{\mathfrak{o}}_p(\bar{h}), \quad \forall p \in \mathbf{P}, \forall \bar{h} \in \bar{\mathbf{P}},$$

dove $(D\bar{\tau})_p : \bar{\mathbf{P}} \rightarrow \bar{\mathbf{P}}^* \otimes (\bar{\mathbf{P}} \otimes \bar{\mathbf{P}})$ è un'applicazione lineare ed $\bar{\mathfrak{o}}_p(\bar{h}) \in \bar{\mathbf{P}} \otimes \bar{\mathbf{P}}$ è un infinitesimo di ordine superiore ad \bar{h} . Inoltre, abbiamo

$$\text{Lin}(\bar{\mathbf{P}}, \bar{\mathbf{P}} \otimes \bar{\mathbf{P}}) \equiv \bar{\mathbf{P}}^* \otimes (\bar{\mathbf{P}} \otimes \bar{\mathbf{P}}),$$

per cui possiamo scrivere

$$D\bar{\tau} : \mathbf{P} \rightarrow \bar{\mathbf{P}}^* \otimes (\bar{\mathbf{P}} \otimes \bar{\mathbf{P}}).$$

Mettendo in evidenza il punto di applicazione della derivata, chiamiamo *differenziale covariante* di $\bar{\tau}$ l'applicazione

$$\nabla \bar{\tau} : \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P} \times (\bar{\mathbf{P}}^* \otimes (\bar{\mathbf{P}} \otimes \bar{\mathbf{P}})) : p \mapsto (p, (D\bar{\tau})_p).$$

Per ogni campo vettoriale $\bar{u} : \mathbf{P} \rightarrow \bar{\mathbf{P}}$, definiamo l'applicazione

$$\nabla_{\bar{u}}\bar{\tau} : \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P} \times (\bar{\mathbf{P}} \otimes \bar{\mathbf{P}}) : p \mapsto (p, (D\bar{\tau})_p(\bar{u}(p))). \square$$

1.5.11 Esempio. Consideriamo il caso particolare in cui $\mathbf{A} = \mathbf{P}$ e $\mathbf{B} = \bar{\mathbf{P}}^* \otimes \bar{\mathbf{P}}^*$. Il campo tensoriale covariante $\bar{\tau} : \mathbf{P} \rightarrow \bar{\mathbf{P}}^* \otimes \bar{\mathbf{P}}^*$ è differenziabile se

$$\bar{\tau}(p + \bar{h}) = \bar{\tau}(p) + (D\bar{\tau})_p(\bar{h}) + \mathcal{o}_p(\bar{h}), \quad \forall p \in \mathbf{P}, \forall \bar{h} \in \bar{\mathbf{P}},$$

dove $(D\bar{\tau})_p : \bar{\mathbf{P}} \rightarrow \bar{\mathbf{P}}^* \otimes (\bar{\mathbf{P}}^* \otimes \bar{\mathbf{P}}^*)$ è un'applicazione lineare ed $\mathcal{o}_p(\bar{h}) \in \bar{\mathbf{P}}^* \otimes \bar{\mathbf{P}}^*$ è un infinitesimo di ordine superiore ad \bar{h} . Inoltre, abbiamo

$$\text{Lin}(\bar{\mathbf{P}}, \bar{\mathbf{P}}^* \otimes \bar{\mathbf{P}}^*) \equiv \bar{\mathbf{P}}^* \otimes (\bar{\mathbf{P}}^* \otimes \bar{\mathbf{P}}^*),$$

per cui possiamo scrivere

$$D\bar{\tau} : \mathbf{P} \rightarrow \bar{\mathbf{P}}^* \otimes (\bar{\mathbf{P}}^* \otimes \bar{\mathbf{P}}^*).$$

Mettendo in evidenza il punto di applicazione della derivata, chiamiamo *differenziale covariante* di $\bar{\tau}$ l'applicazione

$$\nabla\bar{\tau} : \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P} \times (\bar{\mathbf{P}}^* \otimes (\bar{\mathbf{P}}^* \otimes \bar{\mathbf{P}}^*)) : p \mapsto (p, (D\bar{\tau})_p).$$

Per ogni campo vettoriale $\bar{u} : \mathbf{P} \rightarrow \bar{\mathbf{P}}$, definiamo l'applicazione

$$\nabla_{\bar{u}}\bar{\tau} : \mathbf{P} \rightarrow \bar{\mathbf{P}}^* \otimes (\bar{\mathbf{P}}^* \otimes \bar{\mathbf{P}}^*) : p \mapsto (p, (D\bar{\tau})_p(\bar{u}(p))). \square$$

1.5.12 Esempio. Consideriamo il caso particolare in cui $\mathbf{A} = \mathbf{P}$ e $\mathbf{B} = \bar{\mathbf{P}}^* \otimes \bar{\mathbf{P}}$. Il campo tensoriale misto $\hat{\tau} : \mathbf{P} \rightarrow \bar{\mathbf{P}}^* \otimes \bar{\mathbf{P}}$ è differenziabile se

$$\hat{\tau}(p + \bar{h}) = \hat{\tau}(p) + (D\hat{\tau})_p(\bar{h}) + \hat{\mathcal{o}}_p(\bar{h}), \quad \forall p \in \mathbf{P}, \forall \bar{h} \in \bar{\mathbf{P}},$$

dove $(D\hat{\tau})_p : \bar{\mathbf{P}} \rightarrow \bar{\mathbf{P}}^* \otimes (\bar{\mathbf{P}}^* \otimes \bar{\mathbf{P}})$ è un'applicazione lineare ed $\hat{\mathcal{o}}_p(\bar{h}) \in \bar{\mathbf{P}}^* \otimes \bar{\mathbf{P}}$ è un infinitesimo di ordine superiore ad \bar{h} . Inoltre, abbiamo

$$\text{Lin}(\bar{\mathbf{P}}, \bar{\mathbf{P}}^* \otimes \bar{\mathbf{P}}) \equiv \bar{\mathbf{P}}^* \otimes (\bar{\mathbf{P}}^* \otimes \bar{\mathbf{P}}),$$

per cui possiamo scrivere

$$D\hat{\tau} : \mathbf{P} \rightarrow \bar{\mathbf{P}}^* \otimes (\bar{\mathbf{P}}^* \otimes \bar{\mathbf{P}}).$$

Mettendo in evidenza il punto di applicazione della derivata, chiamiamo *differenziale covariante* di $\hat{\tau}$ l'applicazione

$$\nabla\hat{\tau} : \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P} \times (\bar{\mathbf{P}}^* \otimes (\bar{\mathbf{P}}^* \otimes \bar{\mathbf{P}})) : p \mapsto (p, (D\hat{\tau})_p)$$

e, per ogni campo vettoriale $\bar{u} : \mathbf{P} \rightarrow \bar{\mathbf{P}}$, definiamo l'applicazione

$$\nabla_{\bar{u}}\hat{\tau} : \mathbf{P} \rightarrow \bar{\mathbf{P}}^* \otimes (\bar{\mathbf{P}}^* \otimes \bar{\mathbf{P}}) : p \mapsto (p, (D\hat{\tau})_p(\bar{u}(p))). \square$$

1.5.13 Esempio. In modo analogo, possiamo analizzare la derivata di ogni campo tensoriale controvariante, covariante e misto, adottando un simbolo analogo di differenziale covariante.

Dunque, derivando un campo tensoriale si ottiene un campo tensoriale con un primo indice covariante aggiunto. \square

1.5.2 Derivate parziali

Consideriamo due spazi affini \mathbf{A} , \mathbf{B} e supponiamo che \mathbf{A} sia il prodotto cartesiano di n spazi affini $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 \times \dots \times \mathbf{A}_n$.

1.5.14 Lemma. Se l'applicazione $f : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ è differenziabile, allora le n applicazioni parziali

$$\begin{aligned} f_{(a_2, \dots, a_n)} &: \mathbf{A}_1 \rightarrow \mathbf{B} : a_1 \mapsto f(a_1, \dots, a_n), \\ &\dots \\ f_{(a_1, \dots, a_{n-1})} &: \mathbf{A}_n \rightarrow \mathbf{B} : a_n \mapsto f(a_1, \dots, a_n), \end{aligned}$$

ottenute bloccando, rispettivamente, le $n - 1$ variabili

$$(a_2, \dots, a_n) \in \mathbf{A}_2 \times \dots \times \mathbf{A}_n, \quad \dots, \quad (a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathbf{A}_1 \times \dots \times \mathbf{A}_{n-1},$$

sono differenziabili.

DIMOSTRAZIONE. Segue facilmente dalla definizione di differenziabilità, considerando incrementi $\bar{h} \in \bar{\mathbf{A}}$, rispettivamente, del tipo $\bar{h} = (\bar{h}_1, 0, \dots, 0)$, \dots , $\bar{h} = (0, \dots, 0, \bar{h}_n)$. QED

1.5.15 Definizione. Se $f : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ è un'applicazione differenziabile, allora chiamiamo *derivate parziali* di f le derivate delle applicazioni parziali di f

$$\begin{aligned} (D_1 f)_{(a_2, \dots, a_n)} &:= D(f_{(a_2, \dots, a_n)}) : \mathbf{A}_1 \rightarrow L(\bar{\mathbf{A}}_1, \bar{\mathbf{B}}) : a_1 \mapsto (D(f_{(a_2, \dots, a_n)}))_{a_1}, \\ &\dots \\ (D_n f)_{(a_1, \dots, a_{n-1})} &:= D(f_{(a_1, \dots, a_{n-1})}) : \mathbf{A}_n \rightarrow L(\bar{\mathbf{A}}_n, \bar{\mathbf{B}}) : a_n \mapsto (D(f_{(a_1, \dots, a_{n-1})}))_{a_n}. \end{aligned}$$

Scriviamo anche

$$\begin{aligned} D_1 f : \mathbf{A} &\rightarrow L(\bar{\mathbf{A}}_1, \bar{\mathbf{B}}) : (a_1, \dots, a_n) \mapsto ((D_1 f)_{(a_2, \dots, a_n)})_{a_1}, \\ &\dots \\ D_n f : \mathbf{A} &\rightarrow L(\bar{\mathbf{A}}_n, \bar{\mathbf{B}}) : (a_1, \dots, a_n) \mapsto ((D_n f)_{(a_1, \dots, a_{n-1})})_{a_n}. \quad \square \end{aligned}$$

1.5.16 Proposizione. Se $f : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ è un'applicazione differenziabile, allora abbiamo

$$\begin{aligned} (D_1 f)_{(a_1, \dots, a_n)}(\bar{h}_1) &= (Df)_{(a_1, \dots, a_n)}(\bar{h}_1, 0, \dots, 0), \\ &\dots \\ (D_n f)_{(a_1, \dots, a_n)}(\bar{h}_n) &= (Df)_{(a_1, \dots, a_n)}(0, \dots, 0, \bar{h}_n), \end{aligned}$$

da cui segue

$$(Df)_{(a_1, \dots, a_n)}(\bar{h}_1, \dots, \bar{h}_n) = (D_1 f)_{(a_1, \dots, a_n)}\bar{h}_1 + \dots + (D_n f)_{(a_1, \dots, a_n)}\bar{h}_n,$$

per ogni $a \equiv (a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{A} \equiv \mathbf{A}_1 \times \dots \times \mathbf{A}_n$ e $\bar{h} \equiv (\bar{h}_1, \dots, \bar{h}_n) \in \bar{\mathbf{A}} \equiv \bar{\mathbf{A}}_1 \times \dots \times \bar{\mathbf{A}}_n$.

DIMOSTRAZIONE. Segue facilmente dalla definizione di differenziabilità e derivata. QED

1.5.17 Definizione. Consideriamo due spazi affini \mathbf{A} e \mathbf{B} ed un'applicazione differenziabile

$$c : \mathbb{R} \times \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}.$$

Allora, definiamo *derivata variazionale* di c la derivata parziale di c rispetto al parametro reale, valutata nel valore 0 di tale parametro:

$$\delta c : \mathbf{A} \rightarrow \bar{\mathbf{B}} : a \mapsto (D_1 c)(0, a) \equiv (D(c_a))(0).$$

Mettendo in evidenza il punto di applicazione della derivata, chiamiamo *differenziale variazionale* di c l'applicazione

$$\partial c : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} \times \bar{\mathbf{B}} : a \mapsto (a, (D_1 c)(0, a)) \equiv (a, (D(c_a))(0)). \square$$

1.5.18 Esempio. Consideriamo uno spazio affine \mathbf{P} ed un'applicazione differenziabile

$$c : \mathbb{R} \times \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P},$$

tale che, per ogni $p \in \mathbf{P}$, sia $c(0, p) = p$. Dunque, per ogni $p \in \mathbf{P}$, la curva

$$c_p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbf{P} : \lambda \mapsto c(\lambda, p)$$

passa per p corrispondentemente al valore $\lambda = 0$ del parametro.

Allora, il campo vettoriale (libero)

$$\delta c : \mathbf{P} \rightarrow \bar{\mathbf{P}}$$

associa ad ogni punto $p \in \mathbf{P}$ il vettore tangente in p della curva $c_p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbf{P}$.

Analogamente, il campo vettoriale (applicato)

$$\partial c : \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P} \times \bar{\mathbf{P}}$$

associa ad ogni punto $p \in \mathbf{P}$ il vettore tangente in p della curva $c_p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbf{P}$. \square

1.5.3 Regole di derivazione

1.5.19 Proposizione. [*Regola della catena.*] Consideriamo tre spazi affini \mathbf{A} , \mathbf{B} e \mathbf{C} .

Se le applicazioni $f : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ e $g : \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{C}$ sono differenziabili, allora l'applicazione composta $g \circ f : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{C} : a \mapsto g(f(a))$ è differenziabile e

$$(D(g \circ f))_a = (Dg)_{f(a)} \circ (Df)_a.$$

DIMOSTRAZIONE. La Proposizione segue facilmente dalle definizioni di differenziabilità e di derivata. Infatti, abbiamo

$$\begin{aligned} (g \circ f)(a + \bar{h}) &= g(f(a + \bar{h})) \\ &= g(f(a) + (Df)_a(\bar{h}) + o'_a(\bar{h})) \\ &= g(f(a)) + (Dg)_{f(a)}((Df)_a(\bar{h})) + o''_{f(a)}((Df)_a(\bar{h}) + o'_a(\bar{h})) \\ &= (g \circ f)(a) + ((Dg)_{f(a)} \circ (Df)_a)(\bar{h}) + \bar{o}_{f(a)}(\bar{h}). \text{ QED} \end{aligned}$$

1.5.20 Esempio. Se le applicazioni $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbf{P}$ e $\phi : \mathbf{P} \rightarrow \mathbb{R}$ sono differenziabili, allora la funzione composta $\phi \circ c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è differenziabile e

$$(D(\phi \circ c))_\lambda = \langle D\phi_{c(\lambda)}, Dc_\lambda \rangle := (D\phi_{c(\lambda)})(Dc_\lambda). \square$$

1.5.21 Nota. Sia $f : \mathbf{A} \equiv \mathbf{A}_1 \times \dots \times \mathbf{A}_n \rightarrow \mathbf{B}$ un'applicazione differenziabile. Possiamo riguardare le derivate parziali

$$(D_1 f)_{(a_2, \dots, a_n)} : \mathbf{A}_1 \rightarrow L(\bar{\mathbf{A}}_1, \bar{\mathbf{B}}), \dots, (D_n f)_{(a_1, \dots, a_{n-1})} : \mathbf{A}_n \rightarrow L(\bar{\mathbf{A}}_n, \bar{\mathbf{B}})$$

come le derivate delle applicazioni

$$f \circ (j_{(a_2, \dots, a_n)}) : \mathbf{A}_1 \rightarrow \mathbf{B}, \quad \dots, \quad f \circ (j_{(a_1, \dots, a_{n-1})}) : \mathbf{A}_n \rightarrow \mathbf{B},$$

ottenute componendo l'applicazione f con le inclusioni affini

$$j_{(a_2, \dots, a_n)} : \mathbf{A}_1 \rightarrow \mathbf{A} : a_1 \mapsto (a_1, \dots, a_n), \quad \dots, \quad j_{(a_1, \dots, a_{n-1})} : \mathbf{A}_n \rightarrow \mathbf{A} : a_n \mapsto (a_1, \dots, a_n).$$

Allora, la Proposizione 1.5.16 può essere vista come un corollario della regola della catena. \square

1.5.22 Proposizione. [*Regola della variabile ripetuta.*] Consideriamo quattro spazi affini \mathbf{A} , \mathbf{B}_1 , \mathbf{B}_2 e \mathbf{C} . Consideriamo, inoltre, tre applicazioni differenziabili

$$f_1 : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}_1, \quad f_2 : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}_2, \quad g : \mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_2 \rightarrow \mathbf{C}.$$

Allora l'applicazione composta

$$f \equiv g \circ (f_1, f_2) : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{C} : a \mapsto g(f_1(a), f_2(a))$$

è differenziabile ed abbiamo

$$(Df)_a(\bar{h}) = (D_1g)_{(f_1(a), f_2(a))}((Df_1)_a(\bar{h})) + (D_2g)_{(f_1(a), f_2(a))}((Df_2)_a(\bar{h})).$$

DIMOSTRAZIONE. Segue facilmente dalle definizioni di differenziabilità e di derivate parziali.

Inoltre, questa Proposizione può essere vista come un Corollario della Proposizione 1.5.16 e della regola della catena 1.5.19. QED

1.5.23 Esempio. Consideriamo gli spazi affini $\mathbf{A} = \mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_2 = \mathbf{C} = \mathbb{R}$ e le applicazioni differenziabili

$$\begin{aligned} f_1 : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} : \lambda \mapsto \sin \lambda, & f_2 : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} : \lambda \mapsto \cos \lambda, \\ g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto xy. \end{aligned}$$

Allora, l'applicazione composta

$$f \equiv g \circ (f_1, f_2) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : \lambda \mapsto \sin \lambda \cos \lambda$$

è differenziabile e

$$\begin{aligned} (Df)_\lambda(h) &= (D_1g)_{(f_1(\lambda), f_2(\lambda))}((Df_1)_\lambda(h)) + (D_2g)_{(f_1(\lambda), f_2(\lambda))}((Df_2)_\lambda(h)) \\ &= \cos \lambda \cos \lambda - \sin \lambda \sin \lambda. \square \end{aligned}$$

1.5.24 Nota. Si noti la differenza tra la situazione in cui si applica la regola della catena e la situazione in cui si applica la regola della variabile ripetuta.

Nel primo caso abbiamo una composizione “in serie”,

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)),$$

come indicato dal diagramma seguente

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{A} & \xrightarrow{f} & \mathbf{B} & \xrightarrow{g} & \mathbf{C} \\ \text{id} \downarrow & & & & \uparrow \text{id} \\ \mathbf{A} & & \xrightarrow{g \circ f} & & \mathbf{C} \end{array}$$

Nel secondo caso abbiamo una composizione “in parallelo”,

$$(g \circ (f_1, f_2))(a) = g(f_1(a), f_2(a)),$$

come indicato dal diagramma seguente

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbf{A} & \xrightarrow{(f_1, f_2)} & \mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_2 & \xrightarrow{g} & \mathbf{C} \\
 \text{id} \downarrow & & & & \uparrow \text{id} \\
 \mathbf{A} & & \xrightarrow{g \circ (f_1, f_2)} & & \mathbf{C}
 \end{array}$$

1.5.25 Proposizione. Consideriamo uno spazio affine \mathbf{A} ed uno spazio vettoriale \mathbf{V} .

Se le applicazioni $f : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{V}$ e $g : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{V}$ sono differenziabili, allora l'applicazione somma $f + g : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{V}$ è differenziabile e

$$D(f + g) = Df + Dg.$$

Se l'applicazione $f : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{V}$ è differenziabile e $k \in \mathbb{R}$, allora l'applicazione prodotto $kf : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{V}$ è differenziabile e

$$D(kf) = k(Df).$$

DIMOSTRAZIONE. Segue immediatamente dalle definizioni di differenziabilità e di derivata. QED

1.5.26 Proposizione. Consideriamo due spazi affini \mathbf{A} e \mathbf{B} .

Se l'applicazione $f : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ è affine, allora essa è differenziabile e

$$Df : \mathbf{A} \rightarrow L(\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}}) \text{ è costante, } \quad \bar{o}_a(\bar{h}) = 0.$$

DIMOSTRAZIONE. Segue immediatamente dalle definizioni di differenziabilità, di derivata e di applicazione affine. QED

1.5.27 Proposizione. Consideriamo due spazi vettoriali \mathbf{V} e \mathbf{W} .

Se l'applicazione $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ è lineare, allora essa è differenziabile e

$$Df : \mathbf{V} \rightarrow L(\bar{\mathbf{V}}, \bar{\mathbf{W}}) \text{ è costante, } \quad (Df)_{\bar{v}}(\bar{h}) = f(\bar{h}), \quad \bar{o}_{\bar{v}}(\bar{h}) = 0.$$

DIMOSTRAZIONE. Segue immediatamente dalle definizioni di differenziabilità e di derivata. Infatti, per la linearità abbiamo l'uguaglianza

$$f(\bar{v} + \bar{h}) = f(\bar{v}) + f(\bar{h}),$$

che può essere letta come segue

$$f(\bar{v} + \bar{h}) = f(\bar{v}) + (Df)_{\bar{v}}(\bar{h}). \text{ QED}$$

1.5.28 Proposizione. Consideriamo tre spazi vettoriali \mathbf{V}_1 , \mathbf{V}_2 e \mathbf{W} .

Se l'applicazione $f : \mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_2 \rightarrow \mathbf{W}$ è bilineare, allora essa è differenziabile e

$$(D_1 f)_{(\bar{v}_1, \bar{v}_2)}(\bar{h}_1) = f(\bar{h}_1, \bar{v}_2) \quad \text{e} \quad (D_2 f)_{(\bar{v}_1, \bar{v}_2)}(\bar{h}_2) = f(\bar{v}_1, \bar{h}_2).$$

DIMOSTRAZIONE. Segue facilmente dalle definizioni di differenziabilità e di derivata. Infatti, per la bilinearità abbiamo l'uguaglianza

$$f(\bar{v}_1 + \bar{h}_1, \bar{v}_1 + \bar{h}_1) = f(\bar{v}_1, \bar{v}_2) + f(\bar{h}_1, \bar{v}_2) + f(\bar{v}_1, \bar{h}_2) + f(\bar{h}_1, \bar{h}_2),$$

che può essere letta come segue

$$f(\bar{v}_1 + \bar{h}_1, \bar{v}_1 + \bar{h}_1) = f(\bar{v}_1, \bar{v}_2) + (D_1 f)_{(\bar{v}_1, \bar{v}_2)}(\bar{h}_1) + (D_2 f)_{(\bar{v}_1, \bar{v}_2)}(\bar{h}_1, \bar{h}_2) + \bar{o}_{(\bar{v}_1, \bar{v}_2)}(\bar{h}_1, \bar{h}_2). \text{ QED}$$

1.5.29 Proposizione. [*Regola di Leibniz.*] Consideriamo uno spazio affine \mathbf{A} e tre spazi vettoriali \mathbf{V}_1 , \mathbf{V}_2 e \mathbf{W} . Consideriamo, inoltre, un'applicazione bilineare

$$\odot : \mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_2 \rightarrow \mathbf{W} : (\bar{v}_1, \bar{v}_2) \mapsto \bar{v}_1 \odot \bar{v}_2.$$

Se le applicazioni $f_1 : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{V}_1$ ed $f_2 : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{V}_2$ sono differenziabili, allora l'applicazione

$$f_1 \odot f_2 : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{W} : a \mapsto f_1(a) \odot f_2(a)$$

è differenziabile ed abbiamo

$$D_{\bar{h}}(f_1 \odot f_2) = (D_{\bar{h}} f_1) \odot f_2 + f_1 \odot (D_{\bar{h}} f_2).$$

DIMOSTRAZIONE. Segue facilmente dalle definizioni di differenziabilità e di derivata.

Inoltre, questa Proposizione può essere vista come un Corollario della regola della variabile ripetuta 1.5.22 e della Proposizione 1.5.28. QED

1.5.30 Esempio. Consideriamo lo spazio affine \mathbf{P} e due campi vettoriali differenziabili $\bar{u} : \mathbf{P} \rightarrow \bar{\mathbf{P}}$ e $\bar{v} : \mathbf{P} \rightarrow \bar{\mathbf{P}}$.

Allora, per ogni campo vettoriale $\bar{h} : \mathbf{P} \rightarrow \bar{\mathbf{P}}$, abbiamo

$$D_{\bar{h}}(\bar{u} \otimes \bar{v}) = (D_{\bar{h}} \bar{u}) \otimes \bar{v} + \bar{u} \otimes (D_{\bar{h}} \bar{v}). \square$$

1.5.31 Esempio. Consideriamo lo spazio affine \mathbf{P} ed un campo vettoriale $\bar{u} : \mathbf{P} \rightarrow \bar{\mathbf{P}}$ ed un campo di operatori lineari $\hat{f} : \bar{\mathbf{P}} \rightarrow L(\bar{\mathbf{P}}, \bar{\mathbf{P}}) \simeq \bar{\mathbf{P}}^* \otimes \bar{\mathbf{P}}$.

Allora, per ogni campo vettoriale $\bar{h} : \mathbf{P} \rightarrow \bar{\mathbf{P}}$, abbiamo

$$D_{\bar{h}}(\hat{f}(\bar{u})) = (D_{\bar{h}} \hat{f})(\bar{u}) + \hat{f}(D_{\bar{h}} \bar{u}). \square$$

1.5.32 Nota. Possiamo confrontare le due situazioni in cui è possibile applicare la regola della catena o la regola di Leibniz in modo analogo alla Nota 1.5.24. \square

1.5.4 Derivate seconde

Consideriamo due spazi affini \mathbf{A} e \mathbf{B} ed un'applicazione differenziabile $f : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$; supponiamo che la derivata di f

$$Df : \mathbf{A} \rightarrow L(\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}}) \simeq \bar{\mathbf{A}}^* \otimes \bar{\mathbf{B}}$$

sia a sua volta differenziabile.

1.5.33 Definizione. Definiamo *derivata seconda* di f la derivata della derivata di f

$$D^2f := D(Df) : \mathbf{A} \rightarrow L(\bar{\mathbf{A}}, L(\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}})) \simeq \bar{\mathbf{A}}^* \otimes (\bar{\mathbf{A}}^* \otimes \bar{\mathbf{B}}). \square$$

1.5.34 Nota. Possiamo scrivere

$$D^2f : \mathbf{A} \rightarrow L^2(\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}}) \simeq \bar{\mathbf{A}}^* \otimes \bar{\mathbf{A}}^* \otimes \bar{\mathbf{B}}.$$

DIMOSTRAZIONE. Segue immediatamente dagli isomorfismi naturali

$$L(\bar{\mathbf{A}}, L(\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}})) \simeq L^2(\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}}) \simeq \bar{\mathbf{A}}^* \otimes \bar{\mathbf{A}}^* \otimes \bar{\mathbf{B}}. \text{ QED}$$

1.5.35 Proposizione. *Schwarz.* La derivata seconda di f è simmetrica:

$$D^2f : \mathbf{A} \rightarrow \text{Sim}^2(\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}}).$$

In altre parole, per ogni coppia di campi vettoriali $\bar{u}, \bar{v} : \mathbf{A} \rightarrow \bar{\mathbf{A}}$, abbiamo

$$(D^2f)(\bar{u}, \bar{v}) = (D^2f)(\bar{v}, \bar{u}).$$

DIMOSTRAZIONE. Per la dimostrazione rimandiamo al corso di Analisi Matematica. \square

1.5.36 Esempio. Consideriamo il caso particolare in cui $\mathbf{A} = \mathbf{B} \equiv \mathbb{R}$. La derivata seconda di una funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione:

$$D^2f : \mathbb{R} \rightarrow L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}. \square$$

Consideriamo uno spazio affine \mathbf{P} .

1.5.37 Esempio. Consideriamo il caso particolare in cui $\mathbf{A} \equiv \mathbb{R}$ e $\mathbf{B} \equiv \mathbf{P}$. La derivata seconda di una curva $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbf{P}$ è una curva a valori in $\bar{\mathbf{P}}$

$$D^2c : \mathbb{R} \rightarrow L^2(\mathbb{R}, \bar{\mathbf{P}}) \simeq \bar{\mathbf{P}}. \square$$

1.5.38 Esempio. Consideriamo il caso particolare in cui $\mathbf{A} \equiv \mathbf{P}$ e $\mathbf{B} \equiv \mathbb{R}$. La derivata seconda di una funzione $\phi : \mathbf{P} \rightarrow \mathbb{R}$ è un campo tensoriale covariante simmetrico

$$D^2\phi : \mathbf{P} \rightarrow L^2(\bar{\mathbf{P}}, \mathbb{R}) \simeq \bar{\mathbf{P}}^* \otimes \bar{\mathbf{P}}^*. \square$$

1.5.39 Esempio. Consideriamo il caso particolare in cui $\mathbf{A} \equiv \mathbf{B} \equiv \mathbf{P}$. La derivata seconda di una trasformazione $f : \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P}$ è un campo tensoriale due volte covariante ed una volta controvariante, simmetrico rispetto agli indici covarianti,

$$D^2f : \mathbf{P} \rightarrow L^2(\bar{\mathbf{P}}^*, \bar{\mathbf{P}}) \simeq \bar{\mathbf{P}}^* \otimes \bar{\mathbf{P}}^* \otimes \bar{\mathbf{P}}. \square$$

1.5.40 Esempio. Consideriamo il caso particolare in cui $\mathbf{A} = \mathbf{P}$ e $\mathbf{B} = \bar{\mathbf{P}}$. La derivata seconda di un campo vettoriale $\bar{v} : \mathbf{P} \rightarrow \bar{\mathbf{P}}$ è un campo tensoriale due volte covariante ed una volta controvariante, simmetrico rispetto agli indici covarianti,

$$D^2\bar{v} : \mathbf{P} \rightarrow L^2(\bar{\mathbf{P}}^*, \bar{\mathbf{P}}) \simeq \bar{\mathbf{P}}^* \otimes \bar{\mathbf{P}}^* \otimes \bar{\mathbf{P}}. \square$$

1.5.41 Esempio. Consideriamo il caso particolare in cui $\mathbf{A} = \mathbf{P}$ e $\mathbf{B} = \bar{\mathbf{P}}^*$. La derivata seconda di una forma differenziale $\underline{\alpha} : \mathbf{P} \rightarrow \bar{\mathbf{P}}^*$ è un campo tensoriale tre volte covariante, simmetrico rispetto ai primi due indici covarianti,

$$D^2\underline{\alpha} : \mathbf{P} \rightarrow L^2(\bar{\mathbf{P}}^*, \bar{\mathbf{P}}^*) \simeq \bar{\mathbf{P}}^* \otimes \bar{\mathbf{P}}^* \otimes \bar{\mathbf{P}}^*. \square$$

1.6 Sistemi di coordinate

Riassumiamo brevemente le nozioni fondamentali sui sistemi di coordinate di uno spazio affine e studiamo, in particolare, i sistemi di coordinate cartesiano, cilindrico e sferico.

Un sistema di coordinate permette di rappresentare numericamente uno spazio affine. Inoltre, un sistema di coordinate induce in modo naturale una base dello spazio dei vettori e la base duale dello spazio dei covettori, per ogni punto dello spazio affine. Nel caso particolare di un sistema di coordinate cartesiano tali basi non dipendono dal punto di applicazione.

Consideriamo uno spazio affine \mathbf{P} di dimensione 3 con una metrica euclidea g .

1.6.1 Funzioni e curve coordinate

1.6.1 Definizione. Definiamo *sistema di coordinate* un'applicazione invertibile

$$x \equiv (x^i) : \mathbf{P} \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

di classe C^∞ insieme alla sua inversa

$$x^{-1} \equiv (x^i)^{-1} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbf{P}. \square$$

1.6.2 Nota. Il sistema di coordinate è caratterizzato dalle 3 *funzioni coordinate*

$$x^i : \mathbf{P} \rightarrow \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, 3. \square$$

1.6.3 Nota. Inoltre, il sistema di coordinate è caratterizzato dalla famiglia di *curve coordinate*

$$(x_i) : \mathbb{R} \times \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P} : (\lambda, p) \mapsto x_{ip}(\lambda),$$

definita nel modo seguente: per ogni punto $p \in \mathbf{P}$, le curve coordinate

$$x_{ip} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbf{P}, \quad i = 1, 2, 3,$$

sono caratterizzate dalle relazioni

$$x^j(x_{ip}(\lambda)) = x^j(p) + \delta_i^j \lambda. \square$$

1.6.4 Nota. In altre parole, per ogni punto $p \in \mathbf{P}$, abbiamo tre curve coordinate $x_{ip} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbf{P}$, con $i = 1, 2, 3$, e la i -ma curva coordinata x_{ip} può essere descritta come segue.

Le funzioni coordinate con indice j diverso da i sono costanti lungo la curva coordinata x_{ip} ; dunque, per ogni valore del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$, abbiamo $x^j(x_{ip}(\lambda)) = x^j(p)$. Questa condizione determina l'immagine della curva coordinata i -ma.

Inoltre, per ogni valore del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$, il punto $x_{ip}(\lambda)$ della curva è il punto il cui valore della coordinata i -ma è caratterizzato da $x^i(p) + \lambda$. Dunque, la curva coordinata x_{ip} passa per p corrispondentemente al valore del parametro $\lambda = 0$.

Notiamo che se un punto p' appartiene all'immagine della curva x_{ip} , cioè se per un certo valore λ del parametro abbiamo $p' = x_{ip}(\lambda)$, allora le immagini delle due curve $x_{ip'}$ e x_{ip} coincidono, ma le loro parametrizzazioni differiscono per la costante additiva $x^i(p') - x^i(p) \in \mathbb{R}$. \square

1.6.5 Lemma. Le funzioni coordinate $x^i : \mathbf{P} \rightarrow \mathbb{R}$ e, per ogni punto $p \in \mathbf{P}$, le curve coordinate x_{ip} sono di classe C^∞ . \square

1.6.6 Proposizione. Per ogni punto $p \in \mathbf{P}$, i vettori tangenti in p alle tre curve coordinate passanti per p

$$\delta x_i(p) := (D_1 x_i)(0, p) \equiv (D(x_{ip}))(0) \in \bar{\mathbf{P}}, \quad i = 1, 2, 3,$$

costituiscono una base di $\bar{\mathbf{P}}$.

Analogamente, per ogni punto $p \in \mathbf{P}$, le derivate in p delle funzioni coordinate

$$(Dx^i)(p) \in \bar{\mathbf{P}}^*, \quad i = 1, 2, 3,$$

costituiscono una base di $\bar{\mathbf{P}}^*$.

Queste basi sono una la duale dell'altra, cioè abbiamo

$$\langle Dx_j, \delta x_i \rangle \equiv (Dx_j)(\delta x_i) = \delta_i^j.$$

DIMOSTRAZIONE. Sgue immediatamente dalla definizione di curva coordinata e della regola della catena.

Infatti, derivando entrambi i membri dell'uguaglianza

$$x^j(x_{ip}(\lambda)) = x^j(p) + \delta_i^j \lambda$$

rispetto al parametro λ e tenendo conto della regola della catena, otteniamo, per $\lambda = 0$,

$$\langle Dx^j(p), \delta x_i(p) \rangle = \delta_i^j.$$

D'altra parte, un teorema elementare di algebra lineare dice che, in uno spazio vettoriale di dimensione 3, se 3 vettori e 3 forme soddisfano l'uguaglianza precedente, allora essi costituiscono una base e la base duale. QED

Considereremo anche i campi vettoriali (applicati) e le forme differenziali (applicate)

$$\begin{aligned} \partial x_i : \mathbf{P} &\rightarrow \mathbf{P} \times \bar{\mathbf{P}} : p \mapsto (p, \delta x_i(p)) \\ dx^i : \mathbf{P} &\rightarrow \mathbf{P} \times \bar{\mathbf{P}}^* : p \mapsto (p, dx^i(p)), \end{aligned}$$

per cui valgono relazioni analoghe a quelle dei corrispondenti campi liberi.

La base e la sua duale indotte da un sistema di coordinate inducono, punto per punto, una rappresentazione matriciale dei campi di vettori.

1.6.7 Corollario. Possiamo rappresentare in coordinate i campi vettoriali e le forme differenziali (ossia i campi di covettori), scrivendo

$$\begin{aligned}\bar{v} &= \sum_i v^i \delta x_i, & \forall \bar{v} : \mathbf{P} &\rightarrow \bar{\mathbf{P}}, \\ \underline{v} &= \sum_i v_i D x^i, & \forall \underline{v} : \mathbf{P} &\rightarrow \bar{\mathbf{P}}^*,\end{aligned}$$

dove

$$v^i = (D x^i)(\bar{v}) : \mathbf{P} \rightarrow \mathbb{R}, \quad v_i = \underline{v}(\delta x_i) : \mathbf{P} \rightarrow \mathbb{R} . \square$$

Più in generale, possiamo rappresentare in modo analogo i campi tensoriali di ogni tipo ed ordine e quindi i campi di applicazioni lineari e multilineari. Per esempio, abbiamo il seguente risultato.

1.6.8 Corollario. Possiamo rappresentare in coordinate i campi di endomorfismi ed i campi di forme bilineari, scrivendo

$$\begin{aligned}\hat{f} &= \sum_{i,j} f_i^j D x^i \otimes \delta x_j, & \forall \hat{f} : \mathbf{P} &\rightarrow L(\bar{\mathbf{P}}, \bar{\mathbf{P}}) \simeq \bar{\mathbf{P}}^* \otimes \bar{\mathbf{P}} \\ \underline{f} &= \sum_{ij} f_{ij} D x^i \otimes D x^j, & \forall \underline{f} : \mathbf{P} &\rightarrow L^2(\bar{\mathbf{P}}, \mathbb{R}) \simeq \bar{\mathbf{P}}^* \otimes \bar{\mathbf{P}}^*,\end{aligned}$$

dove

$$f_i^j = (D x^j)(\hat{f}(\delta x_i)) : \mathbf{P} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_{ij} = \underline{f}(\delta x_i, \delta x_j) : \mathbf{P} \rightarrow \mathbb{R} . \square$$

1.6.9 Corollario. Possiamo rappresentare in coordinate il tensore metrico

$$\underline{g} : \mathbf{P} \rightarrow L^2(\bar{\mathbf{P}}, \mathbb{R}) \simeq \bar{\mathbf{P}}^* \otimes \bar{\mathbf{P}}^*$$

scrivendo

$$\underline{g} = \sum_{ij} g_{ij} D x^i \otimes D x^j,$$

dove

$$g_{ij} = \underline{g}(\delta x_i, \delta x_j) : \mathbf{P} \rightarrow \mathbb{R} . \square$$

1.6.10 Nota. Il tensore metrico \underline{g} non dipende effettivamente da $p \in \mathbf{P}$. Però, in un sistema di coordinate curvilineo, le sue componenti dipendono da $p \in \bar{\mathbf{P}}$, perchè i vettori della base dipendono da $p \in \mathbf{P}$. \square

1.6.11 Nota. È utile generalizzare leggermente le definizioni precedenti, introducendo la nozione di *sistema di coordinate locale*.

Cioè, ammettiamo che l'applicazione $x \equiv (x^i)$ possa non essere definita su tutto \mathbf{P} , ma solo su un sottinsieme aperto $\mathbf{U} \subset \mathbf{P}$ e che la sua immagine possa non essere tutto

\mathbb{R}^3 , ma solo un sottinsieme aperto $V \subset \mathbb{R}^3$. In tal caso, anche le curve coordinate avranno una restrizione del loro dominio e della loro immagine.

I risultati precedenti sono validi anche per tali sistemi di coordinate locali, con l'unica accortezza di restringere i domini di definizione delle varie grandezze.

Questa generalizzazione è necessaria per introdurre sistemi di coordinate come, per esempio, i sistemi di coordinate cilindrico e sferico, che non sono estendibili in modo univoco, continuo e differenziabile a tutto lo spazio.

Nel seguito, per ragioni di semplicità, manterremo la notazione valida per i sistemi di coordinate globali, anche quando ci riferiamo a sistemi di coordinate locali. \square

1.6.2 Espressione in coordinate di derivate

Abbiamo visto che ogni sistema di coordinate induce, punto per punto, una base dello spazio dei vettori liberi e la base duale dello spazio delle forme, costituite, rispettivamente, dai vettori tangenti alle curve coordinate e dalle derivate delle funzioni coordinate.

Allora, possiamo esprimere le applicazioni lineari date dalle derivate di applicazioni differenziabili tramite queste basi. Se esprimiamo in coordinate un'applicazione differenziabile ed usiamo come base la base indotta dallo stesso sistema di coordinate, allora l'espressione in coordinate della derivata risulta molto naturale.

Consideriamo un sistema di coordinate $x \equiv (x^i) : P \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Incominciamo a studiare il caso di una curva differenziabile a valori in P .

1.6.12 Proposizione. Consideriamo una curva differenziabile

$$c : \mathbb{R} \rightarrow P,$$

la cui espressione in coordinate è data dalle funzioni reali

$$c^i := x^i \circ c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Allora, l'espressione in coordinate della derivata $Dc : \mathbb{R} \rightarrow \bar{P}$ di c (ossia del vettore tangente a c) è

$$Dc = \sum_i (Dc^i) (\delta x_i \circ c),$$

cioè

$$(Dc)(\lambda) = \sum_i (Dc^i)(\lambda) \delta x_i(c(\lambda)), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

DIMOSTRAZIONE. Per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, possiamo scrivere

$$(Dc)(\lambda) = \sum_i v^i(\lambda) \delta x_i(c(\lambda)), \quad \text{con} \quad v^i(\lambda) \in \mathbb{R}.$$

D'altra parte, tenendo conto della regola della catena, abbiamo

$$\begin{aligned}
 (Dc^j)(\lambda) &= (D(x^j \circ c))(\lambda) \\
 &= \langle Dx^j(c(\lambda)), (Dc)(\lambda) \rangle \\
 &= \langle Dx^j(c(\lambda)), \sum_i (Dc^i)(\lambda) \delta x_i(c(\lambda)) \rangle \\
 &= \sum_i v^i(\lambda) \langle Dx^j(c(\lambda)), \delta x_i(c(\lambda)) \rangle \\
 &= \sum_i v^i(\lambda) \delta_i^j = v^j(\lambda),
 \end{aligned}$$

da cui segue $v^j(\lambda) = (Dc^j)(\lambda)$. QED

Dunque, con riferimento ad un sistema di coordinate, le componenti della derivata di una curva differenziabile sono le derivate delle componenti della curva.

Mettendo in evidenza il punto di applicazione, abbiamo l'espressione

$$dc = \sum_i (Dc^i) (\partial x_i \circ c).$$

Studiamo poi il caso di una funzione differenziabile di \mathbf{P} a valori reali.

1.6.13 Lemma. Se $\phi : \mathbf{P} \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione differenziabile, allora, per ogni $i = 1, 2, 3$ e per ogni $p \in \mathbf{P}$, la funzione reale composta

$$\phi \circ x_{ip} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : \lambda \mapsto \phi(x_{ip}(\lambda))$$

è differenziabile, grazie alla regola della catena. \square

1.6.14 Definizione. Se $\phi : \mathbf{P} \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione differenziabile, allora definiamo *derivata parziale i -ma* la derivata variazionale della funzione composta $\phi \circ x_i : \mathbb{R} \times \mathbf{P} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x^i} := \delta(\phi \circ x_i) : \mathbf{P} \rightarrow \mathbb{R} . \square$$

1.6.15 Nota. Per definizione, abbiamo

$$\frac{\partial \phi}{\partial x^i}(p) := (D_1(\phi \circ x_i))(0, p) \equiv (D(\phi \circ x_{ip}))(0), \quad \forall p \in \mathbf{P}.$$

In altre parole, per calcolare la derivata parziale i -ma di ϕ , valutiamo la funzione f lungo la curva coordinata i -ma e poi calcoliamo la derivata di questa funzione composta rispetto al parametro della curva coordinata nel valore 0 del parametro (cioè nel punto p).

In pratica, per calcolare la derivata parziale i -ma si procede nel seguente modo. Si esprime la funzione ϕ tramite il sistema di coordinate considerando la funzione

$$f \circ x^{-1} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R},$$

data dalla composizione

$$\mathbb{R}^3 \xrightarrow{x^{-1}} \mathbf{P} \xrightarrow{\phi} \mathbb{R},$$

e si calcola la derivata parziale i -ma di tale funzione composta

$$\frac{\partial \phi}{\partial x^i} = (D_i(\phi \circ x^{-1}))_0.$$

In parole semplici, la derivata parziale i -ma di ϕ è data dalla derivata parziale rispetto alla funzione coordinata i -ma, bloccando le altre coordinate. \square

1.6.16 Nota. Nel simbolo tradizionale di derivata parziale $\frac{\partial \phi}{\partial x^i}$ compare la funzione coordinata x^i -ma e non la curva coordinata x_i -ma, come sarebbe essere più logico. Un simbolo più logico potrebbe essere, per esempio, del tipo $\delta x_i \phi$.

Effettivamente, il simbolo tradizionale può trarre in inganno. Per esempio, se consideriamo due sistemi di coordinate (x^i) e (y^i) , tali che $x^1 = y^1$ e $x^2 \neq y^2$, $x^3 \neq y^3$, allora in generale abbiamo

$$\frac{\partial \phi}{\partial x^1} \neq \frac{\partial \phi}{\partial y^1},$$

nonostante che sia $x^1 = y^1$. Infatti, in tal caso abbiamo $x_1 \neq y_1$, perché la prima curva coordinata è ottenuta bloccando la seconda e la terza coordinata, che sono diverse nei due sistemi di coordinate.

Una situazione di questo tipo capita in termodinamica. Lo spazio degli stati termodinamici ha dimensione 2 ed usualmente si assumono i sistemi di coordinate (p, T) , o (p, V) , o (T, V) , cioè pressione e temperatura, o pressione e volume, o temperatura e volume. Allora, la derivata parziale rispetto alla pressione è diversa nei primi due sistemi di coordinate. Infatti, la derivata rispetto alla pressione è calcolata lungo un'isoterma nel primo sistema di coordinate e lungo un'isocora nel secondo sistema di coordinate. Per questo motivo, in termodinamica si usano le espressioni “derivata parziale rispetto a p a T costante, o derivata parziale rispetto a p a V costante”, che corrispondono alla nostra terminologia basata sulle curve coordinate. Osservazioni analoghe valgono per le derivate parziali rispetto alla temperatura e rispetto alla pressione. \square

1.6.17 Nota. Useremo spesso anche il simbolo di derivata parziale semplificato

$$\partial_i \phi := \frac{\partial \phi}{\partial x^i},$$

che risulta graficamente molto comodo in formule complicate.

In questo simbolo semplificato non appare esplicitamente il sistema di coordinate a cui ci riferiamo, ma non c'è ambiguità quando il riferimento al sistema di coordinate è chiaro dal contesto. \square

1.6.18 Proposizione. Se $\phi : \mathbf{P} \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione differenziabile, allora abbiamo

$$\frac{\partial \phi}{\partial x^i} = \langle D\phi, \delta x_i \rangle.$$

DIMOSTRAZIONE. Segue immediatamente dalla regola della catena, che implica l'uguaglianza

$$\frac{\partial \phi}{\partial x^i} := \delta(\phi \circ x_i) = \langle D\phi, \delta x_i \rangle. \text{ QED}$$

1.6.19 Proposizione. Consideriamo una funzione differenziabile

$$\phi : \mathbf{P} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Allora, l'espressione in coordinate della derivata $D\phi : \mathbf{P} \rightarrow \bar{\mathbf{P}}^*$ di ϕ è

$$D\phi = \sum_i \frac{\partial \phi}{\partial x^i} Dx^i,$$

cioè

$$(D\phi)(p) = \sum_i \frac{\partial \phi}{\partial x^i}(p) (Dx^i)(p), \quad \forall p \in \mathbf{P}.$$

DIMOSTRAZIONE. Per ogni $p \in \mathbf{P}$, possiamo scrivere

$$(D\phi)(p) = \sum_i \alpha_i(p) Dx^i(p), \quad \text{con} \quad \alpha_i(p) \in \mathbb{R}.$$

D'altra parte, tenendo conto della regola della catena, abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial x^j}(p) &= (\delta(\phi \circ x_j))(p) \\ &= \langle (D\phi)(p), (\delta x_j)(p) \rangle \\ &= \left\langle \sum_i \alpha_i(p) Dx^i(p), (\delta x_j)(p) \right\rangle \\ &= \sum_i \alpha_i(p) \langle Dx^i(p), (\delta x_j)(p) \rangle \\ &= \sum_i \alpha_i(p) \delta_j^i = \alpha_j(p), \end{aligned}$$

da cui segue $\alpha_j(p) = \frac{\partial \phi}{\partial x^j}(p)$. QED

Dunque, con riferimento ad un sistema di coordinate, le componenti della derivata di una funzione differenziabile sono le derivate parziali della funzione.

Mettendo in evidenza il punto di applicazione, abbiamo l'espressione

$$d\phi = \sum_i \frac{\partial \phi}{\partial x^i} dx^i.$$

Studiamo poi il caso di una trasformazione differenziabile di \mathbf{P} .

1.6.20 Proposizione. Consideriamo una trasformazione differenziabile

$$f : \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P},$$

la cui espressione in coordinate è data dalle funzioni reali

$$f^i := x^i \circ f : \mathbf{P} \rightarrow \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Allora, l'espressione in coordinate della derivata $Df : \mathbf{P} \rightarrow L(\bar{\mathbf{P}}, \bar{\mathbf{P}}) \simeq \bar{\mathbf{P}}^* \otimes \bar{\mathbf{P}}$ di f è

$$Df = \sum_i \left(\frac{\partial f^i}{\partial x^j} \right) Dx^j \otimes \delta x_i,$$

cioè

$$(Df)(p) = \sum_i \left(\frac{\partial f^i}{\partial x^j} \right)(p) Dx^j(p) \otimes \delta x_i(p), \quad \forall p \in \mathbf{P}.$$

DIMOSTRAZIONE. Per ogni $p \in \mathbf{P}$, possiamo scrivere

$$(Df)(p) = \sum_{ij} t_j^i(p) Dx^j(p) \otimes \delta x_i(p), \quad \text{con} \quad t_j^i(p) \in \mathbb{R}.$$

D'altra parte, tenendo conto della regola della catena, abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial f^h}{\partial x^k}(p) &= (\delta(x^h \circ f \circ x_k))(p) \\ &= \langle Dx^h(p), (Df)(p)(\delta x_k(p)) \rangle \\ &= \langle Dx^h(p), \left(\sum_{ij} t_j^i(p) Dx^j(p) \otimes \delta x_i(p) \right)(p)(\delta x_k(p)) \rangle \\ &= \langle Dx^h(p), \left(\sum_{ij} t_j^i(p) \delta_k^j(p) \delta x_i(p) \right) \rangle \\ &= \sum_{ij} t_j^i(p) \delta_k^j \delta_i^h \\ &= t_k^h(p), \end{aligned}$$

da cui segue $t_k^h(p) = \frac{\partial f^h}{\partial x^k}(p)$. QED

Dunque, con riferimento ad un sistema di coordinate, le componenti della derivata di una trasformazione differenziabile sono le derivate parziali delle componenti della trasformazione. La riga i -ma della matrice $\left(\frac{\partial f^i}{\partial x^j} \right)$ è costituita dalle derivate parziali della componente f^i e la colonna j -ma della matrice $\left(\frac{\partial f^i}{\partial x^j} \right)$ è costituita dalla derivata parziale j -ma delle componenti della trasformazione.

Studiamo infine le formule di transizione fra due sistemi di coordinate.

A tal fine consideriamo due sistemi di coordinate

$$x \equiv (x^i) : \mathbf{P} \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{ed} \quad y \equiv (y^i) : \mathbf{P} \rightarrow \mathbb{R}^3.$$

1.6.21 Corollario. Abbiamo le seguenti formule di transizione

$$\begin{aligned} \delta y_j &= \sum_i \frac{\partial x^i}{\partial y_j} \delta x_i & \text{e} & & Dy^i &= \sum_j \frac{\partial y^i}{\partial x_j} Dx^j \\ \delta x_j &= \sum_i \frac{\partial y^i}{\partial x_j} \delta y_i & \text{e} & & Dx^i &= \sum_j \frac{\partial x^i}{\partial y_j} Dy^j. \end{aligned}$$

Inoltre, le matrici delle derivate delle applicazioni

$$y \circ x^{-1} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{e} \quad x \circ y^{-1} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

date dalle composizioni

$$\mathbb{R}^3 \xrightarrow{y} \mathbf{P} \xrightarrow{x^{-1}} \mathbb{R}^3 \quad \text{e} \quad \mathbb{R}^3 \xrightarrow{x} \mathbf{P} \xrightarrow{y^{-1}} \mathbb{R}^3,$$

sono, rispettivamente,

$$(D(y \circ x^{-1})) = \left(\frac{\partial y^j}{\partial x_i} \right) \quad \text{e} \quad (D(x \circ y^{-1})) = \left(\frac{\partial x^i}{\partial y_j} \right).$$

Queste due matrici sono l'una l'inversa dell'altra.

DIMOSTRAZIONE. Segue immediatamente dalle Proposizioni precedenti. QED

1.6.3 Espressione in coordinate delle derivate seconde

Consideriamo un sistema di coordinate $(x^i) : \mathbf{P} \rightarrow \mathbb{R}$.

1.6.22 Proposizione. Le derivate dei campi vettoriali della base indotta dal sistema di coordinate e le derivate delle forme differenziali della base duale sono, rispettivamente, campi tensoriali del tipo

$$\begin{aligned} \nabla \partial x_i &: \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P} \times (\bar{\mathbf{P}}^* \otimes \bar{\mathbf{P}}) \\ \nabla dx^i &: \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P} \times (\bar{\mathbf{P}}^* \otimes \bar{\mathbf{P}}^*). \end{aligned}$$

Decomponendo tali campi tensoriali rispetto alla base indotta dallo stesso sistema di coordinate, otteniamo delle espressioni del tipo

$$\begin{aligned} \nabla \partial x_i &= \sum_{hk} \Gamma_i^h{}^k dx^h \otimes \partial x_k, & i &= 1, 2, 3, \\ \nabla dx^i &= \sum_{hk} C_h^i{}^k dx^h \otimes dx^k, & i &= 1, 2, 3, \end{aligned}$$

dove abbiamo introdotto le $3 + 3$ matrici quadrate

$$\begin{aligned}\Gamma_i^h{}_k &:= (\nabla \partial x_i)(dx^h, \partial x_k) : \mathbf{P} \rightarrow \mathbb{R}, & i = 1, 2, 3, \\ C_h^i{}_k &:= (\nabla dx^i)(\partial x_h, \partial x_k) : \mathbf{P} \rightarrow \mathbb{R}, & i = 1, 2, 3. \quad \square\end{aligned}$$

1.6.23 Proposizione. Abbiamo le uguaglianze

$$C_k^i{}_h = C_h^i{}_k = -\Gamma_h^i{}_k = -\Gamma_k^i{}_h.$$

DIMOSTRAZIONE. L'uguaglianza $C_k^i{}_h = C_h^i{}_k$ segue immediatamente dalla simmetria della derivata seconda ∇dx^i .

Inoltre, derivando l'uguaglianza

$$\delta_j^i = \langle dx^i, \partial x_j \rangle$$

otteniamo

$$\begin{aligned}0 &= \nabla_{\partial x_h} \langle dx^i, \partial x_j \rangle \\ &= \langle \nabla_{\partial x_h} dx^i, \partial x_j \rangle + \langle dx^i, \nabla_{\partial x_h} \partial x_j \rangle \\ &= \langle \sum_k C_h^i{}_k dx^k, \partial x_j \rangle + \langle dx^i, \Gamma_j^k{}_h \partial x_k \rangle \\ &= \sum_k C_h^i{}_k \delta_j^k + \sum_k \Gamma_j^k{}_h \delta_k^i \\ &= C_h^i{}_j + \Gamma_j^i{}_h, \\ &= C_j^i{}_h + \Gamma_j^i{}_h,\end{aligned}$$

da cui segue

$$C_j^i{}_h = -\Gamma_j^i{}_h. \text{ QED}$$

1.6.24 Definizione. Definiamo i *simboli di Christoffel* le funzioni

$$\Gamma_i^h{}_j := (dx^h)(\nabla_{\partial x_i} \partial x_j) : \mathbf{P} \rightarrow \mathbb{R}. \quad \square$$

In pratica, un metodo comodo per calcolare i simboli di Christoffel è fornito dalla seguente Proposizione.

1.6.25 Lemma. Abbiamo

$$\nabla \underline{g} = 0,$$

perché il tensore metrico è definito nello spazio dei vettori liberi e perciò è costante rispetto al punto di applicazione. \square

1.6.26 Proposizione. I simboli di Christoffel sono espressi dalla formula

$$\Gamma_i^h{}_j = \sum_k \frac{1}{2} g^{hk} (\partial_i g_{kj} + \partial_j g_{ki} - \partial_k g_{ij}).$$

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_{\delta x_h} g \\ &= \sum_{ijh} (\partial_h g_{ij} + \Gamma_i^k{}^h g_{kj} + \Gamma_j^k{}^h g_{ik}) dx^h \otimes dx^i \otimes dx^j, \end{aligned}$$

e quindi

$$\partial_h g_{ij} + \sum_k (\Gamma_i^k{}^h g_{kj} + \Gamma_j^k{}^h g_{ik}) = 0.$$

Questa uguaglianza implica, per mezzo di alcuni passaggi algebrici,

$$\Gamma_i^h{}_j = \sum_k \frac{1}{2} g^{hk} (\partial_i g_{kj} + \partial_j g_{ki} - \partial_k g_{ij}). \square$$

1.6.27 Lemma. Abbiamo

$$\nabla \eta = 0,$$

perché la forma volume è definita nello spazio dei vettori liberi e perciò è costante rispetto al punto di applicazione. \square

1.6.28 Proposizione. Vale l'uguaglianza

$$\sum_i \Gamma_i^i{}_j = \frac{\partial_j \sqrt{\det(g_{hk})}}{\sqrt{\det(g_{hk})}}.$$

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_{\partial x_j} \eta \\ &= \nabla_{\partial x_j} (\sqrt{\det(g_{hk})} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3) \\ &= \sum_j \partial_j \sqrt{\det(g_{hk})} dx^j \otimes dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\ &\quad - \sum_j \sqrt{\det(g_{hk})} \Gamma_j^1{}_k dx^j \otimes dx^k \wedge dx^2 \wedge dx^3 - \\ &\quad - \sum_j \sqrt{\det(g_{hk})} \Gamma_j^2{}_k dx^j \otimes dx^1 \wedge dx^k \wedge dx^3 - \\ &\quad - \sum_j \sqrt{\det(g_{hk})} \Gamma_j^3{}_k dx^j \otimes dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^k \\ &= \sum_j (\partial_j \sqrt{\det(g_{hk})} - \Gamma_j^1{}_1 - \Gamma_j^2{}_2 - \Gamma_j^3{}_3) dx^j \otimes dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3, \end{aligned}$$

e quindi

$$\partial_j \sqrt{\det(g_{hk})} = (\sqrt{\det(g_{hk})}) \sum_i \Gamma_j^i{}_i. \text{ QED}$$

1.6.4 Sistemi di coordinate notevoli

Introduciamo i sistemi di coordinate cartesiano, cilindrico e sferico, che sono molto utili in varie situazioni.

Il sistema di coordinate cartesiano è il più semplice. I sistemi di coordinate cilindrico e sferico sono più complicati, ma possono essere vantaggiosi nei casi in cui vogliamo descrivere fenomeni con simmetria cilindrica o sferica.

In modo analogo potremmo definire altri sistemi di coordinate (per esempio, parabolico ed iperbolico).

Scegliamo un'origine $o \in \mathbf{P}$ ed una base ortonormale $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3) \equiv (\bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{e}_z)$.

1.6.4.1 Sistema di coordinate cartesiano

1.6.29 Definizione. Definiamo *sistema di coordinate cartesiano* un sistema di coordinate del tipo

$$(x, y, z) \equiv (x^1, x^2, x^3) : \mathbf{P} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

definito dalla formula

$$x^i(p) := (p - o) \cdot \bar{e}_i, \quad i = 1, 2, 3. \square$$

1.6.30 Nota. In un sistema di coordinate cartesiano, le curve coordinate sono espresse, per ogni $p \in \mathbf{P}$, dalla formula

$$x_{ip}(\lambda) = p + \lambda \bar{e}_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Dunque, le immagini delle curve coordinate sono le rette generate dai vettori \bar{e}_i . Le curve coordinate con lo stesso indice i passanti per punti diversi sono parallele tra loro. Per ogni punto passano tre curve coordinate ortogonali tra loro. \square

1.6.31 Proposizione. In un sistema di coordinate cartesiano, i vettori tangenti alle curve coordinate e le derivate delle funzioni coordinate sono date dalle formule

$$\partial x_i = \bar{e}_i \quad \text{e} \quad dx^i = \underline{e}^i := g^b(\bar{e}_i).$$

Dunque, i vettori della base ed i covettori della base duale non dipendono dal punto di applicazione. \square

1.6.32 Corollario. In un sistema di coordinate cartesiano, abbiamo

$$\underline{g} = dx \otimes dx + dy \otimes dy + dz \otimes dz, \quad \bar{g} = \partial_x \otimes \partial_x + \partial_y \otimes \partial_y + \partial_z \otimes \partial_z,$$

ossia

$$g_{ij} = \delta_{ij}, \quad g^{ij} = \delta^{ij}. \square$$

1.6.33 Corollario. In un sistema di coordinate cartesiano, le espressioni della forma volume e della sua duale sono

$$\eta = dx \wedge dy \wedge dz \quad \text{e} \quad \bar{\eta} = \partial_x \wedge \partial_y \wedge \partial_z . \square$$

1.6.34 Corollario. In un sistema di coordinate cartesiano i simboli di Christoffel sono nulli:

$$\Gamma_{h k}^i = 0 . \square$$

1.6.4.2 Sistema di coordinate cilindrico

1.6.35 Definizione. Definiamo *sistema di coordinate cilindrico* un sistema di coordinate del tipo

$$(\rho, \phi, z) \equiv (x^1, x^2, x^3) : \mathbf{P} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

definito, con riferimento ad un sistema di coordinate cartesiano, dalle funzioni di transizione

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \phi \\ y &= \rho \sin \phi \\ z &= z . \square \end{aligned}$$

Otteniamo anche l'uguaglianza di transizione inversa

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} .$$

1.6.36 Nota. Per garantire che il sistema sia invertibile e di classe C^∞ insieme all'applicazione inversa, è necessario restringere il dominio di applicazione delle funzioni coordinate al sottinsieme aperto $\mathbf{U} \subset \mathbf{P}$ ottenuto escludendo il semipiano

$$\mathbf{\Pi} := \{p \in \mathbf{P} \mid y(p) = 0, x(p) \geq 0\} .$$

Infatti, la funzione ϕ non è ben definita sulla retta

$$\mathbf{\zeta} := \{p \in \mathbf{P} \mid x(p) = y(p) = 0\}$$

e fa un salto di 2π (e quindi non è continua) attraverso il semipiano aperto $\mathbf{P} - \mathbf{\zeta}$. Inoltre, la funzione ρ non è differenziabile nel punto o .

Tenendo conto della precedente restrizione, il sistema di coordinate risulta essere l'applicazione

$$(\rho, \phi, z) : (\mathbf{P} - \mathbf{\Pi}) \rightarrow ((0, \infty), (0, 2\pi), [-\infty, \infty]) .$$

La funzione ρ è detta *distanza assiale* ed è definita dalla distanza di ogni punto $p \in \mathbf{P} - \mathbf{\Pi}$ dalla retta $\mathbf{\zeta}$.

La funzione ϕ è detta *longitudine* ed è definita, per ogni punto $p \in \mathbf{P} - \mathbf{\Pi}$, dall'angolo formato dal semipiano

$$\mathbf{\Pi}_p := \{q \in \mathbf{P} - \mathbf{\Pi} \mid x(q)/y(q) = x(p)/y(p)\}$$

e dal semipiano $\mathbf{\Pi}$. \square

1.6.37 Proposizione. In un sistema di coordinate cilindrico, i vettori tangenti alle curve coordinate e le derivate delle funzioni coordinate sono date dalle formule

$$\begin{aligned}\partial_\rho &= \cos \phi \bar{e}_x + \sin \phi \bar{e}_y \\ \partial_\phi &= \rho (-\sin \phi \bar{e}_x + \cos \phi \bar{e}_y) \\ \partial_z &= \bar{e}_z\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}d\rho &= \cos \phi dx + \sin \phi dy \\ d\phi &= (1/\rho) (-\sin \phi dx + \cos \phi dy) \\ dz &= dz.\end{aligned}$$

Le formule inverse di transizione sono

$$\begin{aligned}\bar{e}_x &= \cos \phi \partial_\rho - 1/\rho \sin \phi \partial_\phi \\ \bar{e}_y &= \sin \phi \partial_\rho + 1/\rho \cos \phi \partial_\phi \\ \bar{e}_z &= \partial_z\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}dx &= \cos \phi d\rho - \rho \sin \phi d\phi \\ dy &= \sin \phi d\rho + \rho \cos \phi d\phi \\ dz &= dz.\end{aligned}$$

DIMOSTRAZIONE. Segue dal Corollario 1.6.21.

Conviene calcolare le espressioni di $(\partial_\rho, \partial_\phi, \partial_z)$ e (dx, dy, dz) usando le derivate delle funzioni (x, y, z) rispetto alle funzioni (ρ, ϕ, z) .

Conviene, invece, calcolare le espressioni di $(\bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{e}_z)$ e $(d\rho, d\phi, dz)$ invertendo la matrice di transizione calcolata precedentemente (invece di calcolare direttamente la matrice delle formule di transizione inverse). QED

1.6.38 Proposizione. In un sistema di coordinate cilindrico abbiamo

$$(g_{ij}) \equiv \begin{pmatrix} g_{\rho\rho} & g_{\rho\phi} & g_{\rho z} \\ g_{\phi\rho} & g_{\phi\phi} & g_{\phi z} \\ g_{z\rho} & g_{z\phi} & g_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e

$$(g^{ij}) \equiv \begin{pmatrix} g^{\rho\rho} & g^{\rho\phi} & g^{\rho z} \\ g^{\phi\rho} & g^{\phi\phi} & g^{\phi z} \\ g^{z\rho} & g^{z\phi} & g^{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo

$$\begin{aligned} g &= dx \otimes dx + dy \otimes dy + dz \otimes dz \\ &= (\cos \phi d\rho - \rho \sin \phi d\phi) \otimes (\cos \phi d\rho - \rho \sin \phi d\phi) \\ &\quad + (\sin \phi d\rho + \rho \cos \phi d\phi) \otimes (\sin \phi d\rho + \rho \cos \phi d\phi) \\ &\quad + dz \otimes dz \\ &= d\rho \otimes d\rho + \rho^2 d\phi \otimes d\phi + dz \otimes dz. \text{ QED} \end{aligned}$$

1.6.39 Nota. Le curve coordinate possono essere descritte nel seguente modo.

La famiglia di curve coordinate x_ρ è costituita dalle semirette parallele al semipiano Π con origine sulla retta ζ .

La famiglia di curve coordinate x_ϕ è costituita dalle circonferenze parallele al semipiano Π con centro sulla retta ζ .

La famiglia di curve coordinate x_z è costituita dalle rette parallele alla retta ζ .

Inoltre, i vettori tangenti alle curve coordinate possono essere descritti nel seguente modo.

Il campo vettoriale ∂_ρ è costituito da versori radiali rispetto all'asse ζ .

Il campo vettoriale ∂_ϕ è costituito da vettori di lunghezza $\|\partial_\phi\| = \rho$ ortogonali a ∂_ρ e paralleli al semipiano Π .

Il campo vettoriale ∂_z coincide con il campo vettoriale \bar{e}_z .

Dunque, la base $(\partial_\rho, \partial_\phi, \partial_z)$ è una base variabile da punto a punto; essa è ortogonale, ma non ortonormale.

Indichiamo con

$$(\bar{e}_\rho, \bar{e}_\phi, \bar{e}_z) := \left(\partial_\rho, \frac{1}{\rho} \partial_\phi, \partial_z \right)$$

la base ortonormale ottenuta normalizzando la base naturale indotta dalle coordinate. \square

1.6.40 Corollario. In un sistema di coordinate cilindrico, le espressioni della forma volume e della sua duale sono

$$\underline{\eta} = \rho d\rho \wedge d\phi \wedge dz \quad \text{e} \quad \bar{\eta} = \frac{1}{\rho} \partial_\rho \wedge \partial_\phi \wedge \partial_z. \square$$

1.6.41 Corollario. In un sistema di coordinate cilindrico i simboli di Christoffel non nulli sono:

$$\Gamma_{\phi\phi}^\rho = -\rho, \quad \Gamma_{\rho\phi}^\rho = \Gamma_{\rho\rho}^\phi = \frac{1}{\rho}. \square$$

1.6.4.3 Sistema di coordinate sferico

1.6.42 Definizione. Definiamo *sistema di coordinate sferico* un sistema di coordinate del tipo

$$(r, \theta, \phi) \equiv (x^1, x^2, x^3) : \mathbf{P} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

definito, con riferimento ad un sistema di coordinate cartesiano, tramite le funzioni di transizione

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \phi \\ y &= r \sin \theta \sin \phi \\ z &= r \cos \theta. \square \end{aligned}$$

Otteniamo anche l'uguaglianza di transizione inversa

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Con riferimento ad un sistema di coordinate cilindrico, otteniamo anche le funzioni di transizione

$$\begin{aligned} \rho &= r \sin \theta \\ \phi &= \phi \\ z &= r \cos \theta. \end{aligned}$$

1.6.43 Nota. Per garantire che il sistema sia invertibile e di classe C^∞ insieme all'applicazione inversa, è necessario restringere il dominio di applicazione delle funzioni coordinate al sottinsieme aperto $\mathbf{U} \subset \mathbf{P}$ ottenuto escludendo il semipiano

$$\mathbf{\Pi} := \{p \in \mathbf{P} \mid y(p) = 0, x(p) \geq 0\}.$$

Infatti, la funzione ϕ non è ben definita sulla retta

$$\mathbf{\zeta} := \{p \in \mathbf{P} \mid x(p) = y(p) = 0\}$$

e fa un salto di 2π (e quindi non è continua) attraverso il semipiano aperto $\mathbf{\Pi} - \mathbf{\zeta}$. Inoltre, la funzione r non è differenziabile nel punto o .

Tenendo conto della precedente restrizione, il sistema di coordinate risulta essere l'applicazione

$$(r, \theta, \phi) : (\mathbf{P} - \mathbf{\Pi}) \rightarrow ((0, \infty), (0, \pi), (0, 2\pi)).$$

La funzione r è detta *distanza radiale* ed è definita dalla distanza di ogni punto $p \in \mathbf{P} - \mathbf{\Pi}$ dal punto o .

La funzione θ è detta *latitudine* ed è definita, per ogni punto $p \in \mathbf{P} - \mathbf{\Pi}$, dall'angolo formato dalla retta

$$\mathbf{s}_p := \{q \in \mathbf{P} - \mathbf{\Pi} \mid x(q)/y(q) = x(p)/y(p), z(q)/\rho(q) = z(p)/\rho(p)\}$$

e dalla retta

$$\sigma_p := \{q \in \mathbf{P} - \Pi \mid x(q)/y(q) = x(p)/y(p), z(q) = 0\}.$$

La funzione ϕ è detta *longitudine* ed è definita, per ogni punto $p \in \mathbf{P} - \Pi$, dall'angolo formato dal semipiano

$$\Pi_p := \{q \in \mathbf{P} - \Pi \mid x(q)/y(q) = x(p)/y(p)\}$$

e dal semipiano Π . \square

1.6.44 Proposizione. In un sistema di coordinate sferico, i vettori tangenti alle curve coordinate e le derivate delle funzioni coordinate sono date dalle formule

$$\begin{aligned}\partial_r &= \sin \theta \cos \phi \bar{e}_x + \sin \theta \sin \phi \bar{e}_y + \cos \theta \bar{e}_z \\ \partial_\theta &= r (\cos \theta \cos \phi \bar{e}_x + \cos \theta \sin \phi \bar{e}_y - \sin \theta \bar{e}_z) \\ \partial_\phi &= r (-\sin \theta \sin \phi \bar{e}_x + \sin \theta \cos \phi \bar{e}_y)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}dr &= \sin \theta \cos \phi dx + \sin \theta \sin \phi dy + \cos \theta dz \\ d\theta &= \frac{1}{r} (\cos \theta \cos \phi dx + \cos \theta \sin \phi dy - \sin \theta dz) \\ d\phi &= \frac{1}{r \sin \theta} (-\sin \phi dx + \cos \phi dy).\end{aligned}$$

Le formule inverse di transizione sono

$$\begin{aligned}\bar{e}_x &= \sin \theta \cos \phi \partial_r + \frac{1}{r} \cos \theta \cos \phi \partial_\theta - \frac{1}{r \sin \theta} \sin \phi \partial_\phi \\ \bar{e}_y &= \sin \theta \sin \phi \partial_r + \frac{1}{r} \cos \theta \sin \phi \partial_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \cos \phi \partial_\phi \\ \bar{e}_z &= \cos \theta \partial_r - \frac{1}{r} \sin \theta \partial_\theta\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}dx &= \sin \theta \cos \phi dr + r \cos \theta \cos \phi d\theta - r \sin \theta \sin \phi d\phi \\ dy &= \sin \theta \sin \phi dr + r \cos \theta \sin \phi d\theta + r \sin \theta \cos \phi d\phi \\ dz &= \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta.\end{aligned}$$

DIMOSTRAZIONE. Segue dal Corollario 1.6.21.

Conviene calcolare le espressioni di $(\partial_r, \partial_\theta, \partial_\phi)$ e (dx, dy, dz) usando le derivate delle funzioni (x, y, z) rispetto alle funzioni (r, θ, ϕ) .

Conviene, invece, calcolare le espressioni di $(\bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{e}_z)$ e $(dr, d\theta, d\phi)$ invertendo la matrice di transizione calcolata precedentemente (invece di calcolare direttamente la matrice delle formule di transizione inverse). QED

1.6.45 Proposizione. In un sistema di coordinate sferico abbiamo

$$(g_{ij}) \equiv \begin{pmatrix} g_{rr} & g_{r\theta} & g_{rz} \\ g_{\theta r} & g_{\theta\theta} & g_{\theta\phi} \\ g_{\phi r} & g_{\phi\theta} & g_{\phi\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

e

$$(g^{ij}) \equiv \begin{pmatrix} g^{rr} & g^{r\theta} & g^{rz} \\ g^{\theta r} & g^{\theta\theta} & g^{\theta\phi} \\ g^{\phi r} & g^{\phi\theta} & g^{\phi\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/(r^2 \sin^2 \theta) \end{pmatrix}$$

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo

$$\begin{aligned} &= dx \otimes dx + dy \otimes dy + dz \otimes dz \\ &= (\sin \theta \cos \phi dr + r \cos \theta \cos \phi d\theta - r \sin \theta \sin \phi d\phi) \otimes \\ &\quad (\sin \theta \cos \phi dr + r \cos \theta \cos \phi d\theta - r \sin \theta \sin \phi d\phi) \otimes \\ &+ (\sin \theta \sin \phi dr + r \cos \theta \sin \phi d\theta + r \sin \theta \cos \phi d\phi) \otimes \\ &\quad (\sin \theta \sin \phi dr + r \cos \theta \sin \phi d\theta + r \sin \theta \cos \phi d\phi) \otimes \\ &+ (\cos \theta dr - r \sin \theta d\theta) \otimes (\cos \theta dr - r \sin \theta d\theta) \\ &= dr \otimes dr + r^2 d\theta \otimes d\theta + r^2 \sin^2 \theta d\phi \otimes d\phi. \text{ QED} \end{aligned}$$

1.6.46 Nota. Le curve coordinate possono essere descritte nel seguente modo.

La famiglia di curve coordinate x_r è costituita dalle semirette ζ con origine in o .

La famiglia di curve coordinate x_θ è costituita dalle semicirconferenze con centro o e con diametro sulla retta ζ .

La famiglia di curve coordinate x_ϕ è costituita dalle circonferenze parallele al semipiano Π con centro sulla retta ζ .

Inoltre, i vettori tangenti alle curve coordinate possono essere descritti nel seguente modo.

Il campo vettoriale ∂_r è costituito da versori radiali rispetto al punto o .

Il campo vettoriale ∂_θ è costituito dai vettori di lunghezza $\|\partial_\theta\| = r$ ortogonali a ∂_r e giacenti sui semipiani generati dalla retta ζ .

Il campo vettoriale ∂_ϕ è costituito da vettori di lunghezza $\|\partial_\phi\| = r \sin \theta$ ortogonali a ∂_ρ e paralleli al semipiano Π .

Dunque, la base $(\partial_\rho, \partial_\phi, \partial_z)$ è una base variabile da punto a punto; essa è ortogonale, ma non ortonormale.

Indichiamo con

$$(\bar{e}_r, \bar{e}_\theta, \bar{e}_\phi) := \left(\partial_r, \frac{1}{r} \partial_\theta, \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\phi \right)$$

la base ortonormale ottenuta normalizzando la base naturale indotta dalle coordinate. \square

1.6.47 Corollario. In un sistema di coordinate sferico, le espressioni della forma volume e della sua duale sono

$$\underline{\eta} = r^2 \sin \theta \, dr \wedge d\theta \wedge d\phi \quad \text{e} \quad \bar{\eta} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \partial_r \wedge \partial_\theta \wedge \partial_\phi. \square$$

1.6.48 Corollario. In un sistema di coordinate sferico i simboli di Christoffel non nulli sono:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\theta \theta}^r &= -r, & \Gamma_{\phi \phi}^r &= -r \sin^2 \theta, \\ \Gamma_r^{\theta \theta} &= \Gamma_{\theta r}^{\theta \theta} = \frac{1}{r}, & \Gamma_{\phi \phi}^{\theta \theta} &= -\sin \theta \cos \theta, \\ \Gamma_r^{\phi \phi} &= \Gamma_{\phi r}^{\phi \phi} = \frac{1}{r}, & \Gamma_{\theta \phi}^{\phi \phi} &= \Gamma_{\phi \theta}^{\phi \phi} = \cos \theta / \sin \theta. \square \end{aligned}$$

1.7 Operatori differenziali

Dedichiamo questo capitolo allo studio degli operatori differenziali gradiente, commutatore, rotore, divergenza e laplaciano.

In questa sezione supponiamo che tutte le funzioni ed i campi vettoriali considerati siano di classe C^∞ .

Per ulteriori approfondimenti rimandiamo al corso di Analisi Matematica.

Consideriamo lo spazio affine euclideo \mathbf{P} della geometria euclidea. Dunque, \mathbf{P} è uno spazio affine di dimensione 3, dotato della metrica euclidea $g \in L^2(\bar{\mathbf{P}}, \mathbb{R})$. Inoltre, ci riferiamo ad un sistema di coordinate $(x^i) : \mathbf{P} \rightarrow \mathbb{R}^3$.

1.7.1 Gradiente

Si consideri una funzione $f : \mathbf{P} \rightarrow \mathbb{R}$.

Ricordiamo che vale l'uguaglianza

$$f(p + \bar{h}) = f(p) + (Df)_p(\bar{h}) + o_p(\bar{h}), \quad \forall p \in \mathbf{P}, \forall \bar{h} \in \bar{\mathbf{P}},$$

dove $(Df)_p \in \bar{\mathbf{P}}^*$ ed $o_p(\bar{h}) \in \bar{\mathbf{P}}$ è un infinitesimo di ordine superiore a \bar{h} .

Inoltre, ricordiamo che l'espressione del differenziale $df = df : \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P} \times \bar{\mathbf{P}}^*$ è

$$\nabla f = df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i.$$

Infine, ricordiamo l'isomorfismo

$$g^\sharp : \bar{\mathbf{P}}^* \rightarrow \bar{\mathbf{P}} : \underline{v} \mapsto \bar{v},$$

caratterizzato dall'uguaglianza

$$g(\bar{v}, \bar{u}) = \underline{v}(\bar{u}), \quad \forall \bar{u} \in \bar{\mathbf{P}},$$

la cui espressione in coordinate è

$$g^\sharp : \underline{v} \equiv \sum_i v_i dx^i \mapsto \bar{v} \equiv \sum_i v^i \partial x_i = \sum_j g^{ij} v_i \partial x_j,$$

dove (g^{ij}) è la matrice inversa della matrice della metrica (g_{ij}) .

1.7.1 Definizione. Definiamo *gradiente* di una funzione $f : \mathbf{P} \rightarrow \mathbb{R}$ il campo vettoriale

$$\text{grad } f := g^\sharp(\nabla f) : \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P} \times \bar{\mathbf{P}}. \square$$

1.7.2 Nota. In parole semplici, il gradiente della funzione f non è altro che la derivata della funzione interpretata come campo vettoriale, anziché come forma differenziale, per mezzo dell'isomorfismo naturale indotto dal prodotto scalare.

Per la definizione di gradiente e di derivata, il gradiente è caratterizzato dall'uguaglianza

$$f(p + \bar{h}) = f(p) + (\text{grad } f)_p \cdot \bar{h} + o_p(\bar{h}), \quad \forall p \in \mathbf{P}, \forall \bar{h} \in \bar{\mathbf{P}},$$

dove $(\text{grad } f)_p \in \bar{\mathbf{P}}$ e dove $o_p(\bar{h}) \in \bar{\mathbf{P}}$ è un infinitesimo di ordine superiore a \bar{h} . \square

1.7.3 Proposizione. L'espressione in coordinate del gradiente di f è

$$\text{grad } f = \sum_{ij} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j} \partial x^i. \square$$

1.7.4 Esempio. Le espressioni del gradiente di f in un sistema di coordinate cartesiano, cilindrico e sferico sono, rispettivamente,

$$\begin{aligned} \text{grad } f &= \frac{\partial f}{\partial x} \partial_x + \frac{\partial f}{\partial y} \partial_y + \frac{\partial f}{\partial z} \partial_z \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} \bar{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \bar{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \bar{e}_z, \\ \text{grad } f &= \frac{\partial f}{\partial \rho} \partial_\rho + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial f}{\partial \phi} \partial_\phi + \frac{\partial f}{\partial z} \partial_z \\ &= \frac{\partial f}{\partial \rho} \bar{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \phi} \bar{e}_\phi + \frac{\partial f}{\partial z} \bar{e}_z, \\ \text{grad } f &= \frac{\partial f}{\partial r} \partial_r + \frac{1}{r^2} \frac{\partial f}{\partial \theta} \partial_\theta + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \partial_\phi \\ &= \frac{\partial f}{\partial r} \bar{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \bar{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \bar{e}_\phi. \square \end{aligned}$$

1.7.5 Nota. Possiamo descrivere il significato geometrico del gradiente di f nel seguente modo.

Consideriamo un punto $p \in \mathbf{P}$.

1) Sia $(\text{grad } f)(p) = \bar{0}$.

Allora, f è costante in un intorno di p a meno di infinitesimi di ordine superiore al primo rispetto all'incremento \bar{h} del punto p .

2) Sia $(\text{grad } f)(p) \neq \bar{0}$.

Allora, abbiamo $(\text{grad } f) \neq \bar{0}$ in un intorno di p . Inoltre, per un Teorema di Analisi Matematica, in un intorno di p , il luogo dei punti nei quali la funzione f assume il valore costante $f(p) \in \mathbb{R}$ è una superficie bidimensionale differenziabile Σ .

Il vettore $(\text{grad } f)(p) \in \bar{\mathbf{P}}$ risulta essere ortogonale alla superficie Σ in p . Infatti, se $c : \mathbb{R} \rightarrow \Sigma \subset \mathbf{P}$ è una curva a valori in Σ e tale che $c(0) = p$, allora abbiamo, per la

regola della catena,

$$0 = (d(f \circ c))(0) = \langle (df)_p, (dc)(0) \rangle = (\text{grad } f)(p) \cdot (dDc)(0);$$

dunque, essendo $(\text{grad } f)(p)$ ortogonale in p ad ogni curva differenziabile a valori in Σ e passante per p , esso è ortogonale in p a Σ .

Inoltre, il vettore $(\text{grad } f)(p)$ risulta rivolto nel verso dei valori crescenti di f . Infatti, l'uguaglianza $f(p + \bar{h}) = f(p) + (\text{grad } f)_p \cdot \bar{h} + o_p(\bar{h})$ implica che, per $\|\bar{h}\|$ sufficientemente piccolo $f(p + \bar{h}) - f(p)$ ha lo stesso segno di $(\text{grad } f)_p \cdot \bar{h}$; quindi, se $f(p + \bar{h}) - f(p) > 0$, allora il vettore $(\text{grad } f)_p$ ha lo stesso verso del vettore \bar{h} . \square

1.7.2 Commutatore

Studiamo poi il commutatore di due campi vettoriali. In questo corso non possiamo approfondire l'interessante significato geometrico di questo oggetto. Ci limiteremo a considerarlo da un punto di vista puramente tecnico per esprimere alcune formule comode.

1.7.6 Definizione. Definiamo *commutatore* di due campi vettoriali $\bar{u}, \bar{v} : \mathbf{P} \rightarrow \bar{\mathbf{P}}$ il campo vettoriale

$$[\bar{u}, \bar{v}] := \nabla_{\bar{u}} \bar{v} - \nabla_{\bar{v}} \bar{u} : \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P} \times \bar{\mathbf{P}}. \square$$

1.7.7 Proposizione. L'espressione in coordinate del commutatore di u e v è

$$[\bar{u}, \bar{v}] = \sum_{ij} (u^j \frac{\partial v^i}{\partial x^j} - v^j \frac{\partial u^i}{\partial x^j}) \partial x_i.$$

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo

$$\begin{aligned} \nabla_{\bar{u}} \bar{v} &= \sum_{ij} u^j (\partial_j v^i + \Gamma_j^i h v^h) \delta x_i \\ \nabla_{\bar{v}} \bar{u} &= \sum_{ij} v^j (\partial_j u^i + \Gamma_j^i h u^h) \delta x_i. \end{aligned}$$

Perciò, tenendo conto dell'uguaglianza $\Gamma_j^i h = \Gamma_h^i j$, otteniamo

$$[\bar{u}, \bar{v}] = \sum_{ij} (u^j \frac{\partial v^i}{\partial x^j} - v^j \frac{\partial u^i}{\partial x^j}) \partial x_i. \text{ QED}$$

1.7.8 Nota. Consideriamo due campi vettoriali $\bar{u}, \bar{v} : \mathbf{P} \rightarrow \bar{\mathbf{P}}$. Per ogni funzione differenziabile $f : \mathbf{P} \rightarrow \mathbb{R}$, vale l'uguaglianza

$$\nabla_{[\bar{u}, \bar{v}]} f = \nabla_{\bar{u}} \nabla_{\bar{v}} f - \nabla_{\bar{v}} \nabla_{\bar{u}} f.$$

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo

$$\begin{aligned} \nabla_{\bar{u}} \nabla_{\bar{v}} f - \nabla_{\bar{v}} \nabla_{\bar{u}} f &= \nabla_{\bar{u}} \left(\sum_i v^i \partial_i f \right) - \nabla_{\bar{v}} \left(\sum_i u^i \partial_i f \right) \\ &= \sum_{ij} u^j v^i \partial_{ji} f - \sum_{ij} v^j u^i \partial_{ji} f + \left(\sum_{ij} u^j \partial_j v^i - \sum_{ij} v^j \partial_j u^i \right) \partial_i f \\ &= \left(\sum_{ij} u^j \partial_j v^i - \sum_{ij} v^j \partial_j u^i \right) \partial_i f. \text{ QED} \end{aligned}$$

Anzi, si può dimostrare che l'uguaglianza precedente caratterizza il commutatore.

1.7.9 Esempio. Il commutatore di un campo vettoriale \bar{u} con sé stesso è nullo:

$$[\bar{u}, \bar{v}] = 0. \square$$

1.7.10 Esempio. Il commutatore dei campi vettoriali tangenti a due curve coordinate di un sistema di coordinate è nullo:

$$[\partial x_i, \partial x_j] = 0. \square$$

1.7.3 Rotore

Studiamo poi l'operatore rotore.

Scegliamo un'orientazione di \mathbf{P} e riferiamoci alla corrispondente forma volume $\underline{\eta} : \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P} \times \Lambda^3 \bar{\mathbf{P}}^*$ ed al suo campo tensoriale duale $\bar{\eta} : \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P} \times \Lambda^3 \bar{\mathbf{P}}$, le cui espressioni in coordinate sono

$$\underline{\eta} = \sqrt{\det(g_{ij})} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \quad \text{e} \quad \bar{\eta} = \frac{1}{\sqrt{\det(g_{ij})}} \partial x_1 \wedge \partial x_2 \wedge \partial x_3.$$

1.7.11 Lemma. Sia $\hat{\omega} : \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P} \times L(\bar{\mathbf{P}}, \bar{\mathbf{P}})$ un operatore lineare antisimmetrico ed $\underline{\omega} : \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P} \times L^2(\bar{\mathbf{P}}, \mathbb{R})$ la corrispondente forma bilineare antisimmetrica indotta dalla metrica, le cui espressioni in coordinate sono

$$\hat{\omega} = \sum_{ij} \omega_i^j dx^i \otimes \partial x_j \quad \text{e} \quad \underline{\omega} = \sum_{hk} \omega_{hk} dx^h \otimes dx^k,$$

con

$$\omega_i^j = \sum_r \omega_{ir} g^{rj} : \mathbf{P} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \omega_{hk} = \sum_r \omega_h^r g_{rk} : \mathbf{P} \rightarrow \mathbb{R},$$

e

$$\omega_{hk} = -\omega_{kh}.$$

Allora esiste un unico campo vettoriale $\bar{\Omega} \in \mathbf{P} \times \bar{\mathbf{P}}$, tale che

$$(*) \quad \bar{\Omega} \times \bar{v} = \hat{\omega}(\bar{v}), \quad \forall \bar{v} : \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P} \times \bar{\mathbf{P}}.$$

Il campo vettoriale $\bar{\Omega}$ risulta essere uguale ad un mezzo la contrazione della forma bilineare antisimmetrica ω con il tensore $\bar{\eta}$

$$(**) \quad \bar{\Omega} = \frac{1}{2} i(\omega) \bar{\eta}.$$

L'espressione in coordinate di $\bar{\Omega}$ è

$$(***) \quad \bar{\Omega} = \frac{1}{\sqrt{\det(g_{ij})}} (\omega_{23} \partial x_1 + \omega_{31} \partial x_2 + \omega_{12} \partial x_3).$$

Pertanto, le componenti di $\bar{\Omega}$ sono espresse dall'uguaglianza

$$\Omega^i = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\det(g_{ij})}} \sum_{ihk} \epsilon^{ihk} \omega_{hk},$$

dove abbiamo posto

$$\begin{aligned} &= +1, & \text{se } (ihk) \text{ è una permutazione pari di } (123), \\ \epsilon^{ihk} &= 0, & \text{se } (ihk) \text{ non è una permutazione di } (123), \\ &= -1, & \text{se } (ihk) \text{ è una permutazione dispari di } (123). \end{aligned}$$

DIMOSTRAZIONE. Riferiamoci ad un sistema di coordinate cartesiano.

Unicità. Supponiamo che esista un $\bar{\Omega}$ che soddisfa l'equazione (*).

Allora, considerando i tre vettori $\bar{v} = \bar{e}_1$, $\bar{v} = \bar{e}_2$, $\bar{v} = \bar{e}_3$, l'equazione (*) implica

$$\begin{aligned} \bar{\Omega} \times \bar{e}_1 &= \hat{\omega}(\bar{e}_1) \\ \bar{\Omega} \times \bar{e}_2 &= \hat{\omega}(\bar{e}_2) \\ \bar{\Omega} \times \bar{e}_3 &= \hat{\omega}(\bar{e}_3), \end{aligned}$$

ossia

$$\begin{aligned} -\Omega^2 \bar{e}_3 + \Omega^3 \bar{e}_2 &= \omega_1^2 \bar{e}_2 + \omega_1^3 \bar{e}_3 \\ \Omega^1 \bar{e}_3 - \Omega^3 \bar{e}_1 &= \omega_2^1 \bar{e}_1 + \omega_2^3 \bar{e}_3 \\ -\Omega^1 \bar{e}_2 + \Omega^2 \bar{e}_1 &= \omega_3^1 \bar{e}_1 + \omega_3^2 \bar{e}_2, \end{aligned}$$

ossia

$$\Omega^1 = \omega_2^3 = -\omega_3^2, \quad \Omega^2 = \omega_3^1 = -\omega_1^3, \quad \Omega^3 = \omega_1^2 = -\omega_2^1.$$

Esistenza. Si verifica facilmente che il vettore trovato sopra

$$\bar{\Omega} = \omega_{23} \bar{e}_1 + \omega_{31} \bar{e}_2 + \omega_{12} \bar{e}_3$$

soddisfa la condizione (*) per ogni $\bar{v} : \mathbf{P} \rightarrow \bar{\mathbf{P}}$.

Verifichiamo poi che $\bar{\Omega}$ soddisfa l'uguaglianza (**). Infatti, abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} i(\omega) \bar{\eta} &= \frac{1}{2} i(2\omega_{12} dx^1 \wedge dx^2 + 2\omega_{23} dx^2 \wedge dx^3 + 2\omega_{31} dx^3 \wedge dx^1) (\partial x_1 \wedge \partial x_2 \wedge \partial x_3) \\ &= \omega_{23} \partial x_1 + \omega_{31} \partial x_2 + \omega_{12} \partial x_3. \end{aligned}$$

Infine, l'espressione (***) di $\bar{\Omega}$ in un sistema di coordinate qualunque segue dall'espressione in coordinate dell'uguaglianza (**). QED

1.7.12 Esempio. In un sistema di coordinate cartesiano, cilindrico e sferico, abbiamo, rispettivamente,

$$\begin{aligned} \bar{\Omega} &= \omega_{yz} \partial_x + \omega_{zx} \partial_y + \omega_{xy} \partial_z \\ &= \omega_y^z \partial_x + \omega_z^x \partial_y + \omega_x^y \partial_z, \\ \bar{\Omega} &= \frac{1}{\rho} (\omega_{\phi z} \partial_\rho + \omega_{z\rho} \partial_\phi + \omega_{\rho\phi} \partial_z) \\ &= \frac{1}{\rho} (\omega_\phi^z \partial_\rho + \omega_z^\rho \partial_\phi + \rho^2 \omega_\rho^\phi \partial_z), \\ \bar{\Omega} &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} (\omega_{\theta\phi} \partial_\rho + \omega_{\phi r} \partial_\theta + \omega_{r\theta} \partial_\phi) \\ &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} (r^2 \sin^2 \theta \omega_\theta^\phi \partial_r + \omega_\phi^r \partial_\theta + r^2 \omega_r^\theta \partial_\phi), \end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned} \omega_{xy} &= \omega_x^y, & \omega_{zx} &= \omega_z^x, & \omega_{yz} &= \omega_y^z, \\ \omega_{\rho\phi} &= \rho^2 \omega_\rho^\phi, & \omega_{z\rho} &= \omega_z^\rho, & \omega_{\phi z} &= \omega_\phi^z, \\ \omega_{r\theta} &= r^2 \omega_r^\theta, & \omega_{\phi r} &= \omega_\phi^r, & \omega_{\theta\phi} &= r^2 \sin^2 \theta \omega_\theta^\phi. \quad \square \end{aligned}$$

Consideriamo ora un campo vettoriale differenziabile $\bar{v} : \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P} \times \bar{\mathbf{P}}$ e la forma differenziale associata $\underline{v} : \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P} \times \bar{\mathbf{P}}^*$, le cui espressioni in coordinate sono

$$\bar{v} = \sum_i v^i \partial x_i \quad \text{e} \quad \underline{v} = \sum_j v_j dx^j, \quad \text{con} \quad v_j = \sum_i g_{ij} v^i.$$

1.7.13 Lemma. La componente antisimmetrica del differenziale covariante di \underline{v} è il campo tensoriale antisimmetrico, detto anche *differenziale esterno* di \underline{v} ,

$$d\underline{v} := \text{Ant } \nabla \underline{v} : \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P} \times (\bar{\mathbf{P}}^* \otimes \bar{\mathbf{P}}^*),$$

la cui espressione in coordinate è

$$\begin{aligned} d\underline{v} &= \frac{1}{2} \sum_{ij} (\partial_i v_j - \partial_j v_i) dx^i \otimes dx^j \\ &\equiv \sum_{ij} \partial_i v_j dx^i \wedge dx^j . \square \end{aligned}$$

1.7.14 Definizione. Definiamo *rotore* del campo vettoriale $\bar{v} : \mathbf{P} \rightarrow \bar{\mathbf{P}}$ il campo vettoriale

$$\text{rot } \bar{v} := i(d\underline{v}) \bar{\eta} : \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P} \times \bar{\mathbf{P}} . \square$$

1.7.15 Proposizione. L'espressione in coordinate del rotore di \bar{v} è data da

$$\text{rot } \bar{v} = \frac{1}{\sqrt{\det(g_{ij})}} ((\partial_2 v_3 - \partial_3 v_2) \partial x_1 + (\partial_3 v_1 - \partial_1 v_3) \partial x_2 + (\partial_1 v_2 - \partial_2 v_1) \partial x_3 ,)$$

ossia dal “determinante formale”

$$\text{rot } \bar{v} = \frac{1}{\sqrt{\det(g_{ij})}} \det \begin{pmatrix} \partial x_1 & \partial x_2 & \partial x_3 \\ \frac{\partial}{\partial x^1} & \frac{\partial}{\partial x^2} & \frac{\partial}{\partial x^3} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} ,$$

dove

$$v_i = \sum_j g_{ij} v^j .$$

DIMOSTRAZIONE. Segue dal Lemma 1.7.11, considerando l'applicazione lineare $\hat{\omega} = D\bar{v}$. QED

1.7.16 Esempio. In un sistema di coordinate cartesiano, cilindrico e sferico, abbiamo, rispettivamente,

$$\begin{aligned} \text{rot } \bar{v} &= \left(\frac{\partial \omega_z}{\partial y} - \frac{\partial \omega_y}{\partial z} \right) \partial_x + \left(\frac{\partial \omega_x}{\partial z} - \frac{\partial \omega_z}{\partial x} \right) \partial_y + \left(\frac{\partial \omega_y}{\partial x} - \frac{\partial \omega_x}{\partial y} \right) \partial_z , \\ \text{rot } \bar{v} &= \frac{1}{\rho} \left(\left(\frac{\partial \omega_z}{\partial \phi} - \frac{\partial \omega_\phi}{\partial z} \right) \partial_\rho + \left(\frac{\partial \omega_\rho}{\partial z} - \frac{\partial \omega_z}{\partial \rho} \right) \partial_\phi + \left(\frac{\partial \omega_\phi}{\partial \rho} - \frac{\partial \omega_\rho}{\partial \phi} \right) \partial_z \right) , \\ \text{rot } \bar{v} &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left(\left(\frac{\partial \omega_\phi}{\partial \theta} - \frac{\partial \omega_\theta}{\partial x^\phi} \right) \partial_r + \left(\frac{\partial \omega_r}{\partial \phi} - \frac{\partial \omega_\phi}{\partial r} \right) \partial_\theta + \left(\frac{\partial \omega_\theta}{\partial r} - \frac{\partial \omega_r}{\partial \theta} \right) \partial_\phi \right) , \end{aligned}$$

ossia

$$\begin{aligned} \text{rot } \bar{v} &= \det \begin{pmatrix} \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{pmatrix} , \\ \text{rot } \bar{v} &= \frac{1}{\rho} \det \begin{pmatrix} \partial_\rho & \partial_\phi & \partial_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_\rho & v_\phi & v_z \end{pmatrix} , \end{aligned}$$

$$\operatorname{rot} \bar{v} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \det \begin{pmatrix} \frac{\partial_r}{\partial r} & \frac{\partial_\theta}{\partial \theta} & \frac{\partial_\phi}{\partial \phi} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ v_r & v_\theta & v_\phi \end{pmatrix},$$

dove

$$\begin{aligned} v_x &= v^x, & v_y &= v^y, & v_z &= v^z, \\ v_\rho &= v^\rho, & v_\phi &= \rho^2 v^\phi, & v_z &= v^z, \\ v_r &= v^r, & v_\theta &= r^2 v^\theta, & v_\phi &= r^2 \sin^2 \theta v^\phi. \quad \square \end{aligned}$$

1.7.17 Nota. Il significato geometrico e fisico del rotore di un campo vettoriale \bar{v} sarà interpretato, durante lo studio della cinematica dei continui, tramite la velocità angolare di un continuo che si muove con velocità \bar{v} . \square

1.7.4 Divergenza

Studiamo poi l'operatore divergenza.

1.7.18 Definizione. Definiamo *divergenza* di un campo vettoriale $\bar{v} : \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P} \times \bar{\mathbf{P}}$ il campo vettoriale

$$\operatorname{div} \bar{v} := \operatorname{tr}(\nabla \bar{v}) : \mathbf{P} \rightarrow \mathbb{R}. \quad \square$$

1.7.19 Proposizione. L'espressione in coordinate della divergenza di \bar{v} è

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \bar{v} &= \sum_{ij} \left(\frac{\partial v^i}{\partial x^i} + \Gamma_{ij}^i v^j \right) \\ &= \sum_i \left(\partial_i v^i + (\partial_i \sqrt{\det(g_{hk})} / \sqrt{\det(g_{hk})}) v^i \right). \end{aligned}$$

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \bar{v} &= \operatorname{tr}(\nabla \bar{v}) \\ &= \operatorname{tr} \left(\left(\frac{\partial v^i}{\partial x^j} + \Gamma_{ij}^j v^i \right) D x^j \otimes \partial x_i \right) \\ &= \sum_{ij} \left(\frac{\partial v^i}{\partial x^i} + \Gamma_{ij}^i v^j \right). \end{aligned}$$

Inoltre, abbiamo

$$\sum_i \Gamma_{ij}^i = \frac{\partial \sqrt{\det(g_{hk})}}{\partial x^j} / \sqrt{\det(g_{hk})}. \quad \text{QED}$$

1.7.20 Esempio. In un sistema di coordinate cartesiano, cilindrico e sferico abbiamo, rispettivamente,

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \bar{v} &= \frac{\partial v^x}{\partial x} + \frac{\partial v^y}{\partial y} + \frac{\partial v^z}{\partial z} \\ \operatorname{div} \bar{v} &= \frac{\partial v^\rho}{\partial \rho} + \frac{\partial v^\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial v^z}{\partial z} + \frac{1}{\rho} v^\rho \\ \operatorname{div} \bar{v} &= \frac{\partial v^r}{\partial r} + \frac{\partial v^\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v^\phi}{\partial \phi} + \frac{2}{r} v^r + \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} v^\theta . \square\end{aligned}$$

1.7.5 Laplaciano

Studiamo infine il Laplaciano di una funzione e di un campo vettoriale.

1.7.21 Definizione. Definiamo *laplaciano* di una funzione $f : \mathbf{P} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione

$$\Delta f := \bar{g} \lrcorner (\nabla^2 f) : \mathbf{P} \rightarrow \mathbb{R} . \square$$

1.7.22 Proposizione. L'espressione in coordinate del laplaciano di $f : \mathbf{P} \rightarrow \mathbb{R}$ è

$$\begin{aligned}\Delta f &= \sum_{ij} g^{ij} (\partial_i \partial_j f - \Gamma_i^h{}_j \partial_h f) \\ &= \sum_{ij} g^{ij} \partial_i \partial_j f + \sum_{ij} \frac{\partial_i (g^{ij} \sqrt{\det(g_{rs})})}{\sqrt{\det(g_{rs})}} \partial_j f .\end{aligned}$$

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo

$$\begin{aligned}\nabla f &= \partial_j f dx^j \\ \nabla^2 f &= (\partial_i \partial_j f - \Gamma_i^h{}_j \partial_h f) dx^i \otimes dx^j \\ \bar{g} \lrcorner (\nabla^2 f) &= g^{ij} (\partial_i \partial_j f - \Gamma_i^h{}_j \partial_h f) .\end{aligned}$$

Inoltre, si può dimostrare che

$$\sum_{ij} g^{ij} \Gamma_i^h{}_j = - \sum_i \frac{\partial_i (g^{ih} \sqrt{\det(g_{rs})})}{\sqrt{\det(g_{rs})}} . \text{QED}$$

1.7.23 Esempio. In un sistema di coordinate cartesiano, cilindrico e sferico abbiamo, rispettivamente

$$\begin{aligned}\Delta f &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial z}, \\ \Delta f &= \frac{\partial^2 f}{\partial \rho \partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi \partial \phi} + \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \rho}, \\ \Delta f &= \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta \partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi \partial \phi} + \frac{2}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \theta}. \quad \square\end{aligned}$$

1.7.24 Definizione. Definiamo *laplaciano* di un campo vettoriale $\bar{v} : \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P} \times \bar{\mathbf{P}}$ il campo vettoriale

$$\Delta \bar{v} := \bar{g} \lrcorner (\nabla^2 \bar{v}) : \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P} \times \bar{\mathbf{P}}. \quad \square$$

1.7.25 Proposizione. L'espressione in coordinate del laplaciano di $\bar{v} : \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P} \times \bar{\mathbf{P}}$ è

$$\Delta \bar{v} = \sum_{ijkl} g^{hk} (\partial_h \partial_k v^i + 2 \Gamma_h^i{}_j \partial_k v^j - \Gamma_h^l{}_k \partial_l v^j + (\partial_h \Gamma_k^i{}_j + \Gamma_h^i{}_l \Gamma_k^l{}_j - \Gamma_h^l{}_k \Gamma_l^i{}_j) v^j) \partial x_i.$$

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo

$$\begin{aligned}\nabla \bar{v} &= \sum_{ijk} (\partial_k v^i + \Gamma_k^i{}_j v^j) dx^k \otimes \partial x_i \\ \nabla^2 \bar{v} &= \sum_{ijkl} (\partial_h \partial_k v^i + \Gamma_k^i{}_j \partial_h v^j + (\partial_h \Gamma_k^i{}_j) v^j - \Gamma_h^l{}_k (\partial_l v^i + \Gamma_l^i{}_j v^j) + \Gamma_h^i{}_l (\partial_k v^l + \Gamma_k^l{}_j v^j)) \\ &\quad dx^h \otimes dx^k \otimes \partial x_i \\ &= \sum_{ijkl} g^{hk} (\partial_h \partial_k v^i + \Gamma_k^i{}_j \partial_h v^j + (\partial_h \Gamma_k^i{}_j) v^j - \Gamma_h^l{}_k (\partial_l v^i + \Gamma_l^i{}_j v^j) + \Gamma_h^i{}_l (\partial_k v^l + \Gamma_k^l{}_j v^j)) \partial x_i \\ &= \sum_{ijkl} g^{hk} (\partial_h \partial_k v^i + 2 \Gamma_h^i{}_j \partial_k v^j - \Gamma_h^l{}_k \partial_l v^j + (\partial_h \Gamma_k^i{}_j + \Gamma_h^i{}_l \Gamma_k^l{}_j - \Gamma_h^l{}_k \Gamma_l^i{}_j) v^j) \partial x_i. \quad \text{QED}\end{aligned}$$

1.7.26 Esempio. In un sistema di coordinate cartesiano abbiamo

$$\begin{aligned}\Delta \bar{v} &= \left(\frac{\partial v^x}{\partial x \partial x} + \frac{\partial v^x}{\partial y \partial y} + \frac{\partial v^x}{\partial z \partial z} \right) \bar{e}_x \\ &\quad + \left(\frac{\partial v^y}{\partial x \partial x} + \frac{\partial v^y}{\partial y \partial y} + \frac{\partial v^y}{\partial z \partial z} \right) \bar{e}_y \\ &\quad + \left(\frac{\partial v^z}{\partial x \partial x} + \frac{\partial v^z}{\partial y \partial y} + \frac{\partial v^z}{\partial z \partial z} \right) \bar{e}_z. \quad \square\end{aligned}$$

1.7.6 Proprietà degli operatori differenziali

Dedichiamo questa sezione allo studio delle proprietà degli operatori differenziali commutatore, gradiente, rotore, divergenza e laplaciano e delle loro mutue relazioni.

1.7.27 Proposizione. Consideriamo due funzioni $f, g : \mathbf{P} \rightarrow \mathbb{R}$, una costante $k \in \mathbb{R}$ e due campi vettoriali $\bar{u}, \bar{v} : \mathbf{P} \rightarrow \bar{\mathbf{P}}$. Allora, abbiamo

$$\begin{aligned} \text{grad}(f + g) &= \text{grad } f + \text{grad } g, & \text{grad}(kf) &= k \text{ grad } f, \\ \text{grad}(fg) &= f \text{ grad } g + g \text{ grad } f. \end{aligned}$$

DIMOSTRAZIONE. Possiamo verificare facilmente le uguaglianze precedenti in un sistema di coordinate cartesiane. QED

1.7.28 Proposizione. Consideriamo tre campi vettoriali $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$, una costante $k \in \mathbb{R}$ ed una funzione f . Allora abbiamo

$$\begin{aligned} [\bar{u}, \bar{v}] &= -[\bar{v}, \bar{u}], \\ [[\bar{u}, \bar{v}], \bar{w}] + [[\bar{w}, \bar{u}], \bar{v}] + [[\bar{v}, \bar{w}], \bar{u}] &= 0, \\ [\bar{u}, \bar{v}_1 + \bar{v}_2] &= [\bar{u}, \bar{v}_1] + [\bar{u}, \bar{v}_2], & [\bar{u}, k\bar{v}] &= k[\bar{u}, \bar{v}], \\ [\bar{u}, f\bar{v}] &= f[\bar{u}, \bar{v}] + (\nabla_{\bar{u}}f)\bar{v}. \end{aligned}$$

DIMOSTRAZIONE. Si possono verificare facilmente le uguaglianze precedenti in coordinate cartesiane. QED

1.7.29 Proposizione. Consideriamo due campi vettoriali \bar{u}, \bar{v} , una costante $k \in \mathbb{R}$ ed una funzione f . Allora abbiamo

$$\begin{aligned} \text{rot}(\bar{u} + \bar{v}) &= \text{rot } \bar{u} + \text{rot } \bar{v}, & \text{rot}(k\bar{u}) &= k \text{ rot } \bar{u}, \\ \text{rot}(f\bar{v}) &= f \text{ rot } \bar{v} + \text{grad } f \times \bar{v}, \\ \text{rot}(\bar{u} \times \bar{v}) &= \bar{u}(\text{div } \bar{v}) - \bar{v}(\text{div } \bar{u}) - [\bar{u}, \bar{v}]. \end{aligned}$$

DIMOSTRAZIONE. Si possono verificare facilmente le uguaglianze precedenti in coordinate cartesiane. QED

1.7.30 Proposizione. Valgono i seguenti fatti.

1) Se f è una funzione, allora abbiamo

$$\text{rot grad } f = 0.$$

2) Se \bar{v} è un campo vettoriale tale che

$$\text{rot } \bar{v} = 0,$$

allora, “localmente” esiste una funzione f tale che

$$\bar{v} = \text{grad } f .$$

DIMOSTRAZIONE. 1). In coordinate cartesiane abbiamo

$$\begin{aligned} \text{rot grad } f &= \text{rot} (\partial_1 f \bar{e}_1 + \partial_2 f \bar{e}_2 + \partial_3 f \bar{e}_3) \\ &= (\partial_2 \partial_3 f - \partial_3 \partial_2 f) \bar{e}_1 + (\partial_3 \partial_1 f - \partial_1 \partial_3 f) \bar{e}_2 + (\partial_1 \partial_2 f - \partial_2 \partial_1 f) \bar{e}_3 \\ &= 0 . \end{aligned}$$

2) Per la dimostrazione rimandiamo al corso di Analisi Matematica. QED

1.7.31 Nota. Si noti che l’operatore “grad rot” non ha senso, perché il gradiente opera su funzioni e non su campi vettoriali. \square

1.7.32 Proposizione. Consideriamo due campi vettoriali \bar{u} , \bar{v} , una costante $k \in \mathbb{R}$ ed una funzione f . Allora abbiamo

$$\begin{aligned} \text{div}(\bar{u} + \bar{v}) &= \text{div } \bar{u} + \text{div } \bar{v} , & \text{div}(k \bar{v}) &= k \text{div } \bar{v} , \\ \text{div}(f \bar{v}) &= f \text{div } \bar{v} + \text{grad } f \cdot \bar{v} , \\ \text{div}(\bar{u} \times \bar{v}) &= -(\bar{u} \cdot \text{rot } \bar{v} - \bar{v} \cdot \text{rot } \bar{u}) , \\ \text{div}[\bar{u}, \bar{v}] &= \nabla_{\bar{u}} \text{div } \bar{v} - \nabla_{\bar{v}} \text{div } \bar{u} . \end{aligned}$$

DIMOSTRAZIONE. Si possono verificare facilmente le uguaglianze precedenti in coordinate cartesiane. QED

1.7.33 Proposizione. Se $\bar{v} : \mathbf{P} \rightarrow \bar{\mathbf{P}}$ è un campo vettoriale, allora abbiamo

$$\text{div}(\text{rot } \bar{v}) = 0 .$$

DIMOSTRAZIONE. In un sistema di coordinate cartesiano abbiamo

$$\begin{aligned} \text{div}(\text{rot } \bar{v}) &= \text{div} \left(\left(\frac{\partial v_3}{\partial x^2} - \frac{\partial v_2}{\partial x^3} \right) \partial x_1 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial x^3} - \frac{\partial v_3}{\partial x^1} \right) \partial x_2 + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x^1} - \frac{\partial v_1}{\partial x^2} \right) \partial x_3 \right) \\ &= \frac{\partial^2 v_3}{\partial x^1 \partial x^2} - \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^1 \partial x^3} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2 \partial x^3} - \frac{\partial^2 v_3}{\partial x^2 \partial x^1} + \frac{\partial^3 v_2}{\partial x^3 \partial x^1} - \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^3 \partial x^2} \\ &= 0 . \text{ QED} \end{aligned}$$

1.7.34 Nota. Si noti che l’operatore “rot div” non ha senso, perché il rotore opera su campi vettoriali e non su funzioni. \square

1.7.35 Proposizione. Consideriamo due funzioni $f, g : \mathbf{P} \rightarrow \mathbb{R}$, una costante $k \in \mathbb{R}$ e due campi vettoriali $\bar{u}, \bar{v} : \mathbf{P} \rightarrow \bar{\mathbf{P}}$. Allora, abbiamo

$$\begin{aligned} \Delta(f + g) &= \Delta f + \Delta g , & \Delta(kf) &= k \Delta f \\ \Delta(fg) &= f \Delta g + g \Delta f + 2(\text{grad } f) \cdot (\text{grad } g) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta(\bar{u} + \bar{v}) &= \Delta\bar{u} + \Delta\bar{v}, & \Delta(k\bar{u}) &= k\Delta\bar{u}, \\ \Delta(f\bar{u}) &= f\Delta\bar{u} + (\Delta f)\bar{u} + 2\nabla_{\text{grad } f}\bar{u}.\end{aligned}$$

DIMOSTRAZIONE. Possiamo verificare facilmente le uguaglianze precedenti in un sistema di coordinate cartesiano. QED

1.7.36 Proposizione. Consideriamo una funzione $f : \mathbf{P} \rightarrow \mathbb{R}$. Allora abbiamo

$$\Delta f = \text{div grad } f.$$

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo

$$\Delta f := \bar{g}^{-1}(\nabla\nabla f) = C_1^1(\nabla(g^\sharp\nabla f)) = \text{div grad } f. \text{ QED}$$

1.7.37 Proposizione. Consideriamo un campo vettoriale $\bar{v} : \mathbf{P} \rightarrow \bar{\mathbf{P}}$. Allora, abbiamo

$$\Delta\bar{v} = \text{grad div } \bar{v} - \text{rot rot } \bar{v}.$$

DIMOSTRAZIONE. Possiamo verificare facilmente l'uguaglianza precedente in un sistema di coordinate cartesiano. QED

1.7.38 Proposizione. Consideriamo un campo vettoriale $\bar{v} : \mathbf{P} \rightarrow \bar{\mathbf{P}}$. Allora, abbiamo

$$\Delta \text{div } \bar{v} = \text{div } \Delta\bar{v}, \quad \Delta \text{rot } \bar{v} = -\text{rot rot rot } \bar{v}.$$

DIMOSTRAZIONE. Possiamo verificare facilmente le uguaglianze precedenti in un sistema di coordinate cartesiano. QED

CAPITOLO 2

CINEMATICA

2.1 Gli spazi di base

Incominciamo con la descrizione degli spazi di base della nostra teoria dei sistemi continui.

Rappresentiamo l'insieme degli *istanti* mediante uno spazio affine orientato \mathbf{T} di dimensione 1.

Indichiamo con $\bar{\mathbf{T}}$ lo spazio dei vettori liberi di \mathbf{T} ; esso è uno spazio vettoriale orientato di dimensione 1 che rappresenta l'insieme degli *intervalli di tempo*.

Scelta un'unità di misura degli intervalli di tempo $\bar{e}_0 \in \bar{\mathbf{T}}^+$, otteniamo un isomorfismo lineare $\bar{\mathbf{T}} \rightarrow \mathbb{R}$, che ci permette di identificare $\bar{\mathbf{T}}$ con \mathbb{R} .

Rappresentiamo lo spazio delle *posizioni* osservate da un osservatore inerziale mediante uno spazio affine euclideo \mathbf{P} di dimensione 3.

Indichiamo con $\bar{\mathbf{P}}$ lo spazio dei vettori liberi di \mathbf{P} ; esso è uno spazio vettoriale euclideo di dimensione 3 che rappresenta gli *intervalli di posizione*.

Indichiamo con $g \in L^2(\bar{\mathbf{P}}, \mathbb{R})$ la *metrica euclidea*.

Scelto un istante iniziale $t \in \mathbf{T}$ ed un'unità di misura di tempo $\bar{e}_0 \in \bar{\mathbf{T}}^+$, ci riferiremo al *sistema di coordinate temporale* indotto

$$x^0 : \mathbf{T} \rightarrow \mathbb{R} : s \mapsto (s - t)^0.$$

Ci riferiremo anche ad un sistema di coordinate spaziale $(x^1, x^2, x^3) : \mathbf{P} \rightarrow \mathbb{R}$, che può essere cartesiano o curvilineo.

2.2 Moto

Introduciamo le nozioni fondamentali riguardanti il moto dei continui.

2.2.1 Moto come trasformazione

Incominciamo dalla rappresentazione del moto tramite la trasformazione del dominio nel tempo.

Consideriamo un *moto continuo*.

2.2.1 Definizione. Definiamo *dominio spaziale* all'istante $t \in \mathbf{T}$ il sottinsieme

$$\mathbf{D}_t \subset \mathbf{P}$$

costituito dalle posizioni occupate dalle particelle del continuo a tale istante.

Definiamo *dominio spazio temporale* il sottinsieme

$$\mathbf{D} := \{(t, p) \in \mathbf{T} \times \mathbf{P} \mid t \in \mathbf{T}, p \in \mathbf{D}_t\} \subset \mathbf{T} \times \mathbf{P}. \square$$

2.2.2 Assunzione. Supponiamo che, per ogni istante $t \in \mathbf{T}$, il dominio spaziale $\mathbf{D}_t \subset \mathbf{P}$ sia un sottinsieme aperto, il cui bordo è “sufficientemente regolare”.

Supponiamo anche che, per ogni coppia di istanti $s, t \in \mathbf{T}$, durante il moto, le particelle inducano una corrispondenza biunivoca e di classe C^∞ tra i domini spaziali \mathbf{D}_t e \mathbf{D}_s .

Supponiamo, infine che il moto di ciascuna particella sia di classe C^∞ . \square

Dunque, implicitamente abbiamo assunto che i punti del bordo del dominio spaziale non siano occupati da nessuna particella del sistema. Ciò nonostante, i punti del bordo del dominio spaziale hanno rilevanza meccanica, perché attraverso essi possono essere esercitate azioni meccaniche sul sistema.

Abbiamo anche assunto implicitamente che particelle distinte del sistema, pur potendosi eventualmente avvicinare tra loro quanto si voglia, non si toccano mai.

In base alle precedenti ipotesi possiamo descrivere il moto come segue.

2.2.3 Proposizione. Possiamo descrivere il *moto* mediante un'applicazione di classe C^∞

$$C : \mathbf{T} \times \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{P},$$

che soddisfa le seguenti *identità di congruenza*

$$\begin{aligned} C(t; t, p) &= p & \forall t \in \mathbf{T}, \forall p \in \mathbf{D}_t, \\ C(r; s, C(s; t, p)) &= C(r; t, p), & \forall r, s, t \in \mathbf{T}, \forall p \in \mathbf{D}_t. \square \end{aligned}$$

2.2.4 Corollario. In particolare, per $r = t$, otteniamo

$$C(t; s, (C(s; t, p) \circ C(s; t, p)) = p. \square$$

2.2.5 Nota. La posizione

$$C(s; t, p) \in \mathbf{D}_s$$

è la *posizione finale* occupata all'*istante finale* s dalla particella che all'*istante iniziale* t occupa la *posizione iniziale* $p \in \mathbf{D}_t$. \square

2.2.6 Proposizione. L'espressione in coordinate del moto C è data da

$$C^i := x^i \circ C : \mathbf{T} \times \mathbf{D} \rightarrow \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, 3. \square$$

2.2.7 Nota. Le coordinate $C^i(s; t, p) \in \mathbb{R}$ della posizione “finale” $C(s; t, p) \in \mathbf{D}_s$ e $x^i(p) \in \mathbb{R}$ della posizione “iniziale” $p \in \mathbf{D}_t$ sono calcolate, rispettivamente, mediante le funzioni coordinate x^i valutate in un intorno della posizione finale e della posizione iniziale.

Si potrebbero addirittura usare due sistemi di coordinate diversi nei due precedenti intorni, senza cambiare in modo rilevante le formule in coordinate derivate dall'espressione del moto C . E' per questa naturale rappresentazione del moto che le espressioni in coordinate di tutte le formule cinematiche desunte da C risultano abbastanza semplici in qualunque sistema di coordinate. \square

2.2.2 Moto come spostamento

In alcuni trattati classici si usa descrivere il moto in un altro modo, considerando lo spostamento delle particelle nel tempo.

2.2.8 Definizione. Definiamo lo *spostamento* come segue

$$\bar{\mathcal{S}} : \mathbf{T} \times \mathbf{D} \rightarrow \bar{\mathbf{P}} : (s; t, p) \mapsto C(s; t, p) - p. \square$$

2.2.9 Proposizione. Lo spostamento $\bar{\mathcal{S}}$ caratterizza il moto continuo C stesso, mediante la formula inversa

$$C(s; t, p) = p - \bar{\mathcal{S}}(s; t, p). \square$$

Dunque, da un punto di vista formale, la conoscenza di C e la conoscenza di $\bar{\mathcal{S}}$ sono equivalenti. Però, la descrizione del moto tramite $\bar{\mathcal{S}}$ produce talvolta formule più complicate.

2.2.10 Nota. La descrizione del vettore $\bar{\mathcal{S}}(s; t, p)$ risulta difficile e non naturale in coordinate curvilinee.

Potremmo riferirci alla base indotta $(\delta x_i(p))$ in p , o alla base indotta $(\delta x_i(C(s; t, p)))$ in $C(s; t, p)$, ma nessuna delle due costituisce una scelta naturale.

Solo se usiamo un sistema di coordinate cartesiano l'espressione di $\bar{\mathcal{S}}$ è semplice e naturale perché la base indotta (\bar{e}_i) è costante. Decidiamo allora di riferirci solo ad un sistema di coordinate cartesiano quando descriviamo lo spostamento $\bar{\mathcal{S}}$ e le grandezze da esso derivate. \square

2.2.11 Proposizione. L'espressione di $\bar{\mathcal{S}}$ in un sistema di coordinate cartesiano è

$$\bar{\mathcal{S}}(s; t, p) = \mathcal{S}^i(s; t, p) \bar{e}_i, \quad \text{dove} \quad \mathcal{S}^i(s; t, p) = C^i(s; t, p) - x^i(p). \square$$

Ogni moto continuo può essere espresso anche sostituendo il tempo finale con l'intervallo di tempo trascorso tra il tempo iniziale ed il tempo finale, come segue.

2.2.12 Nota. Per ogni moto continuo $\bar{\mathcal{S}} : T \times D \rightarrow \bar{P}$, possiamo definire l'applicazione

$$\bar{\mathcal{S}}' : \mathbb{R} \times D \rightarrow \bar{P} : (\lambda; t, p) \mapsto \bar{\mathcal{S}}'(\lambda; t, p) := \bar{\mathcal{S}}(t + \lambda; t, p).$$

Si vede facilmente che tale applicazione $\bar{\mathcal{S}}'$ caratterizza il moto $\bar{\mathcal{S}}$ tramite la formula

$$\bar{\mathcal{S}} : T \times D \rightarrow \bar{P} : (s; t, p) \mapsto \bar{\mathcal{S}}(s; t, p) = \bar{\mathcal{S}}'(s - t; t, p).$$

Dunque, possiamo esprimere equivalentemente un moto continuo tramite l'applicazione $\bar{\mathcal{S}}$, o l'applicazione $\bar{\mathcal{S}}'$. \square

2.2.13 Nota. Per ogni moto continuo $\bar{\mathcal{S}} : T \times D \rightarrow \bar{P}$, abbiamo

$$\bar{v} := \delta \bar{\mathcal{S}} = \delta \bar{\mathcal{S}}',$$

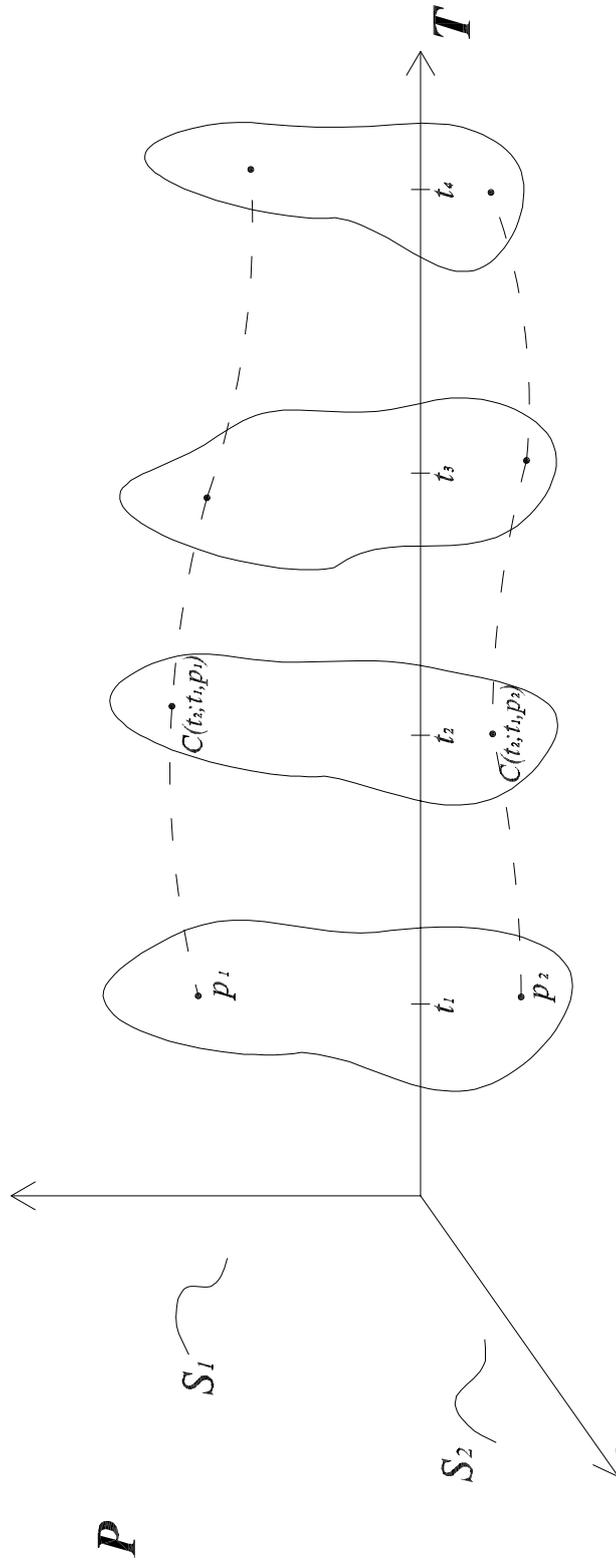
dove

$$\delta \bar{\mathcal{S}}'(t, p) := (D_1 \bar{\mathcal{S}}')(0; t, p)$$

indica la derivata parziale di $\bar{\mathcal{S}}'$ rispetto al parametro λ valutata per $\lambda = 0$.

DIMOSTRAZIONE. Segue immediatamente dalla formula

$$\bar{\mathcal{S}}'(\lambda; t, p) = \bar{\mathcal{S}}(t + \lambda; t, p). \text{ QED}$$



2.3 Grandezze del continuo

2.3.1 Grandezze in forma lagrangiana ed euleriana

Introduciamo ora la definizione di grandezza di un continuo.

2.3.1 Definizione. L'espressione lagrangiana di una grandezza del continuo a valori in uno spazio affine \mathbf{V} è un'applicazione del tipo

$$\mathbf{G}_{\text{Lag}} : \mathbf{T} \times \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{V},$$

che soddisfa l'identità di congruenza

$$\mathbf{G}_{\text{Lag}}(r; s, C(s; t, p)) = \mathbf{G}_{\text{Lag}}(r; t, p), \quad \forall r, s, t \in \mathbf{T}, \forall p \in \mathbf{D}_t.$$

L'espressione euleriana della stessa grandezza è definita come l'applicazione

$$\mathbf{G}_{\text{Eul}} : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{V},$$

dove

$$\mathbf{G}_{\text{Eul}}(t, p) := \mathbf{G}_{\text{Lag}}(t; t, p). \square$$

2.3.2 Proposizione. L'espressione euleriana della grandezza caratterizza la sua espressione lagrangiana, tramite il moto, mediante la formula

$$\mathbf{G}_{\text{Lag}}(s; t, p) = \mathbf{G}_{\text{Eul}}(s, C(s; t, p)). \square$$

2.3.3 Nota. Dunque, per definizione, $\mathbf{G}_{\text{Lag}}(s; t, p) \in \mathbf{V}$ è il valore della grandezza \mathbf{G}_{Lag} all'istante finale s , relativamente alla particella che occupa la posizione iniziale p all'istante iniziale t .

Inoltre, per definizione, $\mathbf{G}_{\text{Eul}}(t, p) \in \mathbf{V}$ è il valore della grandezza \mathbf{G} all'istante finale t , relativamente alla particella che occupa la posizione iniziale p all'istante iniziale t .

In altre parole, nell'espressione euleriana della grandezza si utilizza come istante iniziale per individuare la posizione iniziale della particella lo stesso istante in cui si esegue la misura della grandezza.

2.3.2 Derivate di una grandezza

Discutiamo le derivate prime notevoli di una grandezza.

2.3.4 Definizione. La *derivata parziale temporale* è la derivata parziale di \mathbf{G}_{Eul} rispetto al tempo

$$\partial_0(\mathbf{G}_{\text{Eul}}) := D_1(\mathbf{G}_{\text{Eul}}) : \mathbf{D} \rightarrow \bar{\mathbf{V}}. \square$$

In altre parole, la derivata parziale temporale è la derivata di \mathbf{G}_{Eul} rispetto al tempo, sia iniziale che finale, tenendo fissa la posizione. Si osservi, che in tale posizione, nel mentre si effettua tale derivata, possono passare particelle diverse. Pertanto, tale derivata non è eseguita riferendosi ad una particella fissata.

2.3.5 Definizione. La *derivata temporale totale* (o *sostanziale*, o *particellare*) è la derivata parziale di G_{Lag} rispetto al tempo finale

$$D_1(\mathbf{G}_{\text{Lag}}) : \mathbf{T} \times \mathbf{D} \rightarrow \bar{\mathbf{V}}.$$

Inoltre, indichiamo l'espressione euleriana di questa derivata con

$$\delta(\mathbf{G}_{\text{Lag}}) := (D_1 \mathbf{G}_{\text{Lag}})_{\text{Eul}} : \mathbf{D} \rightarrow \bar{\mathbf{V}},$$

ossia con

$$(\delta(\mathbf{G}_{\text{Lag}}))(t, p) := (D_1(\mathbf{G}_{\text{Lag}}))(t; t, p), \quad \forall (t, p) \in \mathbf{D}. \square$$

In altre parole, la derivata particellare è la derivata di \mathbf{G}_{Lag} rispetto al tempo finale, riferendosi ad una particella fissata.

2.3.6 Definizione. Definiamo le due seguenti derivate spaziali.

La *derivata spaziale* della grandezza \mathbf{G}_{Lag} è definita come la derivata parziale di \mathbf{G}_{Lag} rispetto allo spazio

$$\check{D}(\mathbf{G}_{\text{Lag}}) := D_3(\mathbf{G}_{\text{Lag}}) : \mathbf{T} \times \mathbf{D} \rightarrow \bar{\mathbf{P}}^* \otimes \bar{\mathbf{V}},$$

ossia,

$$(\check{D}\mathbf{G})(s; t, p) := (D(G_{(s,t)}))(p), \quad \forall (s; t, p) \in \mathbf{T} \times \mathbf{D}.$$

La *derivata spaziale* della grandezza \mathbf{G}_{Eul} è definita come la derivata parziale di \mathbf{G}_{Eul} rispetto allo spazio

$$\check{D}(\mathbf{G}_{\text{Eul}}) := D_2(\mathbf{G}_{\text{Eul}}) : \mathbf{D} \rightarrow \bar{\mathbf{P}}^* \otimes \bar{\mathbf{V}},$$

ossia,

$$(\check{D}(\mathbf{G}_{\text{Eul}}))(t, p) := (D(\mathbf{G}_{\text{Eul } t}))(p), \quad \forall (t, p) \in \mathbf{D}. \square$$

2.3.7 Proposizione. Abbiamo

$$((\check{D}(\mathbf{G}_{\text{Lag}}))_{\text{Eul}} = \check{D}(\mathbf{G}_{\text{Eul}}),$$

DIMOSTRAZIONE. L'espressione euleriana è ottenuta da quella lagrangiana identificando l'istante iniziale con l'istante finale, mentre la derivata spaziale è la derivata parziale rispetto ad una variabile indipendente dal tempo (sia iniziale che finale). \square

In altre parole, sia nella formulazione lagrangiana che in quella euleriana, la derivata spaziale è la derivata della grandezza rispetto alla posizione, tenendo fissi sia il tempo iniziale che quello finale.

Invece, la derivata temporale totale e la derivata temporale parziale non sono uguali. Infatti, la prima è calcolata riferendosi ad una particella fissata, mentre la seconda è calcolata riferendosi ad una posizione fissata. Le due derivate sono legate dalla seguente uguaglianza.

2.3.8 Proposizione. Abbiamo

$$\delta(G_{\text{Lag}}) = \partial_0(G_{\text{Eul}}) + (\check{D}(G_{\text{Eul}}))(\delta C).$$

DIMOSTRAZIONE. Derivando la formula

$$G_{\text{Lag}}(s; t, p) = G_{\text{Eul}}(s, C(s; t, p))$$

rispetto ad s , otteniamo

$$((D_1(\mathbf{G}_{\text{Lag}}))(s; t, p) = (D_1(\mathbf{G}_{\text{Eul}}))(s, C(s; t, p)) + (D_2(\mathbf{G}_{\text{Eul}}))(s, C(s; t, p))((D_1 C)(s; t, p)).$$

Dunque, prendendo l'espressione euleriana di entrambi i membri, cioè ponendo $s = t$, otteniamo

$$(\delta(\mathbf{G}_{\text{Lag}}))(t, p) = (D_1(\mathbf{G}_{\text{Eul}}))(t, p) + (\check{D}(\mathbf{G}_{\text{Eul}}))(\delta C). \text{ QED}$$

Finora abbiamo usato molte parentesi per chiarezza di esposizione; ma d'ora in poi, scriveremo le formule precedenti in modo semplificato, omettendo varie parentesi.

Inoltre, ometteremo il suffisso “_{Lag}” ed “_{Eul}” quando non è necessario mettere in evidenza esplicitamente quale formulazione stiamo usando.

Per esempio, scriveremo più semplicemente

$$\delta \mathbf{G} := \delta(\mathbf{G}_{\text{Lag}}) := (D_1 \mathbf{G}_{\text{Lag}})_{\text{Eul}}.$$

2.4 Grandezze cinematiche

Studiamo ora le grandezze cinematiche del continuo, cioè le grandezze ottenute derivando il moto rispetto al tempo finale ed allo spazio.

2.4.1 Velocità ed accelerazione

Consideriamo le derivate particellari prima e seconda del moto.

2.4.1 Definizione. La *velocità* e l'*accelerazione* del moto continuo sono i campi vettoriali

$$\bar{\mathbf{v}} := \delta C : \mathbf{D} \rightarrow \bar{\mathbf{P}}, \quad \bar{\mathbf{a}} := \delta^2 C : \mathbf{D} \rightarrow \bar{\mathbf{P}}. \square$$

2.4.2 Nota. Per ogni $(t, p) \in \mathbf{D}$, la velocità $\bar{\mathbf{v}}(t, p)$ e l'accelerazione $\bar{\mathbf{a}}(t, p)$ sono la velocità e l'accelerazione all'istante $t \in \mathbf{T}$ della particella che allo stesso istante passa per p . \square

2.4.3 Proposizione. In un qualunque sistema di coordinate abbiamo l'espressione

$$\bar{\mathbf{v}} = \delta C^i \delta x_i, \quad \bar{\mathbf{a}} = (\delta^2 C^i + \Gamma_h^i{}^k \delta C^h \delta C^k) \delta x_i$$

ed, in particolare, in un sistema di coordinate cartesiano,

$$\bar{\mathbf{v}} = \delta C^i \bar{\mathbf{e}}_i, \quad \bar{\mathbf{a}} = \delta^2 C^i \bar{\mathbf{e}}_i. \square$$

2.4.4 Nota. Per ogni $s \in \mathbf{T}$ e $(t, p) \in \mathbf{D}$, possiamo approssimare il moto mediante la formula

$$C(s; t, p) \simeq p + \bar{\mathbf{v}}(t, p)(s - t) + \dots,$$

trascurando gli infinitesimi di ordine superiore ad $s - t$. \square

2.4.5 Proposizione. Possiamo esprimere la *velocità* e l'*accelerazione* del continuo tramite lo spostamento mediante le formule

$$\bar{\mathbf{v}} = \delta \bar{\mathcal{S}}, \quad \bar{\mathbf{a}} = \delta^2 \bar{\mathcal{S}}.$$

In un sistema di coordinate cartesiano abbiamo

$$\bar{\mathbf{v}} = \delta \bar{\mathcal{S}}^i \bar{\mathbf{e}}_i, \quad \bar{\mathbf{a}} = \delta^2 \bar{\mathcal{S}}^i \bar{\mathbf{e}}_i. \square$$

2.4.2 Jacobiano

Consideriamo la derivata spaziale del moto.

2.4.6 Definizione. L'operatore *jacobiano* è il campo tensoriale

$$\hat{\mathcal{J}} := \check{D}C : \mathbf{T} \times \mathbf{D} \rightarrow \text{End}(\bar{\mathbf{P}}) = \bar{\mathbf{P}}^* \otimes \bar{\mathbf{P}}. \square$$

2.4.7 Nota. Per ogni $s \in \mathbf{T}$, $(t, p) \in \mathbf{D}$ ed $\bar{h} \in \bar{\mathbf{P}}$, possiamo approssimare il moto mediante la formula

$$C(s; t, p + \bar{h}) \simeq C(s; t, p) + \hat{\mathcal{J}}(s; t, p)(\bar{h}) + \dots,$$

trascurando gli infinitesimi di ordine superiore ad \bar{h} .

Dunque, lo jacobiano $\hat{\mathcal{J}}(s; t, p)$ esprime la trasformazione dei vettori infinitesimi di separazione delle particelle, tra l'istante iniziale t e l'istante finale s , rispetto alla particella che occupa la posizione iniziale p , approssimando linearmente il moto. \square

2.4.8 Proposizione. L'espressione dello jacobiano in un qualunque sistema di coordinate è

$$\hat{\mathcal{J}} = \partial_j C^i D x^j \otimes (\delta x_i \circ C),$$

cioè

$$\hat{\mathcal{J}}(s; t, p) = \partial_j C^i(s; t, p) D x^j(p) \otimes (\delta x_i(C(s; t, p))), \quad \forall (s; t, p) \in \mathbf{T} \times \mathbf{D},$$

ed, in particolare, in un sistema di coordinate cartesiano

$$\hat{\mathcal{J}} = \partial_j C^i e^j \otimes \bar{e}_i. \square$$

2.4.9 Nota. La semplicità e la naturalezza di questa formula è legata al fatto che l'indice j è riferito al punto di partenza ed al sistema di coordinate valutato in un intorno di tale punto, mentre l'indice i è riferito al punto d'arrivo ed al sistema di coordinate valutato in un intorno di tale punto. \square

2.4.10 Proposizione. Abbiamo le seguenti identità di congruenza dello jacobiano

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{J}}(t; t, p) &= \text{id}_{\bar{\mathbf{P}}} & \forall t \in \mathbf{T}, \forall p \in \mathbf{D}_t, \\ \hat{\mathcal{J}}(r; s, (C(s; t, p) \circ \hat{\mathcal{J}}(s; t, p))) &= \hat{\mathcal{J}}(r; t, p) & \forall r, s, t \in \mathbf{T}, \forall p \in \mathbf{D}_t. \end{aligned}$$

Da queste segue, in particolare, per $r = t$,

$$\hat{\mathcal{J}}(t; s, (C(s; t, p) \circ \hat{\mathcal{J}}(s; t, p))) = \text{id}_{\bar{\mathbf{P}}}. \square$$

DIMOSTRAZIONE. Queste identità seguono dalle identità di congruenza del moto, mediante derivazione spaziale. QED

2.4.11 Corollario. Per ogni $(s; t, p) \in D$, lo jacobiano

$$\hat{\mathcal{J}}_{(s;t,p)} : \bar{P} \rightarrow \bar{P}$$

è un isomorfismo. \square

Il precedente risultato può essere visto come una diretta conseguenza del fatto che durante il moto particelle distinte del continuo non si toccano mai.

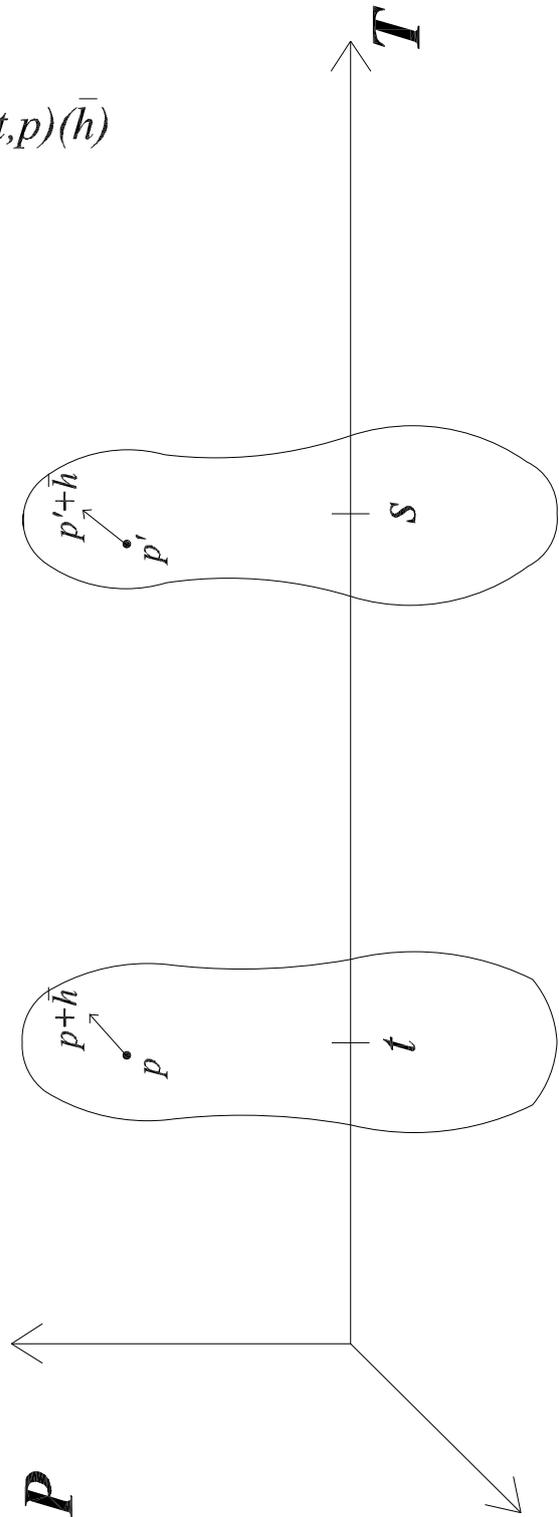
2.4.12 Proposizione. Possiamo esprimere lo jacobiano tramite lo spostamento \bar{S} mediante la formula

$$\hat{\mathcal{J}} = \text{id}_{\bar{P}} + \check{D}\bar{S}.$$

In un sistema di coordinate cartesiano abbiamo

$$\hat{\mathcal{J}} = (\delta_j^i + \partial_j S^i) \underline{e}^j \otimes \bar{e}_i. \square$$

$$\bar{h}' = \check{D}C(s; t, p)(\bar{h})$$



2.4.3 Tensore delle deformazioni

Consideriamo la trasformazione della metrica indotta dallo jacobiano.

2.4.13 Definizione. Definiamo il *tensore delle deformazioni* del moto continuo come la forma bilineare

$$\underline{\mathcal{G}} := g \circ (\hat{\mathcal{J}} \times \hat{\mathcal{J}}) : \mathbf{T} \times \mathbf{D} \rightarrow L^2(\bar{\mathbf{P}}, \mathbb{R}) = \bar{\mathbf{P}}^* \otimes \bar{\mathbf{P}}^* . \square$$

2.4.14 Nota. In altre parole, per ogni coppia di vettori $\bar{h}, \bar{k} \in \bar{\mathbf{P}}$, applicati in $p \in \mathbf{D}_t$ all'istante iniziale $t \in \mathbf{T}$, e per ogni istante finale $s \in \mathbf{T}$,

$$\underline{\mathcal{G}}_{(s;t,p)}(\bar{h}, \bar{k}) := \bar{h}' \cdot \bar{k}' := \hat{\mathcal{J}}(s; t, p)(\bar{h}) \cdot \hat{\mathcal{J}}(s; t, p)(\bar{k}) \in \mathbb{R}$$

è il prodotto scalare dei vettori

$$\bar{h}' := \hat{\mathcal{J}}(s; t, p)(\bar{h}), \quad \bar{k}' := \hat{\mathcal{J}}(s; t, p)(\bar{k})$$

trasformati tramite il moto (linearizzato al prim'ordine tramite lo jacobiano $\hat{\mathcal{J}}$).

Chiaramente, $\underline{\mathcal{G}}_{(s;t,p)}(\bar{h}, \bar{k})$ dipende linearmente da \bar{h} e da \bar{k} . \square

2.4.15 Proposizione. In particolare, otteniamo

$$\underline{\mathcal{G}}(t; t, p) = g, \quad \forall t \in \mathbf{T}, \forall p \in \mathbf{D}_t . \square$$

2.4.16 Proposizione. Per ogni $s, t \in \mathbf{T}$ e $p \in \mathbf{D}_t$, la forma bilineare

$$\underline{\mathcal{G}}(s; t, p) : \bar{\mathbf{P}} \times \bar{\mathbf{P}} \rightarrow \mathbb{R}$$

risulta essere simmetrica e definita positiva. \square

2.4.17 Proposizione. In un qualunque sistema di coordinate abbiamo l'espressione

$$\underline{\mathcal{G}} = (g_{hk} \circ C) \partial_i C^h \partial_j C^k D x^i \otimes D x^j ,$$

cioè

$$\underline{\mathcal{G}}(s; t, p)_{ij} = g_{hk}(C(s; t, p)) \partial_i C^h(s; t, p) \partial_j C^k(s; t, p), \quad \forall (s; t, p) \in \mathbf{T} \times \mathbf{D},$$

ed, in particolare, in un sistema di coordinate cartesiano

$$\underline{\mathcal{G}} = \delta_{hk} \partial_i C^h \partial_j C^k \underline{e}^i \otimes \underline{e}^j . \square$$

2.4.18 Nota. Dunque, il tensore $\underline{\mathcal{G}}$, pur misurando il prodotto scalare “finale”, è applicato nel punto iniziale p in quanto esso agisce sui vettori iniziali.

La semplicità e la naturalezza di questa formula in un qualunque sistema di coordinate è legata al fatto che le componenti di $\underline{\mathcal{G}}$ e le derivate di C sono riferite al punto di partenza ed al sistema di coordinate valutato in un intorno di tale punto, mentre le componenti di C sono riferite al punto d'arrivo ed al sistema di coordinate valutato in un intorno di tale punto. \square

2.4.19 Proposizione. Possiamo esprimere il tensore delle deformazioni tramite lo spostamento $\bar{\mathcal{S}}$ mediante la formula

$$\underline{\mathcal{G}} = \underline{g} + 2 \text{Sim } \check{D}\bar{\mathcal{S}} + \underline{g} \circ (\check{D}\bar{\mathcal{S}} \times \check{D}\bar{\mathcal{S}}).$$

In un sistema di coordinate cartesiano abbiamo

$$\underline{\mathcal{G}}_{ij} = \delta_{ij} + \partial_i \mathcal{S}_j + \partial_j \mathcal{S}_i + \delta_{hk} \partial_i \mathcal{S}^h \partial_j \mathcal{S}^k. \square$$

2.4.20 Definizione. Definiamo anche il tensore

$$\underline{\mathcal{E}} := \underline{\mathcal{G}} - \underline{g} : \mathbf{T} \times \mathbf{D} \rightarrow \bar{\mathbf{P}}^* \otimes \bar{\mathbf{P}}^*. \square$$

In particolare, otteniamo

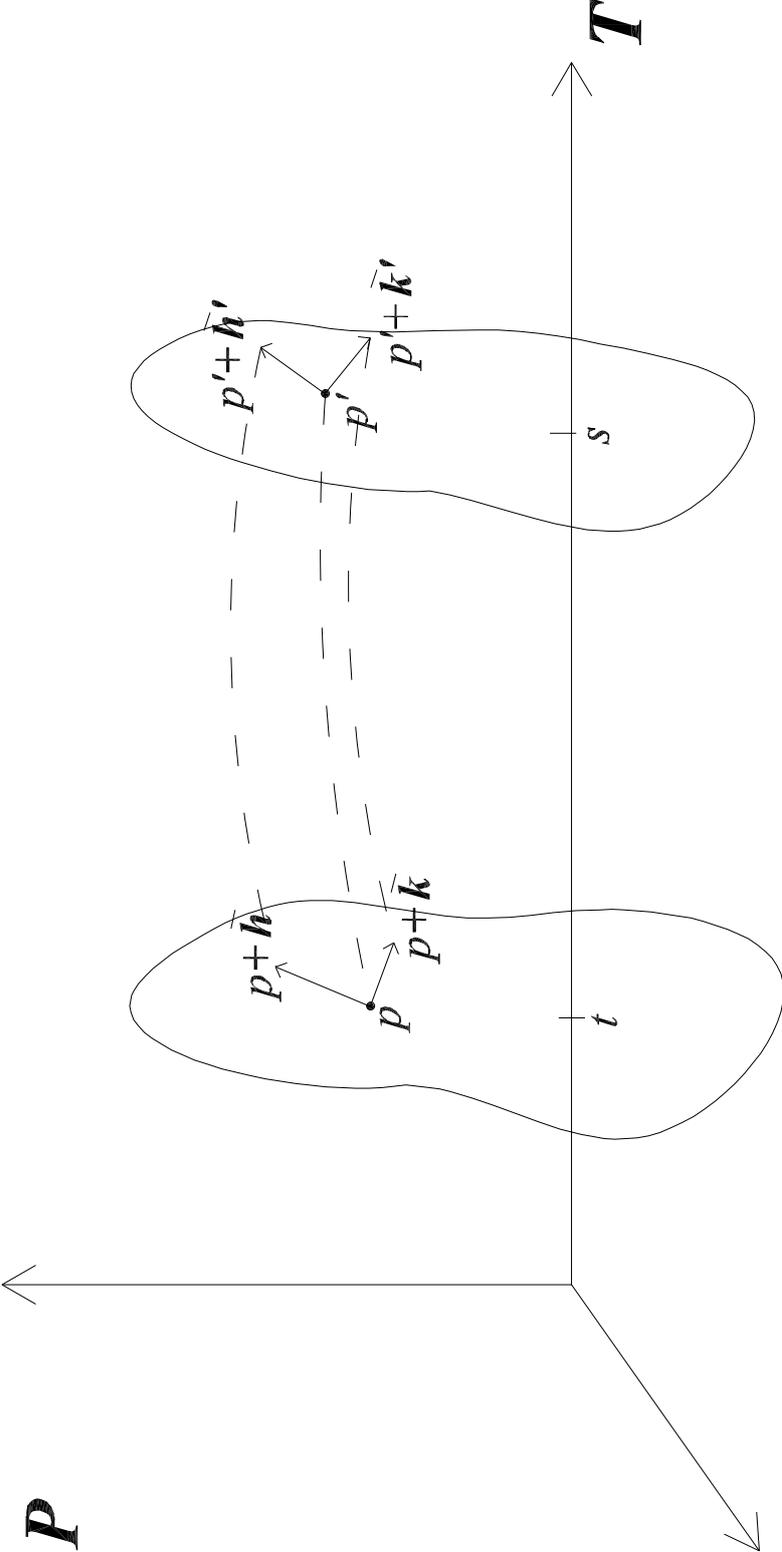
$$\underline{\mathcal{E}}(t; t, p) = 0, \quad \forall t \in \mathbf{T}, \forall p \in \mathbf{D}_t.$$

Chiaramente, possiamo anche scrivere

$$\underline{\mathcal{E}}(s; t, p) = \underline{\mathcal{G}}(s; t, p) - \underline{\mathcal{G}}(t; t, p), \quad \forall (s; t, p) \in \mathbf{T} \times \mathbf{D}.$$

2.4.21 Nota. Dunque, $\underline{\mathcal{G}}$ misura il prodotto scalare dei vettori trasformati tramite il moto (linearizzato rispetto allo spazio), mentre $\underline{\mathcal{E}}$ misura la differenza tra il prodotto scalare dei vettori trasformati tramite il moto ed il prodotto scalare dei vettori originali.

Dato che la metrica \underline{g} è nota, è equivalente conoscere $\underline{\mathcal{G}}$ o $\underline{\mathcal{E}}$. D'altra parte, ciascuno dei due oggetti ha dei vantaggi e degli svantaggi. In particolare, $\underline{\mathcal{G}}$ è più semplice, è definito positivo ed all'istante iniziale si riduce a \underline{g} ; invece, $\underline{\mathcal{E}}$ può assumere a priori tutti i valori di $\bar{\mathbf{P}}^* \otimes \bar{\mathbf{P}}^*$ ed all'istante iniziale si annulla. \square



2.4.4 Isomorfismo di deformazione

Consideriamo l'endomorfismo associato al tensore delle deformazioni tramite l'isomorfismo musicale indotto dalla metrica.

2.4.22 Proposizione. La forma bilineare

$$\underline{\mathcal{G}} : \mathbf{T} \times \mathbf{D} \rightarrow L^2(\bar{\mathbf{P}}, \mathbb{R})$$

può essere vista come un endomorfismo

$$\hat{\mathcal{G}} : \mathbf{T} \times \mathbf{D} \rightarrow \text{End}(\bar{\mathbf{P}}),$$

con la procedura standard, in accordo alla formula

$$\hat{\mathcal{G}}(\bar{v}) \cdot \bar{w} = \underline{\mathcal{G}}(\bar{v}, \bar{w}), \quad \forall \bar{v}, \bar{w} \in \bar{\mathbf{P}}.$$

Più precisamente, otteniamo

$$\hat{\mathcal{G}} = \hat{\mathcal{J}}^t \circ \hat{\mathcal{J}},$$

dove

$$\hat{\mathcal{J}}^t : \mathbf{T} \times \mathbf{D} \rightarrow L(\bar{\mathbf{P}}, \bar{\mathbf{P}})$$

è il trasposto di $\hat{\mathcal{J}}$ definito da

$$\hat{\mathcal{J}}^t(\bar{v}) \cdot \bar{w} = \bar{v} \cdot \hat{\mathcal{J}}(\bar{w}), \quad \forall \bar{v}, \bar{w} \in \bar{\mathbf{P}}.$$

DIMOSTRAZIONE. Infatti, abbiamo

$$(\hat{\mathcal{J}}^t \circ \hat{\mathcal{J}})(\bar{v}) \cdot \bar{w} = \hat{\mathcal{J}}(\bar{v}) \cdot \hat{\mathcal{J}}(\bar{w}) = \underline{\mathcal{G}}(\bar{v}, \bar{w}). \text{ QED}$$

2.4.23 Proposizione. L'endomorfismo $\hat{\mathcal{G}}$ è simmetrico, cioè

$$\hat{\mathcal{G}}^t = \hat{\mathcal{G}}.$$

Inoltre, esso è un isomorfismo e

$$\hat{\mathcal{G}}^{-1} = \hat{\mathcal{J}}^{-1} \circ (\hat{\mathcal{J}}^{-1})^t.$$

DIMOSTRAZIONE. Dimostriamo che l'endomorfismo $\hat{\mathcal{G}}$ è simmetrico. Abbiamo

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{G}}^t &= (\hat{\mathcal{J}}^t \circ \hat{\mathcal{J}})^t = \hat{\mathcal{J}}^t(\circ \hat{\mathcal{J}}^t)^t = \hat{\mathcal{J}}^t \circ \hat{\mathcal{J}} \\ &= \hat{\mathcal{G}}. \end{aligned}$$

Dimostriamo che l'endomorfismo $\hat{\mathcal{G}}$ è un isomorfismo.

Abbiamo

$$(\hat{\mathcal{J}}^t)^{-1} = (\hat{\mathcal{J}}^{-1})^t$$

perché

$$\begin{aligned} (\hat{\mathcal{J}}^t \circ (\hat{\mathcal{J}}^{-1})^t)(\bar{v}) \cdot \bar{w} &= \hat{\mathcal{J}}^t(\bar{v}) \cdot \hat{\mathcal{J}}^{-1}(\bar{w}) = \bar{v} \cdot (\hat{\mathcal{J}} \circ \hat{\mathcal{J}}^{-1})(\bar{w}) \\ &= \bar{v} \cdot \bar{w}, \quad \forall \bar{v}, \bar{w} \in \bar{\mathcal{P}}, \end{aligned}$$

implica

$$\hat{\mathcal{J}}^t \circ (\hat{\mathcal{J}}^{-1})^t = \text{id}_{\bar{\mathcal{P}}}.$$

Perciò, otteniamo

$$\begin{aligned} (\hat{\mathcal{J}}^t \circ \hat{\mathcal{J}}) \circ (\hat{\mathcal{J}}^{-1} \circ (\hat{\mathcal{J}}^{-1})^t) &= \hat{\mathcal{J}}^t \circ \hat{\mathcal{J}} \circ \hat{\mathcal{J}}^{-1} \circ (\hat{\mathcal{J}}^{-1})^t = \hat{\mathcal{J}}^t \circ (\hat{\mathcal{J}}^{-1})^t = \hat{\mathcal{J}}^t \circ (\hat{\mathcal{J}}^t)^{-1} \\ &= \text{id}_{\bar{\mathcal{P}}}. \text{ QED} \end{aligned}$$

2.4.24 Corollario. L'isomorfismo $\hat{\mathcal{G}}$ è diagonalizzabile mediante una base ortonormale di autovettori ed i suoi autovalori sono positivi. \square

2.4.25 Nota. La simmetria di \mathcal{G} è equivalente alla simmetria di $\hat{\mathcal{G}}$.

Il fatto che \mathcal{G} è definito positivo implica il fatto che $\hat{\mathcal{G}}$ è un isomorfismo. \square

2.4.5 Decomposizione dello jacobiano

Lo jacobiano può edssere visto in uno ed un solo modo come la composizione di una trasformazione di deformazione seguita da una trasformazione di rotazione.

2.4.26 Lemma. Sia $\hat{\mathcal{G}} \in L(\bar{\mathcal{P}}, \bar{\mathcal{P}})$ un endomorfismo simmetrico e definito positivo. Allora esiste un unico endomorfismo simmetrico e definito positivo

$$\sqrt{\hat{\mathcal{G}}} \in L(\bar{\mathcal{P}}, \bar{\mathcal{P}}),$$

tale che

$$\sqrt{\hat{\mathcal{G}}} \circ \sqrt{\hat{\mathcal{G}}} = \hat{\mathcal{G}}.$$

Più precisamente, gli assi principali di $\sqrt{\hat{\mathcal{G}}}$ sono gli assi principali di $\hat{\mathcal{G}}$ e gli autovalori di $\sqrt{\hat{\mathcal{G}}}$ sono le radici quadrate degli autovalori di $\hat{\mathcal{G}}$.

DIMOSTRAZIONE. Unicità. Sia $\sqrt{\hat{\mathcal{G}}}$ un endomorfismo simmetrico e definito positivo, tale che

$$\sqrt{\hat{\mathcal{G}}} \circ \sqrt{\hat{\mathcal{G}}} = \hat{\mathcal{G}}.$$

Se \bar{u} è un autovettore di $\sqrt{\hat{\mathcal{G}}}$ e μ è il suo autovalore, allora otteniamo

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{G}}(\bar{u}) &= (\sqrt{\hat{\mathcal{G}}} \circ \sqrt{\hat{\mathcal{G}}})(\bar{u}) = \sqrt{\hat{\mathcal{G}}}(\sqrt{\hat{\mathcal{G}}}(\bar{u})) = \sqrt{\hat{\mathcal{G}}}(\mu \bar{u}) \\ &= \mu^2 \bar{u}.\end{aligned}$$

Dunque, \bar{u} è un autovettore anche di $\hat{\mathcal{G}}$ ed il suo autovalore è μ^2 .

Dato che $\sqrt{\hat{\mathcal{G}}}$ è simmetrico, per il teorema spettrale, esso è diagonalizzabile mediante una base ortonormale di autovettori (\bar{e}_i) ; siano μ_i i corrispondenti autovalori.

Allora, dato che $\hat{\mathcal{G}}$ è simmetrico, per il teorema spettrale e per il risultato precedente, esso è diagonalizzabile mediante la stessa base ortonormale di autovettori (\bar{e}_i) ed i corrispondenti autovalori sono $\lambda_i = \mu_i^2$.

Inoltre, dato che $\sqrt{\hat{\mathcal{G}}}$ è definito positivo, i suoi autovalori sono positivi. Perciò, otteniamo

$$\mu_i = \sqrt{\lambda_i}.$$

Dunque, se $\sqrt{\hat{\mathcal{G}}}$ esiste, allora esso è determinato dalla precedente diagonalizzazione.

Esistenza. Consideriamo l'endomorfismo $\sqrt{\hat{\mathcal{G}}}$ che nella base ortonormale di autovettori di $\hat{\mathcal{E}}$ è espresso da una matrice diagonale i cui elementi diagonali sono le radici quadrate degli elementi diagonali della matrice di $\hat{\mathcal{G}}$. Si vede immediatamente che questo endomorfismo è simmetrico e definito positivo e che $\sqrt{\hat{\mathcal{G}}} \circ \sqrt{\hat{\mathcal{G}}} = \hat{\mathcal{G}}$. QED

2.4.27 Definizione. Il *tensore delle deformazioni lineari* è definito come la radice quadrata del tensore delle deformazioni

$$\sqrt{\hat{\mathcal{G}}} : \mathbf{T} \times \mathbf{D} \rightarrow \text{End}(\bar{\mathbf{P}}). \square$$

Secondo la regola generale, possiamo associare a tale endomorfismo una forma bilineare simmetrica

$$\sqrt{\hat{\mathcal{G}}} : \mathbf{T} \times \mathbf{D} \rightarrow L^2(\bar{\mathbf{P}}, \mathbb{R}).$$

2.4.28 Nota. Abbiamo la seguente interpretazione fisica di $\hat{\mathcal{G}}$ e $\sqrt{\hat{\mathcal{G}}}$ a confronto:

- $\hat{\mathcal{G}}$ misura le *lunghezze al quadrato* dei vettori dopo la loro trasformazione tra l'istante iniziale e l'istante finale (nella linearizzazione del moto al prim'ordine),

- $\sqrt{\hat{\mathcal{G}}}$ misura le *lunghezze* dei vettori dopo la loro trasformazione tra l'istante iniziale e l'istante finale (nella linearizzazione del moto al prim'ordine). \square

2.4.29 Lemma. Sia $\hat{\mathcal{J}} \in L(\bar{\mathbf{P}}, \bar{\mathbf{P}})$ un isomorfismo.

Allora, $\hat{\mathcal{J}}$ può essere scritto in uno ed in un solo modo come la composizione

$$\hat{\mathcal{J}} = \hat{\mathcal{R}} \circ \hat{\mathcal{D}}$$

di un endomorfismo ortogonale con un endomorfismo simmetrico e definito positivo

$$\hat{\mathcal{R}} \in L(\bar{\mathbf{P}}, \bar{\mathbf{P}}) \quad \text{e} \quad \hat{\mathcal{D}} \in L(\bar{\mathbf{P}}, \bar{\mathbf{P}}).$$

Più precisamente, otteniamo

$$\hat{\mathcal{D}} = \sqrt{\hat{\mathcal{J}}^t \circ \hat{\mathcal{J}}} \quad \text{e} \quad \hat{\mathcal{R}} = \hat{\mathcal{J}} \circ \sqrt{\hat{\mathcal{J}}^{-1} \circ (\hat{\mathcal{J}}^{-1})^t}.$$

DIMOSTRAZIONE. *Unicità.* Siano $\hat{\mathcal{R}} \in \text{End}(\bar{\mathbf{P}})$ e $\hat{\mathcal{D}} \in \text{End}(\bar{\mathbf{P}})$ un endomorfismo ortogonale ed un endomorfismo simmetrico e definito positivo, tali che $\hat{\mathcal{J}} = \hat{\mathcal{R}} \circ \hat{\mathcal{D}}$.

Allora, ricordando che per un endomorfismo ortogonale $\hat{\mathcal{R}}$ abbiamo $\hat{\mathcal{R}}^t \circ \hat{\mathcal{R}} = \text{id}$ e che per un endomorfismo simmetrico abbiamo $\hat{\mathcal{D}}^t = \hat{\mathcal{D}}$, otteniamo

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{J}}^t \circ \hat{\mathcal{J}} &= (\hat{\mathcal{R}} \circ \hat{\mathcal{D}})^t \circ (\hat{\mathcal{R}} \circ \hat{\mathcal{D}}) \\ &= (\hat{\mathcal{D}}^t \circ \hat{\mathcal{R}}^t) \circ (\hat{\mathcal{R}} \circ \hat{\mathcal{D}}) \\ &= \hat{\mathcal{D}}^t \circ \hat{\mathcal{D}} \\ &= \hat{\mathcal{D}} \circ \hat{\mathcal{D}}. \end{aligned}$$

Dunque, per il Lemma precedente, otteniamo

$$\hat{\mathcal{D}} = \sqrt{\hat{\mathcal{J}}^t \circ \hat{\mathcal{J}}}.$$

Inoltre, otteniamo

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{R}} &= \hat{\mathcal{J}} \circ \hat{\mathcal{D}}^{-1} \\ &= \hat{\mathcal{J}} \circ \left(\sqrt{\hat{\mathcal{J}}^t \circ \hat{\mathcal{J}}} \right)^{-1} \\ &= \hat{\mathcal{J}} \circ \sqrt{\hat{\mathcal{J}}^{-1} \circ (\hat{\mathcal{J}}^{-1})^t}. \end{aligned}$$

Dunque, se la decomposizione $\hat{\mathcal{J}} = \hat{\mathcal{R}} \circ \hat{\mathcal{D}}$ esiste, allora i suoi fattori sono determinati dalle uguaglianze precedenti.

Esistenza. Abbiamo

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{J}} \circ \sqrt{\hat{\mathcal{J}}^{-1} \circ (\hat{\mathcal{J}}^{-1})^t} \circ \sqrt{\hat{\mathcal{J}}^t \circ \hat{\mathcal{J}}} &= \hat{\mathcal{J}} \circ \sqrt{\hat{\mathcal{J}}^{-1} \circ (\hat{\mathcal{J}}^{-1})^t \circ \hat{\mathcal{J}}^t \circ \hat{\mathcal{J}}} \\ &= \hat{\mathcal{J}} \circ \sqrt{\hat{\mathcal{J}}^{-1} \circ (\hat{\mathcal{J}}^t)^{-1} \circ \hat{\mathcal{J}}^t \circ \hat{\mathcal{J}}} \\ &= \hat{\mathcal{J}} \circ \sqrt{\hat{\mathcal{J}}^{-1} \circ \hat{\mathcal{J}}} \\ &= \hat{\mathcal{J}}. \text{ QED} \end{aligned}$$

Dunque, otteniamo il seguente risultato.

2.4.30 Teorema. *Lo jacobiano $\hat{\mathcal{J}}$ può essere scritto in uno ed in un solo modo come la composizione*

$$\hat{\mathcal{J}} = \hat{\mathcal{R}} \circ \hat{\mathcal{D}}$$

di un endomorfismo ortogonale con un endomorfismo simmetrico e definito positivo

$$\hat{\mathcal{R}} : \mathbf{T} \times \mathbf{D} \rightarrow \text{End}(\bar{\mathbf{P}}) \quad \text{e} \quad \hat{\mathcal{D}} : \mathbf{T} \times \mathbf{D} \rightarrow \text{End}(\bar{\mathbf{P}}).$$

Più precisamente, otteniamo

$$\hat{\mathcal{D}} = \sqrt{\hat{\mathcal{G}}} \quad \text{e} \quad \hat{\mathcal{R}} = \hat{\mathcal{J}} \circ \left(\sqrt{\hat{\mathcal{G}}} \right)^{-1}. \square$$

2.4.31 Nota. Ricordiamo che, per $s = t$, $\hat{\mathcal{J}}$ e $\hat{\mathcal{D}}$ sono l'identità. Perciò, anche $\hat{\mathcal{R}}$ è l'identità, per $s = t$.

Ricordiamo che il determinante e gli eventuali autovalori di un endomorfismo ortogonale sono uguali a ± 1 . Perciò, per ragioni di continuità, il determinante e gli eventuali autovalori di $\hat{\mathcal{R}}$ sono uguali ad 1.

Dunque, per ogni $s, t \in \mathbf{T}$, l'endomorfismo $\hat{\mathcal{R}}_{(s,t)}(p)$ è un operatore di rotazione. \square

2.4.32 Nota. Il Teorema precedente dice che la trasformazione linearizzata dei vettori del continuo tra un istante iniziale t ed un istante finale s può essere vista in uno ed in un solo modo come una successione di una trasformazione di deformazione e di una rotazione. \square

2.4.33 Nota. Sia $\bar{u} \in \bar{\mathbf{P}}$ un autovettore di $\hat{\mathcal{G}}(s; t, p)$ e sia $\lambda \in \mathbb{R}$ il suo autovalore. Allora, per ogni $\bar{v} \in \bar{\mathbf{P}}$ tale che $\bar{u} \cdot \bar{v} = 0$, abbiamo

$$\hat{\mathcal{J}}(s; t, p)(\bar{u}) \cdot \hat{\mathcal{J}}(s; t, p)(\bar{v}) = 0.$$

Inoltre, abbiamo

$$\lambda = \frac{\|\hat{\mathcal{J}}(s; t, p)(\bar{u})\|^2}{\|\bar{u}\|^2}.$$

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo

$$\hat{\mathcal{J}}(s; t, p)(\bar{u}) \cdot \hat{\mathcal{J}}(s; t, p)(\bar{v}) = \left((\hat{\mathcal{J}}^t(s; t, p) \circ \hat{\mathcal{J}}(s; t, p))(\bar{u}) \right) \cdot \bar{v} = \hat{\mathcal{G}}(s; t, p)(\bar{u}) \cdot \bar{v} = \lambda \bar{u} \cdot \bar{v}.$$

Inoltre, abbiamo

$$\hat{\mathcal{J}}(s; t, p)(\bar{u}) \cdot \hat{\mathcal{J}}(s; t, p)(\bar{u}) = \left((\hat{\mathcal{J}}^t(s; t, p) \circ \hat{\mathcal{J}}(s; t, p))(\bar{u}) \right) \cdot \bar{u} = \hat{\mathcal{G}}(s; t, p)(\bar{u}) \cdot \bar{u} = \lambda \bar{u} \cdot \bar{u}.$$

2.4.6 Dilatazione di volume

Consideriamo il determinante dello jacobiano e la sua interpretazione fisica.

2.4.34 Definizione. La *dilatazione di volume* è definita come il determinante dello jacobiano

$$\det \hat{\mathcal{J}} : \mathbf{T} \times \mathbf{D} \rightarrow \mathbb{R}. \square$$

2.4.35 Nota. Per effetto del moto, nella sua approssimazione lineare, ogni volume infinitesimo, nell'intorno del punto iniziale p all'istante iniziale t , viene trasformato in un nuovo volume infinitesimo, nell'intorno del punto finale $C(s; t, p)$ all'istante finale s .

In accordo con l'interpretazione generale del determinante di un endomorfismo, la dilatazione di volume

$$\det \hat{\mathcal{J}}(s; t, p) \in \mathbb{R}$$

esprime il rapporto tra questi due volumi infinitesimi. \square

2.4.36 Proposizione. L'espressione della dilatazione di volume in un qualunque sistema di coordinate è

$$\det \hat{\mathcal{J}}(s; t, p) = \det (\partial_i C^j(s; t, p)) \frac{\sqrt{\det (g_{hk}(C(s; t, p)))}}{\sqrt{\det (g_{hk}(p))}}.$$

In particolare, l'espressione della dilatazione di volume in un sistema di coordinate cartesiane è

$$\det \hat{\mathcal{J}}(s; t, p) = \det (\partial_i C^j(s; t, p)).$$

DIMOSTRAZIONE. In un sistema di coordinate cartesiano la matrice dello jacobiano $(\partial_i C^j(s; t, p))$ è calcolata rispetto alla base (ortonormale) indotta (\bar{e}_i) , rispetto alla quale sono calcolate sia le componenti dei vettori nel punto di partenza p , che le componenti dei vettori nel punto di arrivo $C(s; t, p)$. Pertanto, il determinante dell'endomorfismo jacobiano è dato semplicemente dal determinante della sua matrice in questa base.

Invece, in un sistema di coordinate curvilineo, la matrice dello jacobiano $(\partial_i C^j(s; t, p))$ è calcolata rispetto a due basi distinte. Infatti, le componenti dei vettori nel punto di partenza p sono calcolate rispetto alla base $(\delta x_i(p))$, mentre le componenti dei vettori nel punto di arrivo $C(s; t, p)$ sono calcolate rispetto alla base $(\delta x_i(C(s; t, p)))$. Perciò, in un sistema di coordinate curvilineo, il determinante dello jacobiano non è dato semplicemente dal determinante della sua matrice.

Per ottenere il risultato corretto occorre moltiplicare il determinante di questa matrice per il rapporto tra i volumi indotti dalle basi $(\delta x_i(C(s; t, p)))$ e $(\delta x_i(p))$. A tale scopo ricordiamo che tali volumi sono dati rispettivamente da

$$\sqrt{\det (g_{hk}(C(s; t, p)))} \quad \text{e} \quad \sqrt{\det (g_{hk}(p))}. \text{ QED}$$

2.4.37 Proposizione. La dilatazione di volume $\det \hat{\mathcal{J}}(s; t, p)$ assume valori positivi per ogni coppia di istanti $t, s \in \mathbf{T}$.

DIMOSTRAZIONE. Per $s = t$, abbiamo $\det \hat{\mathcal{J}}(t; t, p) = \det \text{id} = 1$.

Inoltre, $\det \hat{\mathcal{J}}(t; t, p) \neq 0$, per ogni $t, s \in \mathbf{T}$, perché lo jacobiano è un isomorfismo.

Allora, per ogni $t, s \in \mathbf{T}$, il determinante è positivo per ragioni di continuità. QED

2.4.38 Nota. In accordo con l'interpretazione generale del segno del determinante di un endomorfismo, il valore positivo della dilatazione di volume indica che il moto, nella sua approssimazione lineare, preserva l'orientazione dei volumi infinitesimi. \square

2.4.39 Proposizione. Abbiamo le seguenti uguaglianze

$$\det \hat{\mathcal{J}} = \det \hat{\mathcal{D}}$$

$$\det \hat{\mathcal{J}} = \sqrt{\det \hat{\mathcal{G}}}.$$

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo

$$\det \hat{\mathcal{J}} = \det \hat{\mathcal{R}} \cdot \det \hat{\mathcal{D}} = 1 \cdot \det \hat{\mathcal{D}}$$

$$\det \hat{\mathcal{J}} = \det \hat{\mathcal{D}} = \det \sqrt{\hat{\mathcal{G}}} = \sqrt{\det \hat{\mathcal{G}}}. \text{ QED}$$

2.4.7 Tensori delle deformazioni e delle rotazioni infinitesime

Consideriamo la derivata totale dello jacobiano ed i tensori delle rotazioni infinitesime e delle deformazioni infinitesime.

2.4.40 Definizione. Lo *jacobiano infinitesimo* è definito come la derivata totale dello jacobiano

$$\delta \hat{\mathcal{J}} : \mathbf{D} \rightarrow \text{End}(\bar{\mathbf{P}}) \simeq \bar{\mathbf{P}}^* \otimes \bar{\mathbf{P}}. \square$$

2.4.41 Nota. Per ogni $s \in \mathbf{T}$ e $(t, p) \in \mathbf{D}$ possiamo approssimare lo jacobiano mediante la formula

$$\hat{\mathcal{J}}(s; t, p) \simeq \text{id} + \delta \hat{\mathcal{J}}(t, p)(s - t) + \dots,$$

trascurando gli infinitesimi di ordine superiore ad $s - t$. \square

2.4.42 Lemma. Sia $\hat{\mathcal{R}} : \mathbb{R} \rightarrow \text{End}(\bar{\mathbf{P}})$ un endomorfismo ortogonale dipendente da un parametro reale, tale che $\hat{\mathcal{R}}(0) = \text{id}$. Allora, $D\hat{\mathcal{R}}(0)$ è un endomorfismo antisimmetrico.

DIMOSTRAZIONE. Ricordiamo che $\hat{\mathcal{R}}^t \circ \hat{\mathcal{R}} = \text{id}$ e che la derivata rispetto al parametro e la trasposizione metrica commutano perché la metrica non dipende dal parametro.

Allora, derivando rispetto al parametro reale, otteniamo

$$\begin{aligned} 0 &= D \text{id} = D(\hat{\mathcal{R}}^t \circ \hat{\mathcal{R}})(0) \\ &= D\hat{\mathcal{R}}^t(0) \circ \hat{\mathcal{R}}(0) + \hat{\mathcal{R}}^t(0) \circ D\hat{\mathcal{R}}(0) \\ &= D\hat{\mathcal{R}}^t(0) + D\hat{\mathcal{R}}(0). \text{ QED} \end{aligned}$$

2.4.43 Lemma. Sia $\hat{\mathcal{D}} : \mathbb{R} \rightarrow L(\bar{\mathbf{P}}, \bar{\mathbf{P}})$ un endomorfismo simmetrico dipendente da un parametro reale. Allora, $D\hat{\mathcal{D}}(0)$ è un endomorfismo simmetrico.

DIMOSTRAZIONE. Ricordiamo che $\hat{\mathcal{D}}^t = \hat{\mathcal{D}}$ e che la derivata rispetto al parametro e la trasposizione metrica commutano perché la metrica non dipende dal parametro.

Allora, derivando rispetto al parametro reale, otteniamo

$$\begin{aligned} (D(\hat{\mathcal{D}}))^t &= D(\hat{\mathcal{D}}^t) \\ &= D(\hat{\mathcal{D}}). \text{ QED} \end{aligned}$$

Dunque, otteniamo il seguente risultato.

2.4.44 Teorema. *La derivata totale dello jacobiano si decompone in uno ed in un solo modo nelle sua componente antisimmetrica e simmetrica secondo la formula*

$$\delta\hat{\mathcal{J}} = \delta\hat{\mathcal{R}} + \delta\hat{\mathcal{D}}.$$

DIMOSTRAZIONE. La derivata particellare di

$$\hat{\mathcal{J}} = \hat{\mathcal{R}} \circ \hat{\mathcal{D}}$$

è data da

$$\begin{aligned} \delta\hat{\mathcal{J}} &= \delta\hat{\mathcal{R}} \circ \hat{\mathcal{D}}_{\text{Eul}} + \hat{\mathcal{R}}_{\text{Eul}} \circ \delta\hat{\mathcal{D}} \\ &= \delta\hat{\mathcal{R}} + \delta\hat{\mathcal{D}}. \text{ QED} \end{aligned}$$

2.4.45 Definizione. Il tensore delle *rotazioni infinitesime* ed il tensore delle *deformazioni infinitesime* sono, rispettivamente, l'endomorfismo antisimmetrico e l'endomorfismo simmetrico

$$\begin{aligned} \hat{\omega} &:= \delta\hat{\mathcal{R}} : \mathbf{D} \rightarrow \text{End}(\bar{\mathbf{P}}) = \bar{\mathbf{P}}^* \otimes \bar{\mathbf{P}} \\ \hat{\epsilon} &:= \delta\hat{\mathcal{D}} : \mathbf{D} \rightarrow \text{End}(\bar{\mathbf{P}}) = \bar{\mathbf{P}}^* \otimes \bar{\mathbf{P}}. \square \end{aligned}$$

2.4.46 Proposizione. Abbiamo le uguaglianze

$$\hat{\omega} = \text{Ant } \check{D}\bar{\mathbf{v}} \quad \text{e} \quad \hat{\epsilon} = \text{Sim } \check{D}\bar{\mathbf{v}}.$$

Inoltre abbiamo

$$\hat{\epsilon} = \frac{1}{2} \delta\hat{\mathcal{G}} = \frac{1}{2} \delta\hat{\mathcal{E}}.$$

DIMOSTRAZIONE. Per il teorema di Schwarz otteniamo

$$\delta\hat{\mathcal{J}} := \delta\check{D}C = \check{D}\delta C := \check{D}\bar{\mathbf{v}}.$$

Perciò, abbiamo

$$\text{Sim } \delta\hat{\mathcal{J}} = \text{Sim } \check{D}\bar{\mathbf{v}} \quad \text{e} \quad \text{Ant } \delta\hat{\mathcal{J}} = \text{Ant } \check{D}\bar{\mathbf{v}}.$$

Inoltre, ricordando che $\hat{\mathcal{G}}_{\text{Eul}} = \text{id}$, otteniamo

$$\delta\hat{\mathcal{D}} := \delta\sqrt{\hat{\mathcal{G}}} = \frac{1}{2} \frac{\delta\hat{\mathcal{G}}}{\sqrt{\hat{\mathcal{G}}_{\text{Eul}}}} = \frac{1}{2} \delta\hat{\mathcal{G}}.$$

Infine, ricordando che $\delta \text{id} = 0$, otteniamo

$$\delta \hat{\mathcal{G}} = \delta \hat{\mathcal{G}} - \delta \text{id} = \delta \hat{\mathcal{G}}. \square$$

2.4.47 Proposizione. L'espressione di $\underline{\omega}$ in un qualunque sistema di coordinate è

$$\underline{\omega} = \frac{1}{2} (\partial_i \mathbf{v}_j - \partial_j \mathbf{v}_i) D x^i \otimes D x^j,$$

ed, in particolare, in un sistema di coordinate cartesiano,

$$\underline{\omega} = \frac{1}{2} (\partial_i \mathbf{v}_j - \partial_j \mathbf{v}_i) \underline{e}^i \otimes \underline{e}^j.$$

L'espressione di $\underline{\epsilon}$ in un qualunque sistema di coordinate è

$$\underline{\epsilon} = \frac{1}{2} (\partial_i \mathbf{v}_j + \partial_j \mathbf{v}_i - \Gamma_i^h{}_j \mathbf{v}_h - \Gamma_j^h{}_i \mathbf{v}_h) D x^i \otimes D x^j,$$

ed in particolare, in un sistema di coordinate cartesiano,

$$\underline{\epsilon} = \frac{1}{2} (\partial_i \mathbf{v}_j + \partial_j \mathbf{v}_i) \underline{e}^i \otimes \underline{e}^j. \square$$

2.4.48 Proposizione. Possiamo esprimere il tensore delle deformazioni infinitesime tramite lo spostamento $\bar{\mathcal{S}}$ mediante la formula

$$\hat{\epsilon} = \text{Sim } \check{D} \delta \bar{\mathcal{S}}.$$

In un sistema di coordinate cartesiane abbiamo

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\partial_i \mathbf{v}_j + \partial_j \mathbf{v}_i) = \frac{1}{2} (\partial_i \delta \mathcal{S}_j + \partial_j \delta \mathcal{S}_i). \square$$

2.4.49 Nota. Il tensore antisimmetrico $\underline{\omega}$ ha solo tre componenti indipendenti.

Quindi, possiamo rappresentarlo mediante un vettore. Per di più, questa rappresentazione può essere ottenuta in un modo indipendente dalla scelta di una base, in accordo al seguente Lemma. \square

2.4.50 Lemma. Sia

$$\hat{\omega} \in \text{End}(\bar{\mathbf{P}})$$

un endomorfismo antisimmetrico. Allora esiste un unico vettore

$$\bar{\Omega} \in \bar{\mathbf{P}},$$

tale che

$$\hat{\omega}(\bar{h}) = \bar{\Omega} \times \bar{h}, \quad \forall \bar{h} \in \bar{\mathbf{P}}.$$

Più precisamente, in una base ortonormale (\bar{e}_i) , otteniamo

$$\Omega^1 = \omega_2^3, \quad \Omega^2 = \omega_3^1, \quad \Omega^3 = \omega_1^2. \square$$

2.4.51 Definizione. Il campo vettoriale

$$\bar{\Omega} : \mathbf{D} \rightarrow \bar{\mathbf{P}}$$

associato al tensore delle rotazioni infinitesime è detto *velocità angolare*. \square

2.4.52 Proposizione. L'espressione di $\bar{\Omega}$ in un sistema di coordinate cartesiane è

$$\begin{aligned}\Omega^1 &= \omega_2^3 = \frac{1}{2} (\partial_2 v^3 - \partial_3 v^2), \\ \Omega^2 &= \omega_3^1 = \frac{1}{2} (\partial_3 v^1 - \partial_1 v^3), \\ \Omega^3 &= \omega_1^2 = \frac{1}{2} (\partial_1 v^2 - \partial_2 v^1). \square\end{aligned}$$

2.4.53 Corollario. La velocità angolare può essere espressa come segue

$$\bar{\Omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \bar{\mathbf{v}}.$$

Dunque, in un sistema di coordinate cartesiane abbiamo

$$\bar{\Omega} = \frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ v^1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}. \square$$

2.4.54 Nota. Osserviamo che in generale, il vettore $\bar{\Omega}$ dipende dal tempo e dalla posizione. Vedremo in seguito che solo nel caso di un moto rigido il vettore $\bar{\Omega}$ non dipende dalla posizione (quindi, in ogni istante non dipende dalla particella del continuo). \square

2.4.55 Nota. Per ogni $(t, p) \in \mathbf{D}$ ed $\bar{h} \in \bar{\mathbf{P}}$, possiamo approssimare la velocità mediante la formula

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{v}}(t, p + \bar{h}) &\simeq \bar{\mathbf{v}}(t, p) + \check{D}\bar{\mathbf{v}}(t, p)(\bar{h}) + \dots \\ &= \bar{\mathbf{v}}(t, p) + \check{\omega}(t, p)(\bar{h}) + \check{\epsilon}(t, p)(\bar{h}) + \dots \\ &= \bar{\mathbf{v}}(t, p) + \bar{\Omega}(t, p) \times \bar{h} + \check{\epsilon}(t, p)(\bar{h}) + \dots\end{aligned}$$

trascurando gli infinitesimi di ordine superiore ad \bar{h} .

In particolare, nel caso in cui il tensore delle deformazioni infinitesime si annulli, otteniamo l'approssimazione

$$\bar{\mathbf{v}}(t, p + \bar{h}) \simeq \bar{\mathbf{v}}(t, p) + \bar{\Omega}(t, p) \times \bar{h} + \dots$$

Questa formula dice che un intorno infinitesimo della particella determinata dai dati iniziali $(t, p) \in \mathbf{D}$ si muove, con un'approssimazione del prim'ordine, con un moto rigido la cui velocità angolare è $\bar{\Omega}(t, p)$.

Vedremo in seguito che, nel caso di un moto rigido, la velocità angolare non dipende dal punto $p \in \mathbf{D}_t$ e nella formula precedente gli infinitesimi di ordine superiore ad \bar{h} sono rigorosamente nulli. Invece, nel caso generale, le formule precedenti sono solo approssimate e la velocità angolare dipende dalla posizione. \square

2.4.8 Dilatazione infinitesima di volume

Consideriamo la derivata totale del determinante dello jacobiano.

2.4.56 Definizione. La *dilatazione infinitesima di volume* è definita come la derivata totale del determinante dello jacobiano

$$\delta(\det \hat{\mathcal{J}}) : \mathbf{D} \rightarrow \mathbb{R} . \square$$

2.4.57 Nota. Per ogni $(t, p) \in \mathbf{D}$ e $s \in \mathbf{T}$, possiamo scrivere

$$\det \hat{\mathcal{J}}(s; t, p) \simeq 1 + \delta(\det \hat{\mathcal{J}})(s, t) (s - t) + \dots$$

tracurando gli infinitesimi di ordine superiore a $s - t$.

La dilatazione infinitesima esprime la velocità di variazione del volume infinitesimo dovuta al moto, nella sua approssimazione lineare. \square

Ora vogliamo trovare una relazione importante della dilatazione infinitesima di volume con il tensore delle deformazioni e la divergenza della velocità.

2.4.58 Lemma. Sia

$$\hat{\mathcal{F}} : \mathbb{R} \rightarrow \text{End}(\bar{\mathbf{P}})$$

un endomorfismo dipendente da un parametro reale tale che

$$\hat{\mathcal{F}}(0) = 1 .$$

Allora abbiamo

$$(D \det \hat{\mathcal{F}})(0) = (\text{tr } D\hat{\mathcal{F}})(0) .$$

DIMOSTRAZIONE. Sviluppando la matrice di $\hat{\mathcal{F}}$ rispetto al parametro reale abbiamo

$$\hat{\mathcal{F}}_j^i(\lambda) = \delta_j^i + D(\hat{\mathcal{F}}_j^i)(0) \lambda + \dots ,$$

dove abbiamo trascurato gli infinitesimi di ordine superiore a λ .

Perciò, otteniamo

$$\det(\hat{\mathcal{F}}_j^i)(\lambda) = 1 + D(\hat{\mathcal{F}}_i^i)(0) \lambda + \dots ,$$

dove abbiamo trascurato gli infinitesimi di ordine superiore a λ .

Questa formula mostra che

$$(D \det \hat{\mathcal{F}})(0) = (\text{tr } D\hat{\mathcal{F}})(0) . \text{ QED}$$

2.4.59 Proposizione. Abbiamo l'identità

$$\delta \det \hat{\mathcal{J}} = \text{tr } \delta \hat{\mathcal{J}} .$$

DIMOSTRAZIONE. Segue immediatamente dal Lemma precedente. QED

2.4.60 Definizione. La *divergenza della velocità* è il campo vettoriale

$$\operatorname{div} \bar{\mathbf{v}} := \operatorname{tr} \check{D}\bar{\mathbf{v}} : \mathbf{D} \rightarrow \mathbb{R}. \square$$

2.4.61 Proposizione. L'espressione della divergenza della velocità in un qualunque sistema di coordinate è

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \bar{\mathbf{v}} &= \partial_i \mathbf{v}^i + \Gamma_{i\ h}^i \mathbf{v}^h \\ &= \frac{\partial_i (\mathbf{v}^i \sqrt{\det(g_{hk})})}{\sqrt{\det(g_h)}}. \end{aligned}$$

In particolare, l'espressione della divergenza della velocità in un sistema di coordinate cartesiane è

$$\operatorname{div} \bar{\mathbf{v}} = \partial_i \mathbf{v}^i. \square$$

2.4.62 Teorema. Abbiamo le seguenti uguaglianze

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(\delta \hat{\mathcal{J}}) &= \delta(\det \hat{\mathcal{J}}) = \delta(\det \hat{\mathcal{D}}) = \operatorname{tr}(\delta \hat{\mathcal{D}}) \\ \operatorname{tr}(\delta \hat{\mathcal{J}}) &= \delta(\det \hat{\mathcal{J}}) = \frac{1}{2} \delta(\det \hat{\mathcal{G}}) = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(\delta \hat{\mathcal{G}}) = \\ \operatorname{tr}(\delta \hat{\mathcal{J}}) &= \delta(\det \hat{\mathcal{J}}) = \operatorname{tr} \check{D}\bar{\mathbf{v}} := \operatorname{div} \bar{\mathbf{v}} \\ \operatorname{tr}(\delta \hat{\mathcal{J}}) &= \delta(\det \hat{\mathcal{J}}) = \operatorname{tr} \hat{\epsilon}. \end{aligned}$$

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo

$$\begin{aligned} \delta(\det \hat{\mathcal{J}}) &= \delta(\det \hat{\mathcal{R}} \det \hat{\mathcal{D}}) = (\delta \det \hat{\mathcal{R}})(\det \hat{\mathcal{D}})_{\text{Eul}} + (\det \hat{\mathcal{R}})_{\text{Eul}}(\delta \det \hat{\mathcal{D}}) = 0 \cdot 1 + 1 \cdot (\delta \det \hat{\mathcal{D}}) \\ \delta(\det \hat{\mathcal{J}}) &= \delta \det \hat{\mathcal{D}} = \delta \det \sqrt{\hat{\mathcal{G}}} = \frac{1}{2} \delta \sqrt{\det \hat{\mathcal{G}}} = \frac{1}{2} \frac{\delta \det \hat{\mathcal{G}}}{\sqrt{\det \hat{\mathcal{G}}_{\text{Eul}}}} = \frac{1}{2} \delta \det \hat{\mathcal{G}} \\ \delta(\det \hat{\mathcal{J}}) &= \operatorname{tr} \delta \hat{\mathcal{J}} = \operatorname{tr} \delta \check{D}C = \operatorname{tr} \check{D}\delta C = \operatorname{tr} \check{D}\bar{\mathbf{v}} \\ \delta(\det \hat{\mathcal{J}}) &= \operatorname{tr} \check{D}\bar{\mathbf{v}} = \operatorname{tr}(\hat{\omega} + \hat{\epsilon}) = \operatorname{tr} \hat{\epsilon}. \text{ QED} \end{aligned}$$

2.4.9 Spostamento infinitesimo

Dedichiamo questo paragrafo ad una descrizione “quasi statica” del moto relativo ad uno spostamento infinitesimo.

Noi abbiamo formulato un modello generale della cinematica di un sistema continuo in cui possiamo descrivere il moto e le grandezze associate nel loro svolgimento durante il tempo.

D'altra parte, alcune applicazioni importanti sono interessate solamente ad un aspetto “quasi statico” della cinematica. In altre parole, esse sono interessate solo al confronto tra la configurazione iniziale del continuo ad un certo istante $t \in \mathbf{T}$ e la configurazione finale ad un certo istante $s \in \mathbf{T}$, senza curarsi di descrivere quello che succede negli istanti intermedi (e senza curarsi anche di specificare quali siano gli istanti iniziale t e finale s).

Ancora di più, queste applicazioni importanti sono spesso interessate solo ad un'approssimazione del precedente confronto considerando uno spostamento “infinitesimo” tra l'istante iniziale e l'istante finale. Questa approssimazione ha chiaramente lo scopo di formulare delle leggi fisiche linearizzate (e quindi semplificate) rispetto a quelle che si otterrebbero in una formulazione completa.

Noi possiamo derivare questa formulazione quasi statica e linearizzata all'interno del nostro schema cinematico più generale mediante la seguente procedura.

Consideriamo un istante iniziale $t \in \mathbf{T}$ ed un istante finale $s \in \mathbf{T}$ fissati. Corrispondentemente, abbiamo l'intervallo di tempo

$$\Delta t := s - t \in \bar{\mathbf{T}}$$

e lo spostamento

$$\bar{\mathcal{S}}_{(s,t)} : \mathbf{D}_t \rightarrow \bar{\mathbf{P}}.$$

Poniamo poi

$$\bar{\mathbf{u}} := \bar{\mathcal{S}}_{(s,t)} : \mathbf{D}_t \rightarrow \bar{\mathbf{P}}.$$

Trascurando gli infinitesimi di ordine superiore a Δt , possiamo scrivere

$$\bar{\mathbf{u}} \simeq \bar{\mathbf{v}}_t \Delta t.$$

Conseguentemente, trascurando gli infinitesimi di ordine superiore a Δt , otteniamo

$$\mathcal{E}_{(s,t)} := \underline{\mathcal{G}}_{(s,t)} - \underline{\mathcal{G}}_{(t,t)} \simeq 2 \underline{\epsilon}_t \Delta t = 2 \text{Sim } \check{D}\mathbf{v} \Delta t = 2 \text{Sim } \check{D}\mathbf{u}.$$

Supponiamo ora che Δt (e quindi $\bar{\mathbf{u}}$) sia “sufficientemente piccolo” in modo tale che $\mathcal{E}_{(s,t)}$ sia “molto piccolo”. In accordo con queste ipotesi, facciamo un errore trascurabile scrivendo

$$\mathcal{E}_{(s,t)} = 2 \underline{\epsilon}_t \Delta t = 2 \text{Sim } \check{D}\mathbf{u},$$

ossia, in coordinate cartesiane,

$$(\mathcal{E}_{(s,t)})_{ij} = 2 (\epsilon_t)_{ij} \Delta t = \partial_i \mathbf{u}_j + \partial_j \mathbf{u}_i.$$

Poi, ancora nelle trattazioni quasi statiche, dato che non ha interesse esplicitare l'istante iniziale t e l'intervallo di tempo Δt , si può eliminare il riferimento esplicito ad essi ridefinendo i tensori delle deformazioni e delle deformazioni infinitesime con le seguenti sostituzioni di simboli

$$\mathcal{E}_{(s,t)} \rightarrow \mathcal{E}, \quad \underline{\epsilon}_t \Delta t \rightarrow \underline{\epsilon}.$$

Conseguentemente, otteniamo la formula classica, in coordinate cartesiane,

$$\mathcal{E}_{ij} = 2\epsilon_{ij} = \partial_i \mathbf{u}_j + \partial_j \mathbf{u}_i.$$

Dato un tensore simmetrico $\underline{\epsilon} : \mathbf{P} \rightarrow \bar{\mathbf{P}}^* \otimes \bar{\mathbf{P}}^*$, non sempre questo è il tensore delle deformazioni infinitesime $\underline{\epsilon} = \frac{1}{2} \text{Sim } D\mathbf{u}$ associato ad uno spostamento $\bar{\mathbf{u}}$. Questo fatto si verifica (almeno localmente) se e solo se $\underline{\epsilon}$ soddisfa una certa condizione differenziale. Più precisamente abbiamo il seguente teorema, di cui omettiamo la dimostrazione.

2.4.63 Teorema. *Sia $\underline{\epsilon} : \mathbf{P} \rightarrow \bar{\mathbf{P}}^* \otimes \bar{\mathbf{P}}^*$ un tensore simmetrico. Allora, le seguenti condizioni sono equivalenti:*

1) *esiste (almeno localmente) un campo vettoriale $\bar{\mathbf{u}} : \mathbf{P} \rightarrow \bar{\mathbf{P}}$ tale che*

$$\hat{\epsilon} = \frac{1}{2} \text{Sim } D\bar{\mathbf{u}};$$

2) *$\underline{\epsilon}$ soddisfa, in coordinate cartesiane, la formula*

$$\partial_{hk}\epsilon_{ij} + \partial_{ij}\epsilon_{hk} = \partial_{hj}\epsilon_{ik} + \partial_{ik}\epsilon_{hj}.$$

DIMOSTRAZIONE. Ci limitiamo a dimostrare che 1) implica 2); l'implicazione inversa richiede metodi matematici che esulano da questo corso.

Se $\hat{\epsilon} = \frac{1}{2} \text{Sim } D\bar{\mathbf{u}}$, allora, in coordinate cartesiane, abbiamo le due uguaglianze

$$\begin{aligned} \partial_{hk}\epsilon_{ij} + \partial_{ij}\epsilon_{hk} &= \frac{1}{2} (\partial_{hk}(\partial_i u_j + \partial_j u_i) + \partial_{ij}(\partial_h u_k + \partial_k u_h)) = \frac{1}{2} (\partial_{hki} u_j + \partial_{hkj} u_i + \partial_{ijh} u_k + \partial_{ijk} u_h) \\ \partial_{hj}\epsilon_{ik} + \partial_{ik}\epsilon_{hj} &= \frac{1}{2} (\partial_{hj}(\partial_i u_k + \partial_k u_i) + \partial_{ik}(\partial_h u_j + \partial_j u_h)) = \frac{1}{2} (\partial_{hji} u_k + \partial_{hjk} u_i + \partial_{ikh} u_j + \partial_{ikj} u_h), \end{aligned}$$

che, per il teorema di Schwarz sulle scambio delle derivate parziali, implicano

$$\partial_{hk}\epsilon_{ij} + \partial_{ij}\epsilon_{hk} = \partial_{hj}\epsilon_{ik} + \partial_{ik}\epsilon_{hj}. \text{ QED}$$

Questo risultato è analogo al Lemma di Poincaré, secondo il quale una forma differenziale $\alpha : \mathbf{P} \rightarrow \bar{\mathbf{P}}^*$ è (localmente) il differenziale $\alpha = DU$ di una funzione $U : \mathbf{P} \rightarrow \mathbb{R}$ se e solo se

$$\partial_i \alpha_j = \partial_j \alpha_i.$$

2.5 Tipi notevoli di moti continui

Dedichiamo questa sezione allo studio di alcuni tipi notevoli moti continui.

2.5.1 Moti stazionari

I moti stazionari sono quelli per cui lo spostamento delle particelle non dipende dall'istante iniziale, ma solo dal tempo intercorso tra l'istante iniziale e finale. I moti stazionari sono anche caratterizzati dal fatto che la velocità non dipende esplicitamente dal tempo.

2.5.1 Definizione. Un moto continuo $\bar{S}' : \mathbb{R} \times \mathbf{D} \rightarrow \bar{\mathbf{P}}$ è detto *stazionario* se
1) il suo dominio spaziale non dipende dal tempo, ossia, per ogni $t \in \mathbf{T}$, abbiamo

$$\mathbf{D}_t = \mathbf{D}_{\text{spaziale}} \subset \mathbf{P},$$

2) lo spostamento di ogni particella dipende solo dalla posizione iniziale e dall'intervallo di tempo intercorso tra l'istante iniziale e l'istante finale (e non dal tempo iniziale), ossia se \bar{S}' è un'applicazione del tipo

$$\bar{S}' : \mathbb{R} \times \mathbf{D}_{\text{spaziale}} \rightarrow \bar{\mathbf{P}}. \square$$

La stazionarietà di un moto continuo può essere equivalentemente espressa tramite l'indipendenza della velocità dal tempo, come segue.

2.5.2 Proposizione. Un moto continuo $C : \mathbf{T} \times \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{P}$ è stazionario se e solo se la velocità (in forma euleriana) non dipende dal tempo, ossia se e solo se

$$\partial_0 \bar{\mathbf{v}} = 0.$$

DIMOSTRAZIONE. 1) Se il moto \bar{S}' è stazionario, allora \bar{S}' non dipende dal tempo iniziale e quindi anche $\bar{\mathbf{v}} = \delta \bar{S}'$ non dipende dal tempo iniziale.

2) Se $\bar{\mathbf{v}} = \delta \bar{S}'$ non dipende dal tempo iniziale, allora, integrando l'equazione differenziale che definisce il moto \bar{S}' tramite la velocità, si ottiene un moto che non dipende dall'istante iniziale. QED

2.5.2 Moti traslatori

I moti traslatori sono quelli per cui i vettori di separazione tra le particelle sono costanti durante il tempo.

2.5.3 Definizione. Un moto continuo $C : \mathbf{T} \times \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{P}$ è detto *traslatorio* se, per ogni $(s; t, p) \in \mathbf{T} \times \mathbf{D}$, l'endomorfismo jacobiano è l'identità di $\bar{\mathbf{P}}$, ossia

$$\hat{\mathcal{J}}_{(s;t,p)} = \text{id}_{\bar{\mathbf{P}}} . \square$$

In altre parole, un moto continuo è detto traslatorio se, per ogni coppia di particelle, il loro vettore di separazione rimane costante durante il tempo.

Cerchiamo ora la più generale espressione di un moto continuo traslatorio.

2.5.4 Lemma. Sia

$$f : \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P}$$

un'applicazione tale che la derivata $Df : \mathbf{P} \rightarrow \text{End}(\bar{\mathbf{P}})$ non dipende dal punto di applicazione $p \in \mathbf{P}$. Allora, f è del tipo

$$f(p) = f(o) + (Df)(p - o),$$

dove $o \in \mathbf{P}$ è un qualunque punto.

DIMOSTRAZIONE. Sviluppando al prim'ordine f , possiamo scrivere

$$f(p) = f(o) + (Df)(p - o) + \bar{\mathcal{O}}_o(p - o),$$

dove

$$\bar{\mathcal{O}}_o : \bar{\mathbf{P}} \rightarrow \bar{\mathbf{P}}$$

è un'applicazione infinitesima di ordine superiore alla sua variabile $(p - o) \in \bar{\mathbf{P}}$.

Derivando tale formula rispetto a p , otteniamo

$$Df = Df + (D\bar{\mathcal{O}}_o)(p - o), \quad \forall (p - o) \in \bar{\mathbf{P}},$$

dove $D\bar{\mathcal{O}}_o$ denota la derivata di $\bar{\mathcal{O}}_o$ rispetto alla variabile $(p - o)$.

La formula precedente implica l'identità

$$D\bar{\mathcal{O}}_o = 0.$$

Dunque, $\bar{\mathcal{O}}_o$ è un'applicazione che si annulla per il valore iniziale della sua variabile $(p - o) = \bar{0}$ e la cui derivata è identicamente nulla.

Perciò, $\bar{\mathcal{O}}_o$ è l'applicazione costantemente nulla. QED

2.5.5 Proposizione. I moti continui traslatori sono del tipo

$$C_{(t,p)}(s) = C_{(t,o)}(s) + (p - o), \quad \forall (s; t, p) \in \mathbf{T} \times \mathbf{D},$$

dove $(t, o) \in \mathbf{D}$ sono i dati iniziali di una qualunque particella del continuo e

$$C_{(t,o)} : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{P}$$

è un qualunque moto di tale particella.

DIMOSTRAZIONE. Se il moto continuo C è traslatorio, allora la sua espressione è del tipo precedente, grazie al Lemma precedente.

Viceversa, si vede immediatamente che ogni moto continuo del tipo precedente è traslatorio. QED

Dunque, un moto continuo traslatorio è caratterizzato dal moto di una sua particella (comunque scelta), che chiameremo “polo” (sul quale non è imposta nessuna condizione). Infatti tutte le altre particelle si muovono mantenendo il vettore di separazione con il polo costante durante il tempo.

Dunque, i moti traslatori hanno solamente 3 gradi di libertà dovuti al moto del polo (mentre un qualunque moto continuo ha infiniti gradi di libertà).

2.5.6 Corollario. Se C è un moto continuo traslatorio, allora abbiamo

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{R}} = \hat{\mathcal{D}} = \text{id}_{\mathcal{P}}, \quad \underline{\mathcal{G}} = \underline{g}, \quad \underline{\mathcal{E}} = 0, \quad \det \hat{\mathcal{J}} = \det \hat{\mathcal{R}} = \det \hat{\mathcal{D}} = 1, \\ \delta \hat{\mathcal{J}} = \check{\mathcal{D}}\bar{\mathbf{v}} = 0, \quad \hat{\omega} = \hat{\epsilon} = 0, \quad \text{div } \bar{\mathbf{v}} = 0. \end{aligned}$$

DIMOSTRAZIONE. Tutte le formule precedenti seguono facilmente da $\hat{\mathcal{J}} = \text{id}_{\mathcal{P}}$. QED

In particolare, se un moto continuo è traslatorio, allora la formula $\check{\mathcal{D}}\bar{\mathbf{v}} = 0$ dice che a ciascun istante tutte le particelle hanno la stessa velocità (la quale può, però, dipendere dal tempo).

Viceversa, questa formula caratterizza i moti traslatori.

2.5.7 Proposizione. Se C è un moto continuo tale che $\check{\mathcal{D}}\bar{\mathbf{v}} = 0$, allora il moto è traslatorio.

DIMOSTRAZIONE. Infatti, abbiamo $\delta \hat{\mathcal{J}} = \check{\mathcal{D}}\bar{\mathbf{v}} = 0$.

Dunque, $\hat{\mathcal{J}}$ è un'applicazione che all'istante iniziale vale $\hat{\mathcal{J}}_{(t,t)} = \text{id}_{\mathcal{P}}$ (come per ogni moto continuo) e la cui derivata rispetto al tempo finale è identicamente nulla.

Perciò, $\hat{\mathcal{J}}$ è l'applicazione costante $\hat{\mathcal{J}}_{(s,t)} = \text{id}_{\mathcal{P}}$. QED

2.5.3 Moti rigidi

I moti rigidi sono quelli per cui le distanze tra le particelle sono costanti durante il tempo.

2.5.8 Definizione. Un moto continuo $C : \mathbf{T} \times \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{P}$ è detto *rigido* se

$$C_{(s,t)} : \mathbf{D}_t \rightarrow \mathbf{D}_s, \quad \forall s, t \in \mathbf{T},$$

è una trasformazione rigida. \square

In altre parole, un moto continuo è detto rigido se, per ogni coppia di particelle, la loro distanza rimane costante durante il tempo.

Cerchiamo ora la più generale espressione di un moto continuo rigido.

2.5.9 Teorema. *I moti continui rigidi sono del tipo*

$$C_{(t,p)}(s) = C_{(t,o)}(s) + \hat{\mathcal{R}}_{(s,t)}(p - o), \quad \forall (s; t, p) \in \mathbf{T} \times \mathbf{D},$$

dove $(t, o) \in \mathbf{D}$ sono i dati iniziali di una qualunque particella del continuo,

$$C_{(t,o)} : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{P}$$

è un qualunque moto di tale particella e

$$\hat{\mathcal{R}}_{(s,t)} : \bar{\mathbf{P}} \rightarrow \bar{\mathbf{P}}$$

è una trasformazione ortogonale qualunque, che non dipende da p (e da o), tale che

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{R}}_{(t,t)} &= \text{id}_{\bar{\mathbf{P}}}, & \forall t \in \bar{\mathbf{P}}, \\ \hat{\mathcal{R}}_{(r,s)} \circ \hat{\mathcal{R}}_{(s,t)} &= \hat{\mathcal{R}}_{(r,t)}, & \forall r, s, t \in \mathbf{T}. \end{aligned}$$

DIMOSTRAZIONE. Segue facilmente dalla Proposizione 1.3.26. QED

Dunque, un moto continuo rigido è caratterizzato dal moto di una sua particella (comunque scelta), che chiameremo “polo” (sul quale non è imposta nessuna condizione), e da un operatore di rotazione, che dipende solo dal tempo (e non dipende dalla particella considerata o dal polo).

Dunque, i moti rigidi hanno solamente 6 gradi di libertà, di cui 3 dovuti al moto del polo e 3 all’operatore di rotazione (mentre un qualunque moto continuo ha infiniti gradi di libertà).

2.5.10 Corollario. Se C è un moto continuo rigido, allora abbiamo

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{D}} &= \text{id}_{\bar{\mathbf{P}}}, & \hat{\mathcal{G}} &= \hat{g}, & \hat{\mathcal{E}} &= 0, & \det \hat{J} &= \det \hat{\mathcal{R}} = \det \hat{\mathcal{D}} = 1, \\ \delta \hat{J} &= \hat{D}\bar{v} = \hat{\omega}, & \hat{e} &= 0, & \text{div } \bar{v} &= 0. \end{aligned}$$

DIMOSTRAZIONE. Tutte le formule precedenti seguono facilmente da $\hat{J} = \hat{\mathcal{R}}$. QED

2.5.11 Proposizione. Sia C un moto continuo rigido. Si considerino due istanti $s, t \in \mathbf{T}$.

Allora, $\hat{\mathcal{R}}_{(s,t)}$ è un operatore di rotazione attorno al suo asse principale $\bar{r}_{(s,t)}$ con autovalore 1, detto *asse di rotazione* relativo agli istanti t ed s . \square

Studiamo ora un moto continuo analizzando la sua velocità.

2.5.12 Corollario. Se C è un moto continuo rigido, allora la velocità è del tipo

$$\bar{v}_t(p) = \bar{v}_t(o) + \bar{\Omega}_t \times (p - o), \quad \forall (t, p) \in \mathbf{D},$$

dove $o \in \mathbf{D}_t$ è un qualunque punto del dominio iniziale del continuo, $\bar{\mathbf{v}}_t(o) \in \bar{\mathbf{P}}$ è un qualunque vettore, che dipende da o ed $\bar{\mathbf{\Omega}}_t \in \bar{\mathbf{P}}$ è un qualunque vettore, che non dipende da o (e da p).

DIMOSTRAZIONE. Segue immediatamente dal Teorema 2.5.9, considerando la derivata particellare dell'espressione del moto rigido. QED

Dunque, la velocità di un moto continuo rigido è caratterizzata dalla velocità di una sua particella (comunque scelta), che chiameremo “polo” (sulla quale non è imposta nessuna condizione) e dalla velocità angolare, che dipende solo dal tempo (e non dipende dalla particella considerata o dal polo).

Dunque, le velocità dei moti rigidi hanno solamente 6 gradi di libertà, di cui 3 dovuti alla velocità del polo e 3 alla velocità angolare (mentre la velocità di un qualunque moto continuo ha infiniti gradi di libertà).

2.5.13 Nota. La formula della velocità di un moto rigido può essere immediatamente estesa a tutti i punti dello spazio, ottenendo così la formula

$$\bar{\mathbf{v}}_t(p) = \bar{\mathbf{v}}_t(o) + \bar{\mathbf{\Omega}}_t \times (p - o), \quad \forall (t, p) \in \mathbf{T} \times \mathbf{P},$$

che rappresenta la velocità del moto continuo rigido di un continuo, il cui dominio spaziale è esteso a tutto lo spazio, e che è “trascinato” rigidamente dal continuo originale. \square

Per semplicità, riferiamoci a tale moto continuo il cui dominio spaziale è esteso a tutto lo spazio.

2.5.14 Proposizione. Sia C un moto continuo rigido. Si consideri un istante $t \in \mathbf{T}$.

1) Se $\bar{\mathbf{\Omega}}_t = 0$, allora abbiamo

$$\bar{\mathbf{v}}_t(p) = \bar{\mathbf{v}}_t(o), \quad \forall (t, p) \in \mathbf{T} \times \mathbf{P},$$

dove $o \in \mathbf{P}$ è un punto qualunque.

Dunque, in questo caso la velocità è traslatoria, ossia non dipende dal punto $p \in \mathbf{P}$.

2) Se $\bar{\mathbf{\Omega}}_t \neq 0$, allora possiamo decomporre la velocità in una componente parallela ad $\bar{\mathbf{\Omega}}_t$ ed in una componente ortogonale ad $\bar{\mathbf{\Omega}}_t$, mediante la formula

$$\bar{\mathbf{v}}_t(p) = \bar{\mathbf{v}}_t^{\parallel}(p) + \bar{\mathbf{v}}_t^{\perp}(p), \quad \forall (t, p) \in \mathbf{T} \times \mathbf{P},$$

dove

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{v}}_t^{\parallel}(p) &= \bar{\mathbf{v}}_t^{\parallel}(o), \\ \bar{\mathbf{v}}_t^{\perp}(p) &= \bar{\mathbf{v}}_t^{\perp}(o) + \bar{\mathbf{\Omega}}_t \times (p - o), \end{aligned}$$

dove $o \in \mathbf{P}$ è un punto qualunque.

Inoltre, i punti $o' \in \mathbf{P}$, per i quali

$$\bar{\mathbf{v}}_t^{\perp}(o') = 0,$$

appartengono ad una retta r_t parallela ad $\bar{\Omega}_t$, detta *asse di rotazione istantanea*. Se, scegliamo come polo un qualunque punto $o' \in r_t$, allora l'espressione della velocità diventa

$$\begin{aligned}\bar{v}_t^{\parallel}(p) &= \bar{v}_t^{\parallel}(o'), \\ \bar{v}_t^{\perp}(p) &= \bar{\Omega}_t \times (p - o').\end{aligned}$$

Dunque, in tal modo la velocità è decomposta in una componente traslatoria, parallela all'asse di rotazione istantanea, ed in una componente di rotazione attorno all'asse di rotazione istantanea.

L'asse di rotazione istantanea è il limite dell'asse di rotazione

$$r_t = \lim_{s \rightarrow t} r_{(s,t)}.$$

DIMOSTRAZIONE. La decomposizione della velocità segue immediatamente dal fatto che $\bar{\Omega}_t \times (p - o)$ è ortogonale ad $\bar{\Omega}_t$.

Consideriamo ora il caso 2) e cerchiamo il luogo dei punti o' per i quali $\bar{v}_t^{\perp}(o) = 0$. Dobbiamo dunque risolvere l'equazione lineare

$$\bar{\Omega}_t \times (o' - o) = -\bar{v}_t^{\perp}(o),$$

nell'incognita $o' \in \bar{P}$, associata all'operatore lineare

$$\hat{f}: \bar{P} \rightarrow \bar{P}: (o' - o) \mapsto \bar{\Omega}_t \times (o' - o)$$

ed al termine noto $-\bar{v}_t^{\perp}(o)$.

Tale equazione ammette soluzioni perché l'immagine dell'operatore lineare \hat{f} è il piano ortogonale ad $\bar{\Omega}_t$ ed il termine noto $-\bar{v}_t^{\perp}(o)$ appartiene all'immagine.

Inoltre, il nucleo dell'operatore lineare \hat{f} è la retta $\bar{r}_t \subset \bar{P}$ passante per $0 \in \bar{P}$ e parallela ad $\bar{\Omega}_t$.

Perciò le l'insieme delle soluzioni dell'equazione è la retta

$$r_t = o' + \bar{r}_t,$$

dove o' è una soluzione particolare dell'equazione. \square

Abbiamo visto che, per un moto continuo rigido, abbiamo $\underline{\mathcal{E}} = 0$ e $\underline{\epsilon} = 0$. Viceversa, queste due proprietà caratterizzano i moti rigidi.

2.5.15 Proposizione. Consideriamo un moto continuo $C: \mathbf{T} \times (\mathbf{T} \times \mathbf{P}) \rightarrow \mathbf{P}$. Se $\underline{\mathcal{E}} = 0$, allora il moto è rigido.

DIMOSTRAZIONE. L'idea intuitiva è la seguente. Se $\underline{\mathcal{E}} = 0$, allora le lunghezze dei vettori infinitesimi sono conservate lungo il moto. Ma questo implica anche che le lunghezze dei vettori finiti sono conservate lungo il moto.

Più rigorosamente dimostriamo la tesi come segue.

Facciamo innanzitutto un'osservazione preliminare. Si considerino due istanti $s, t \in \mathbf{T}$. All'istante $t \in \mathbf{T}$, si consideri una curva

$$c_t: [0, 1] \rightarrow \mathbf{P}.$$

All'istante $s \in \mathbf{T}$, tale curva è trasformata, per effetto del moto, nella nuova curva

$$c_s := C_{(s,t)} \circ c_t: [0, 1] \rightarrow \mathbf{P}.$$

Si può dimostrare che, dato che il tensore metrico è conservato dal moto, allora questa trasformazione di curve manda geodetiche in geodetiche e quindi rette in rette.

Si considerino ora due istanti $s, t \in \mathbf{T}$, un punto $p \in \mathbf{P}$ ed un vettore $\bar{h} \in \bar{\mathbf{P}}$. All'istante iniziale t , si consideri la curva rettilinea

$$c_t : [0, 1] \rightarrow \mathbf{P} : \lambda \mapsto p + \lambda \|\bar{h}\|,$$

che collega il punto p ed il punto $p + \bar{h}$.

Per effetto del moto, tale curva si trasforma, all'istante finale s , nella curva rettilinea

$$c_s : [0, 1] \rightarrow \mathbf{P} : \lambda \mapsto C(s; t, p + \lambda \|\bar{h}\|),$$

che collega il punto $C(s; t, p)$ ed il punto $C(s; t, p + \bar{h})$.

Per le nostre ipotesi abbiamo

$$Dc_t(\lambda) = \|\bar{h}\| \quad \text{e} \quad Dc_s(\lambda) = D(C_{(s,t)})(\|\bar{h}\|) = \hat{\mathcal{R}}_{(s,t)}(\|\bar{h}\|) = (\|\bar{h}\|).$$

Possiamo esprimere la lunghezza L_t della curva c_t (ossia la lunghezza del vettore \bar{h}) e la lunghezza L_s della curva c_s (ossia la lunghezza del vettore $C(s; t, p + \bar{h}) - C(s; t, p)$) come segue

$$L_t = \|\bar{h}\| = \int_{[0,1]} Dc_t d\lambda \quad \text{e} \quad L_s = \|C(s; t, p + \bar{h}) - C(s; t, p)\| = \int_{[0,1]} Dc_s d\lambda.$$

Dunque, abbiamo

$$L_t = L_s.$$

Tale uguaglianza vale qualunque sia il punto p ed il vettore \bar{h} scelti.

Abbiamo dunque dimostrato che le distanze tra le particelle sono costanti lungo il moto. Dunque il moto è rigido. QED

2.5.16 Corollario. Consideriamo un moto continuo $C : \mathbf{T} \times (\mathbf{T} \times \mathbf{P}) \rightarrow \mathbf{P}$. Se $\underline{\epsilon} = 0$, allora il moto è rigido.

DIMOSTRAZIONE. Lungo il moto di ciascuna particella, abbiamo

$$0 = \hat{\epsilon} = \delta \hat{\mathcal{D}} \quad \text{e} \quad \hat{\mathcal{D}}_{(t,t)} = \text{id}_{\bar{\mathbf{P}}}.$$

Perciò, per il teorema di esistenza ed unicità delle equazioni differenziali del prim'ordine, otteniamo

$$\hat{\mathcal{D}}_{(s,t)} = \text{id}_{\bar{\mathbf{P}}}.$$

Dunque, abbiamo identicamente $\mathcal{E} = 0$. Allora, il Corollario segue dalla Proposizione precedente. QED

2.6 Esempi notevoli di moti continui

Dedichiamo questa sezione allo studio di alcuni esempi notevoli moti continui.

2.6.1 Moti traslatori uniformi

I moti traslatori uniformi sono i moti continui la cui velocità è costante.

2.6.1 Definizione. Definiamo *moto traslatorio uniforme* un moto continuo del tipo

$$C(s; t, p) = p + \bar{\mathbf{u}}(s - t), \quad \forall (s; t, p) \in \mathbf{T} \times \mathbf{D},$$

dove $\bar{\mathbf{u}} \in \bar{\mathbf{P}}$ è un vettore costante. \square

2.6.2 Nota. Possiamo verificare che un moto traslatorio uniforme soddisfa gli assiomi di un moto continuo. Infatti, abbiamo

$$\begin{aligned} C(t; t, p) &:= p + \bar{\mathbf{u}}(t - t) \\ &= p \\ C(r; s, C(s; t, p)) &:= p + \bar{\mathbf{u}}(s - t) + \bar{\mathbf{u}}(r - s) \\ &= p + \bar{\mathbf{u}}(r - s) \\ &= C(r; t, p). \quad \square \end{aligned}$$

2.6.3 Proposizione. Se C è un moto traslatorio uniforme, allora la sua espressione in un sistema di coordinate cartesiano è

$$\begin{aligned} C^x(s; t, p) &= x(p) + \mathbf{u}^x(s - t), \\ C^y(s; t, p) &= y(p) + \mathbf{u}^y(s - t), \\ C^z(s; t, p) &= z(p) + \mathbf{u}^z(s - t), \quad \square \end{aligned}$$

2.6.4 Proposizione. Se C è un moto traslatorio uniforme, allora

- la velocità è il vettore costante $\bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{u}}$;
- l'accelerazione è nulla $\bar{\mathbf{a}} = 0$;
- il dominio \mathbf{D}_s è ottenuto dal dominio \mathbf{D}_t mediante la traslazione del vettore costante $\bar{\mathbf{u}}(s - t)$;
- il moto è stazionario;
- lo jacobiano del moto è l'identità $\hat{\mathcal{J}} = \text{id}_{\bar{\mathbf{P}}}$;
- il moto è traslatorio;
- il tensore delle deformazioni finite è nullo $\mathcal{E} = 0$;
- il tensore delle deformazioni è l'identità $\hat{\mathcal{D}} = \text{id}_{\bar{\mathbf{P}}}$;

- il tensore delle rotazioni è l'identità $\hat{\mathcal{R}} = \text{id}_{\bar{\mathcal{P}}}$;
- il tensore delle deformazioni infinitesime è nullo $\hat{\varepsilon} = 0$;
- il tensore delle rotazioni infinitesime è nullo $\hat{\omega} = 0$;
- il moto è rigido e la sua velocità angolare è nulla $\bar{\Omega} = 0$;
- la divergenza della velocità è nulla $\text{div } \bar{v} = 0$. \square

2.6.5 Proposizione. Sia C un moto continuo con velocità costante (rispetto al tempo ed allo spazio). Allora, C è un moto traslatorio uniforme.

DIMOSTRAZIONE. Si ottiene integrando la velocità e considerando il teorema di esistenza ed unicità delle soluzioni di un'equazione differenziale del prim'ordine. QED

2.6.2 Moti rotatori uniformi

I moti rotatori uniformi sono i moti continui di rotazione uniforme intorno ad un asse fisso.

2.6.6 Definizione. Definiamo *moto rotatorio uniforme*, intorno all'asse di rotazione $r \subset \mathcal{P}$ la cui direzione è individuata da un versore \bar{u} , un moto continuo del tipo

$$C(s; t, p) = \pi(p) + \hat{\mathcal{R}}_{\omega(s-t)}(p - \pi(p)), \quad \forall (s; t, p) \in \mathbf{T} \times \mathbf{D},$$

dove $\omega \in \mathbb{R}$, $\pi(p) \in r$ è la proiezione del punto p sull'asse di rotazione e

$$\hat{\mathcal{R}}_{\omega(s-t)} : \bar{\mathcal{P}} \rightarrow \bar{\mathcal{P}}$$

è l'operatore di rotazione dell'angolo $\omega(s-t)$ attorno alla retta $\bar{r} \in \bar{\mathcal{P}}$ passante per $\bar{0} \in \bar{\mathcal{P}}$ e che ha la direzione di \bar{u} . \square

2.6.7 Nota. In una base ortonormale adattata al moto (con $\bar{e}_3 = \bar{u}$) l'operatore di rotazione $\hat{\mathcal{R}}_{\omega(s-t)}$ è rappresentato dalla matrice

$$\hat{\mathcal{R}}_{\omega(s-t)} = \begin{pmatrix} \cos(\omega(s-t)) & -\sin(\omega(s-t)) & 0 \\ \sin(\omega(s-t)) & \cos(\omega(s-t)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \square$$

2.6.8 Nota. Possiamo verificare che un moto rotatorio uniforme soddisfa gli assiomi di un moto continuo. Infatti, abbiamo

$$\begin{aligned} C(t; t, p) &:= \pi(p) + \hat{\mathcal{R}}_{\omega(t-t)}(p - \pi(p)) \\ &= \pi(p) + \text{id}_{\bar{\mathcal{P}}}(p - \pi(p)) \\ &= \pi(p) + p - \pi(p) \\ &= p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C(r; s, C(s; t, p)) &:= \pi(p) + (\hat{\mathcal{R}}_{\omega(r-s)} \circ \hat{\mathcal{R}}_{\omega(s-t)})(p - \pi(p)) \\
&= \pi(p) + \hat{\mathcal{R}}_{\omega(r-s) + \omega(s-t)}(p - \pi(p)) \\
&= \pi(p) + \hat{\mathcal{R}}_{\omega(r-t)}(p - \pi(p)) \\
&= C(s; t, p) . \square
\end{aligned}$$

2.6.9 Proposizione. Se C è un moto rotatorio uniforme, allora la sua espressione in un sistema di coordinate cilindrico adattato ad r , è

$$\begin{aligned}
C^\rho(s; t, p) &= \rho(p) , \\
C^\phi(s; t, p) &= \phi(p) + \omega(s - t) , \\
C^z(s; t, p) &= z(p) ,
\end{aligned}$$

ed in un sistema di coordinate cartesiano, adattato ad r , è

$$\begin{aligned}
C^x(s; t, p) &= \cos(\omega(s - t)) x(p) - \sin(\omega(s - t)) y(p) , \\
C^y(s; t, p) &= \sin(\omega(s - t)) x(p) + \cos(\omega(s - t)) y(p) , \\
C^z(s; t, p) &= z(p) . \square
\end{aligned}$$

2.6.10 Proposizione. Se C è un moto rotatorio uniforme, allora
- la velocità è il campo vettoriale (costante rispetto al tempo)

$$\bar{\mathbf{v}}(t, p) = \Omega \times (p - \pi(p)) , \quad \text{con} \quad \Omega = \omega \bar{\mathbf{u}} ;$$

- l'accelerazione è il campo vettoriale (costante rispetto al tempo)

$$\bar{\mathbf{a}}(t, p) = -\omega^2 (p - \pi(p)) ;$$

- il dominio \mathbf{D}_s è ottenuto dal dominio \mathbf{D}_t mediante la rotazione dell'angolo $\hat{\mathcal{R}}_{\omega(s-t)}$;

- il moto è stazionario;

- lo jacobiano del moto è l'operatore di rotazione

$$\hat{\mathcal{J}}_{(s,t)} = \hat{\mathcal{R}}_{\omega(s-t)} ;$$

- il tensore delle deformazioni finite è nullo $\mathcal{E} = 0$;

- il tensore delle deformazioni è l'identità $\hat{\mathcal{D}} = \text{id}_{\mathcal{P}}$;

- il tensore delle rotazioni è $\hat{\mathcal{R}}_{(s,t)} = \hat{\mathcal{R}}_{\omega(s-t)}$;

- il tensore delle deformazioni infinitesime è nullo $\hat{\mathcal{e}} = 0$;

- il tensore delle rotazioni infinitesime è rappresentato dalla matrice

$$(\hat{\omega})_j^i = \begin{pmatrix} 0 & -\omega & 0 \\ \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ;$$

- il moto è rigido e la sua velocità angolare è il vettore costante

$$\bar{\Omega} = \omega \bar{u};$$

- la divergenza della velocità è nulla $\operatorname{div} \bar{v} = 0$. \square

2.6.11 Proposizione. Sia C un moto continuo la cui velocità è data dalla formula

$$\bar{v}(t, p) = \Omega \times (p - \pi(p)), \quad \text{con } \Omega \in \bar{\mathbf{P}}.$$

Allora, C è un moto rotatorio uniforme.

DIMOSTRAZIONE. Si ottiene integrando la velocità e considerando il teorema di esistenza ed unicità delle soluzioni di un'equazione differenziale del prim'ordine. QED

2.6.3 Moti di espansione esponenziale sferica

I moti rotatori uniformi sono i moti continui in cui le particelle si allontanano radialmente con una legge esponenziale.

2.6.12 Definizione. Definiamo *moto di espansione esponenziale sferica*, con centro di espansione $o \in \mathbf{P}$, un moto continuo del tipo

$$C(s; t, p) = o + e^{(s-t)/\tau} (p - o), \quad \forall (s; t, p) \in \mathbf{T} \times \mathbf{D},$$

dove $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{D} = \mathbf{T} \times \mathbf{P}$. \square

2.6.13 Nota. Possiamo verificare che un moto di espansione esponenziale sferica soddisfa gli assiomi di un moto continuo. Infatti, abbiamo

$$\begin{aligned} C(t; t, p) &:= o + e^{(t-t)/\tau} (p - o) \\ &= o + e^{0/\tau} (p - o) \\ &= o + p - o \\ &= p \\ C(r; s, C(s; t, p)) &:= o + e^{(r-s)/\tau} (p - o) + e^{(s-t)/\tau} (p - o) \\ &= o + e^{(r-t)/\tau} (p - o) \\ &= C(r; t, p). \quad \square \end{aligned}$$

2.6.14 Proposizione. Se C è un moto di espansione esponenziale sferica, allora la sua espressione in un sistema di coordinate sferico, con centro o , è

$$\begin{aligned} C^r(s; t, p) &= e^{(s-t)/\tau} r(p), \\ C^\theta(s; t, p) &= \theta(p), \\ C^\phi(s; t, p) &= \phi(p), \end{aligned}$$

ed in un sistema di coordinate cartesiano, con centro o , è

$$\begin{aligned} C^x(s; t, p) &= e^{(s-t)/\tau} \sin(\theta(p)) \cos(\phi(p)), \\ C^y(s; t, p) &= e^{(s-t)/\tau} \sin(\theta(p)) \sin(\phi(p)), \\ C^z(s; t, p) &= e^{(s-t)/\tau} \cos(\theta(p)). \quad \square \end{aligned}$$

2.6.15 Proposizione. Se C è un moto di espansione esponenziale sferica, allora
- la velocità è il campo vettoriale (costante rispetto al tempo)

$$\bar{v}(t, p) = \frac{1}{\tau} (p - o);$$

- l'accelerazione è il campo vettoriale (costante rispetto al tempo)

$$\bar{v}(t, p) = \frac{1}{\tau^2} (p - o);$$

- il moto è stazionario;
- lo jacobiano del moto è

$$\hat{\mathcal{J}}_{(s,t)} = e^{(s-t)/\tau} \text{id}_{\bar{P}};$$

- il tensore delle deformazioni finite è

$$\underline{\mathcal{G}} = e^{2(s-t)/\tau} g;$$

- il tensore delle deformazioni è

$$\hat{\mathcal{D}} = e^{(s-t)/\tau} \text{id}_{\bar{P}};$$

- il tensore delle rotazioni è l'identità $\hat{\mathcal{R}}_{(s,t)} = \text{id}_{\bar{P}}$;
- il tensore delle deformazioni infinitesime è

$$\underline{\epsilon} = \frac{1}{\tau} g;$$

- il tensore delle rotazioni infinitesime è nullo $\hat{\omega} = 0$;
- la divergenza della velocità è

$$\text{div } \bar{v} = 3/\tau. \quad \square$$

2.6.16 Proposizione. Sia C un moto continuo la cui velocità è data dalla formula

$$\bar{v}(t, p) = \frac{1}{\tau} (p - o), \quad \text{con } 0 \neq \tau \in \mathbb{R}.$$

Allora, C è un moto di espansione esponenziale sferica.

DIMOSTRAZIONE. Si ottiene integrando la velocità e considerando il teorema di esistenza ed unicità delle soluzioni di un'equazione differenziale del prim'ordine. QED

2.7 Grandezze globali del continuo

Consideriamo le grandezze globali e calcoliamone la loro derivata rispetto al tempo.

2.7.1 Grandezze globali

Consideriamo il valore globale di una grandezza ottenuto integrando la grandezza su un sottodominio.

Sia $G : D \rightarrow V$ l'espressione euleriana di una grandezza a valori in uno spazio vettoriale.

Sia $D' \subset P$ un sottodominio “sufficientemente regolare”.

2.7.1 Definizione. Il *valore globale* della grandezza G relativamente al sottodominio D' è definito come l'integrale

$$G[D'] := \int_{D'} G \, dV : T \rightarrow V,$$

dato da

$$G[D'](t) := \int_{D'_t} G_t \, dV, \quad \forall t \in T. \square$$

Dunque, la grandezza G espressa in forma euleriana è, per definizione, funzione delle due variabili t e p (tempo e posizione). Ma, il valore globale $G[D'] := \int_{D'} G \, dV$ della grandezza G è, per definizione, funzione della sola variabile t (dato che la variabile p è scomparsa dopo l'integrazione nel dominio spaziale D').

Facciamo alcuni esempi notevoli.

2.7.2 Assunzione. *indexdensità di massa* Postuliamo che il continuo sia dotato di una *densità di massa*

$$\mu : D \rightarrow \mathbb{R}^+. \square$$

Sia $o : T \rightarrow P$ il moto di un *polo* e sia

$$\bar{r} : D \rightarrow \bar{P} : p \mapsto p - o$$

il vettore distanza rispetto al polo.

Allora, abbiamo le seguenti nozioni.

2.7.3 Definizione. La *massa totale* del sottodominio $D' \subset D$ è l'integrale

$$m[D'] := \int_{D'} \mu \, dV \in \mathbb{R}.$$

La *quantità di moto* del sottodominio $D' \subset D$ è l'integrale

$$\bar{Q}[D'] := \int_{D'} \mu \bar{v} \, dV : \mathbf{T} \rightarrow \bar{\mathbf{P}}.$$

Il *momento delle quantità di moto* del sottodominio $D' \subset D$ è l'integrale

$$\bar{K}[D'] := \int_{D'} (\mu \bar{r} \times \bar{v}) \, dV : \mathbf{T} \rightarrow \bar{\mathbf{P}}.$$

L'*energia cinetica totale* del sottodominio $D' \subset D$ è l'integrale

$$T[D'] := \int_{D'} \left(\frac{1}{2} \mu \bar{v}^2\right) \, dV : \mathbf{T} \rightarrow \mathbb{R}. \square$$

2.7.2 Derivata del valore globale

Calcoliamo la derivata rispetto al tempo del valore globale di una grandezza.

Indichiamo con

$$\mathbf{S} := \{\bar{n} \in \bar{\mathbf{P}} \mid \bar{n}^2 = 1\} \subset \bar{\mathbf{P}}$$

la sfera unitaria, costituita dai vettori di lunghezza 1.

2.7.4 Definizione. Per ogni sottodominio $D' \subset D$ “sufficientemente regolare”, definiamo il *bordo (spaziale)* come il sottinsieme

$$\partial D' := \{(t, p) \in \mathbf{T} \times \mathbf{P} \mid t \in \mathbf{T}, p \in \partial(D_t)\} \subset \mathbf{T} \times \mathbf{P},$$

ossia come il sottinsieme di $\mathbf{T} \times \mathbf{P}$ ottenuto prendendo, per ogni istante $t \in \mathbf{T}$, il bordo $\partial(D_t)$ del dominio del continuo a tale istante. \square

Indichiamo il *versore normale uscente* al bordo (spaziale) del sottodominio con

$$\bar{n} : \partial D' \rightarrow \mathbf{S}.$$

Sia $G : D \rightarrow V$ l'espressione euleriana di una grandezza a valori in uno spazio vettoriale.

Sia $D' \subset D$ un sottodominio “sufficientemente regolare”.

2.7.5 Teorema. *La derivata (rispetto al tempo) del valore globale di G è data da ciascuna delle seguenti uguaglianze*

$$\begin{aligned} D \int_{\mathcal{D}'} \mathbf{G} \, d\mathcal{V} &= \int_{\mathcal{D}'} \partial_0 \mathbf{G} \, d\mathcal{V} + \int_{\partial \mathcal{D}'} (\mathbf{G} (\bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{n}})) \, d\mathcal{S} \\ &= \int_{\mathcal{D}'} (\partial_0 \mathbf{G} + \operatorname{div}(\bar{\mathbf{v}} \otimes \mathbf{G})) \, d\mathcal{V} \\ &= \int_{\mathcal{D}'} (\delta \mathbf{G} + \mathbf{G} \operatorname{div} \bar{\mathbf{v}}) \, d\mathcal{V}. \end{aligned}$$

DIMOSTRAZIONE. 1) Dimostriamo intuitivamente la prima formula.

La derivata rispetto al tempo di $\int_{\mathcal{D}'} \mathbf{G} \, d\mathcal{V}$ è data dalla somma di due contributi.

Il primo contributo è l'integrale della derivata parziale rispetto al tempo della grandezza stessa

$$\int_{\mathcal{D}'} \partial_0 \mathbf{G} \, d\mathcal{V}.$$

Il secondo contributo è dovuto alla variazione nel tempo del dominio. Tale contributo è dato da

$$\int_{\partial \mathcal{D}'} (\mathbf{G} (\bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{n}})) \, d\mathcal{S}.$$

Infatti

$$\bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{n}} \, d\mathcal{S}$$

è la velocità di variazione dell'elemento di volume dovuta al moto del continuo.

La dimostrazione rigorosa segue questa linea, facendo vedere che altri contributi sono infinitesimi di ordine superiore rispetto al tempo, i quali scompaiono nel processo di limite.

2) La seconda formula si ottiene applicando il Teorema di Gauss al secondo termine della prima formula, tenendo conto che

$$(\mathbf{G} (\bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{n}})) = (\bar{\mathbf{v}} \otimes \mathbf{G})(\bar{\mathbf{n}}).$$

3) La terza formula si ottiene dalla seconda mediante la regola di Leibniz e la formula della derivata particellare.

Infatti, la regola di Leibniz, mediante un semplice calcolo in un sistema di coordinate cartesiane, da

$$\operatorname{div} (\bar{\mathbf{v}} \otimes \mathbf{G}) = \operatorname{div} \bar{\mathbf{v}} \mathbf{G} + \check{D}\mathbf{G}(\bar{\mathbf{v}}).$$

Allora, la formula della derivata particellare da

$$\partial_0 \mathbf{G} + \operatorname{div}(\bar{\mathbf{v}} \otimes \mathbf{G}) = \partial_0 \mathbf{G} + \operatorname{div} \bar{\mathbf{v}} \mathbf{G} + \check{D}\mathbf{G}(\bar{\mathbf{v}}) = \delta \mathbf{G} + \operatorname{div} \bar{\mathbf{v}} \mathbf{G}. \text{ QED}$$

2.7.3 Equazione di continuità

Postuliamo la conservazione della massa di ogni sottodominio sufficientemente regolare ed esprimiamo questa legge di conservazione in forma integrale e differenziale.

2.7.6 Assunzione. Postuliamo che la densità di massa μ soddisfi l'equazione di continuità

$$D \int_{\mathbf{D}'} \mu d\mathcal{V} = 0,$$

per ogni sottodominio $\mathbf{D}' \subset \mathbf{D}$ “sufficientemente regolare, ossia che la massa totale di ogni sottodominio sufficientemente regolare \mathbf{D}' sia costante rispetto al tempo:

$$\int_{\mathbf{D}'} \mu d\mathcal{V} \in \mathbb{R}^+ . \square$$

2.7.7 Proposizione. Le tre condizioni seguenti sono equivalenti:

1) equazione di continuità in forma integrale

$$D \int_{\mathbf{D}'} \mu d\mathcal{V} = 0,$$

per ogni sottodominio “sufficientemente regolare” $\mathbf{D}' \subset \mathbf{D}$;

2) equazione di continuità in forma differenziale euleriana

$$\partial_0 \mu + \operatorname{div}(\mu \bar{\mathbf{v}}) = 0;$$

3) equazione di continuità in forma differenziale lagrangiana

$$\delta \mu + \mu \operatorname{div} \bar{\mathbf{v}} = 0.$$

DIMOSTRAZIONE. L'equivalenza segue immediatamente dal precedente Teorema, ponendo $G = \mu$, e dal fatto che un integrale è nullo in ogni sottodominio se e solo se è nullo l'integrando. QED

2.7.8 Nota. La prima equazione esprime la conservazione della massa totale per ogni sottodominio.

La seconda equazione esprime il bilancio tra la variazione della densità di massa nel tempo in un intorno infinitesimo di un punto fisso e la quantità di massa che esce da questo intorno (*punto di vista euleriano*).

La terza equazione esprime il bilancio tra la variazione della densità di massa nel tempo in un intorno infinitesimo che segue il moto di una particella e la quantità di massa che esce da questo intorno (*punto di vista lagrangiano*). \square

2.7.9 Proposizione. L'espressione dell'equazione di continuità in un qualunque sistema di coordinate è

$$\begin{aligned} \partial_0 \mu + \partial_i(\mu v^i) + \mu \Gamma_{i h}^i v^h &\equiv \partial_0 \mu + \frac{\partial_i(\mu \sqrt{|g|} v^i)}{\sqrt{|g|}} \\ &= 0. \end{aligned}$$

In particolare, l'espressione dell'equazione di continuità in un sistema di coordinate cartesiano è

$$\partial_0 \mu + \partial_i(\mu v^i) = 0 . \square$$

2.7.4 Teorema del trasporto

Calcoliamo la derivata rispetto al tempo del valore globale di una grandezza moltiplicata per la densità di massa.

Sia $\mathbf{G} : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{V}$ l'espressione euleriana di una grandezza a valori in uno spazio vettoriale.

Sia $\mathbf{D}' \subset \mathbf{P}$ un sottodominio "sufficientemente regolare".

2.7.10 Teorema (*Teorema del trasporto.*). *La derivata (rispetto al tempo) del valore globale della grandezza $(\mu \mathbf{G})$ relativamente al sottodominio $\mathbf{D}' \subset \mathbf{D}$ è data da*

$$D \int_{\mathbf{D}'} \mu \mathbf{G} d\mathcal{V} = \int (\mu \delta \mathbf{G}) d\mathcal{V}.$$

DIMOSTRAZIONE. Infatti, abbiamo

$$\begin{aligned} D \int_{\mathbf{D}'} \mu \mathbf{G} d\mathcal{V} &= \int_{\mathbf{D}'} (\delta(\mu \mathbf{G}) + (\mu \mathbf{G}) \operatorname{div} \bar{\mathbf{v}}) d\mathcal{V} \\ &= \int_{\mathbf{D}'} (\mu \delta \mathbf{G} + \mathbf{G} \delta \mu + (\mu \mathbf{G}) \operatorname{div} \bar{\mathbf{v}}) d\mathcal{V} \\ &= \int_{\mathbf{D}'} (\mu \delta \mathbf{G} + \mathbf{G} (\delta \mu + \mu \operatorname{div} \bar{\mathbf{v}})) d\mathcal{V} \\ &= \int_{\mathbf{D}'} (\mu \delta \mathbf{G}) d\mathcal{V}. \text{ QED} \end{aligned}$$

Sia $o \in \mathbf{P}$ un polo fisso.

2.7.11 Corollario. Abbiamo le seguenti derivate

$$\begin{aligned} D\bar{Q}[\mathbf{D}'] &:= \int_{\mathbf{D}'} \mu \bar{\mathbf{a}} d\mathcal{V} \\ D\bar{K}[\mathbf{D}'] &:= \int_{\mathbf{D}'} (\mu \bar{\mathbf{r}} \times \bar{\mathbf{a}}) d\mathcal{V} \\ DT[\mathbf{D}'] &:= \int_{\mathbf{D}'} (\mu \bar{\mathbf{a}} \cdot \bar{\mathbf{v}}) d\mathcal{V}. \square \end{aligned}$$

CAPITOLO 3

DINAMICA

3.1 Il modello generale della dinamica

Dedichiamo questa sezione agli aspetti generali della dinamica dei continui che valgono per tutti i continui.

La prossima sezione sarà dedicata, invece, ad un particolare tipo di continui caratterizzato da una particolare legge costitutiva.

3.1.1 Sottodomini interni ed esterni

Facciamo un'osservazione preliminare sui sottodomini del continuo.

Consideriamo un sistema continuo.

Se $D' \subset D$ è un sottominio “sufficientemente regolare”, possiamo decomporre il suo bordo spaziale nel modo seguente

$$\partial D' = \partial D'_{\text{int}} \sqcup \partial D'_{\text{est}},$$

dove $\partial D'_{\text{int}}$ e $\partial D'_{\text{est}}$ indicano la “parte interna” e la “parte esterna” di tale bordo, ossia la parte che non interseca il bordo ∂D di tutto il dominio e la parte che interseca il bordo ∂D di tutto il dominio, rispettivamente.

3.1.1 Definizione. Diciamo che un sottodominio $D' \subset D$ è *interno* se il suo bordo spaziale è interno al dominio di tutto il continuo

$$\partial_{\text{int}} D' \subset D. \square$$

3.1.2 Densità di forza di volume

Postuliamo un primo tipo di forza agente sul continuo.

Questo tipo di forza può essere considerato analogo alla forza agente su un sistema meccanico costituito da una sola particella. La differenza fondamentale tra

i due casi è che nel caso di una sola particella si può parlare di forza finita, mentre nel caso di un sistema di infinite particelle si può parlare solo di densità di forza e per ottenere una forza finita occorre integrare su un volume (cioè sommare su tutte le particelle appartenenti a tale volume).

3.1.2 Assunzione. Postuliamo che sul continuo agisca una *densità di forza di volume*

$$\bar{f} : \mathbf{D} \rightarrow \bar{\mathbf{P}} . \square$$

Dunque, la densità di forza di volume $\bar{f}(t, p) \in \bar{\mathbf{P}}$ è un vettore misurato in Newton per metro cubo.

Per ogni sottodominio sufficientemente regolare $\mathbf{D}' \subset \mathbf{D}$, la *forza totale di volume* agente sul sottodominio è il campo vettoriale dipendente dal tempo

$$\bar{F}_{\mathbf{D}'}(t) := \int_{\mathbf{D}'_t} \bar{f}_t d\mathcal{V}.$$

Dunque, la forza totale di volume $\bar{F}_{\mathbf{D}'}(t) \in \bar{\mathbf{P}}$ è un vettore misurato in Newton.

3.1.3 Densità di forza di superficie

Postuliamo un secondo tipo di forza agente sul continuo.

Questo tipo di forza non ha un analogo nel caso di un sistema meccanico costituito da una sola particella. Infatti, le forze di superficie nascono dall'interazione di particelle molto vicine.

Anche per questo tipo di forza si può parlare solo di densità di forza ed in tal caso per ottenere una forza finita occorre integrare su una superficie (cioè sommare su tutte le particelle appartenenti a tale superficie).

Noi supponiamo dunque che nel continuo agisca un secondo tipo di forze che chiameremo *sforzi* o *tensioni*.

Descriviamo questo tipo di forze mediante delle ipotesi successive.

Consideriamo un istante $t \in \mathbf{T}$.

Consideriamo una qualunque superficie “sufficientemente regolare” $\Xi_t \subset \mathbf{D}_t$ interna al dominio.

La superficie Ξ_t determina localmente due regioni “infinitamente vicine” alla superficie stessa, che stanno dalle due “parti” di essa. Possiamo scegliere una delle due regioni ed indicarla con +; indicheremo, allora, l'altra delle due regioni con -. Ciascuna di queste due possibili scelte è detta *un'orientazione locale* di Ξ_t .

1) *Prima ipotesi.*

Noi supponiamo che:

- per ogni punto della superficie $p \in \Xi_t$, le particelle della regione $+$ esercitino attraverso Ξ_t una densità superficiale di forza

$$\bar{F}(t, p, \Xi_t, +) \in \bar{P}$$

sulle particelle della regione $-$;

- per ogni punto della superficie $p \in \Xi_t$, le particelle della regione $-$ esercitino attraverso Ξ_t una densità superficiale di forza

$$\bar{F}(t, p, \Xi_t, -) \in \bar{P}$$

sulle particelle della regione $+$.

Diciamo che:

$\bar{F}(t, p, \Xi_t, +)$ è la *tensione*, o lo *sforzo* esercitato nel punto p relativamente alla superficie Ξ_t ed all'orientazione $+$,

$\bar{F}(t, p, \Xi_t, -)$ è la *tensione*, o lo *sforzo* esercitato nel punto p relativamente alla superficie Ξ_t ed all'orientazione $-$.

Dunque, la densità superficiale di forza $\bar{F}(t, p, \Xi_t, \pm)$ è un vettore, misurato in Newton per metro quadro.

Se la superficie è globalmente orientabile, allora, integrando $\bar{F}(t, p, \Xi_t, \pm)$ su tutta la superficie, otteniamo la forza totale esercitata attraverso Ξ_t dalle particelle della regione \pm , sulle particelle della regione \mp .

Dunque, fissato un punto $p \in \mathbf{D}_t$, noi abbiamo supposto che in tale punto sia esercitato uno sforzo per ciascuna delle infinite superfici Ξ_t (sufficientemente regolari) passanti per p e per ciascuna delle due possibili orientazioni di Ξ_t .

L'insieme degli sforzi esercitati in p , relativamente a tutte le infinite superfici Ξ_t (sufficientemente regolari) passanti per p e alle loro due possibili orientazioni, è detto lo *stato di tensione* in p .

Dunque, lo stato di tensione non è un vettore, ma un insieme di infiniti vettori.

Senza ulteriori ipotesi, per misurare lo stato di tensione in un punto, occorrerebbe fare infinite misure vettoriali, una per ogni superficie orientata passante per questo punto.

Per fortuna, valgono delle ulteriori proprietà delle tensioni, che semplificano sostanzialmente il problema.

2) *Seconda ipotesi.*

Fissato il punto p , noi supponiamo che:

- lo sforzo $\bar{F}(t, p, \Xi_t, \pm)$ dipenda solo dal piano tangente a Ξ_t nel punto p e dalla sua orientazione.

In altre parole, supponiamo che due superfici Ξ_t e Ξ'_t passanti per lo stesso punto p , che abbiano lo stesso piano tangente, determinano lo stesso sforzo

$$\bar{F}(t, p, \Xi_t, \pm) = \bar{F}(t, p, \Xi'_t, \pm)$$

per ciascuna delle due orientazioni.

In altre parole, per quanto riguarda lo sforzo, noi supponiamo che non conti la forma della superficie, ma solo il suo piano tangente e l'orientazione.

In breve, possiamo dire che lo sforzo $\bar{F}(t, p, \Xi_t, +)$ dipende dalla *giacitura orientata* di $(\Xi_t, +)$ in p .

Osserviamo che ogni piano π passante per p determina i due versori $\pm \bar{n}$ applicati in p ed ortogonali ad esso. Viceversa, ciascun versore \bar{n} applicato in p determina il piano π passante per p ed ortogonale ad esso.

Osserviamo anche che ogni piano orientato π passante per p determina il versore \bar{n} applicato in p ortogonali ad esso e rivolto verso la regione $+$. Viceversa, ciascun versore \bar{n} applicato in p determina il piano π passante per p ed ortogonale ad esso e l'orientazione relativa alla regione $+$ verso cui è rivolto \bar{n} .

Dunque, abbiamo una corrispondenza biunivoca

$$(\pi, +) \mapsto \bar{n}$$

tra i piani orientati passanti per p ed i versori applicati in p .

Questa corrispondenza è ottenuta mediante la precedente convenzione detta della *normale uscente*, scegliendo come orientazione positiva $+$ la regione a cui si rivolge n .

Scegliendo come orientazione positiva $+$ la regione opposta al verso di n avremmo la convenzione opposta detta della *normale entrante*.

In corsi diversi possono essere usate convenzioni diverse. Noi ci atterremo alla convenzione della normale uscente.

Per brevità di linguaggio, diciamo che un piano orientato passante per p è una *faccia* passante per p .

Pertanto, possiamo descrivere lo stato di tensione all'istante t in p dicendo che a ciascuno degli infiniti versori \bar{n} applicati in p è associato lo sforzo $\bar{F}(t, p, \Xi_t, +)$ relativo ad una qualunque delle superfici orientate $(\Xi_t, +)$ passanti per p che hanno normale orientata \bar{n} .

L'insieme dei versori \bar{n} applicati in p costituisce la sfera \mathbf{S} di centro p e raggio 1.

Perciò, possiamo dire che lo stato di tensione all'istante t in p è descritto dall'applicazione

$$\hat{\tau}_{(t,p)} : \mathbf{S} \rightarrow \bar{\mathbf{P}} : \bar{n} \mapsto \bar{F}(t, p, \Xi_t, +),$$

che associa ad ogni versore \bar{n} applicato in p lo sforzo $\bar{F}(t, p, \Xi_t, +)$ relativo ad una qualunque delle superfici orientate $(\Xi_t, +)$ passanti per p che hanno normale orientata \bar{n} .

Ciascuno sforzo $\tau_{(t,p)}(\bar{n}) \in \bar{\mathbf{P}}$ può essere univocamente decomposto nella componente vettoriale parallela ad \bar{n} , detto *sforzo normale* (alla faccia), e nella componente vettoriale ortogonale ad \bar{n} , detto *sforzo tangenziale* (alla faccia), o *sforzo di taglio*, secondo la formula

$$\tau_{(t,p)}(\bar{n}) = \tau_{(t,p)}(\bar{n})^\perp + \tau_{(t,p)}(\bar{n})^\parallel,$$

dove

$$\tau_{(t,p)}(\bar{n})^\perp = (\tau_{(t,p)}(\bar{n}) \cdot \bar{n}) \bar{n} \quad \text{e} \quad \tau_{(t,p)}(\bar{n})^\parallel = \tau_{(t,p)}(\bar{n}) - \tau_{(t,p)}(\bar{n})^\perp.$$

Lo scalare $\tau_{(t,p)}(\bar{n}) \cdot \bar{n} \in \mathbb{R}$ è la componente scalare dello sforzo normale.

Se $\tau_{(t,p)}(\bar{n}) \cdot \bar{n} > 0$ diciamo che lo sforzo normale è di *trazione*; se $\tau_{(t,p)}(\bar{n}) \cdot \bar{n} < 0$ diciamo che lo sforzo normale è di *pressione*.

Se usassimo la convenzione della normale entrante (invece di quella della normale uscente), invertiremmo la precedente definizione.

Dunque, se consideriamo due versori $\bar{n}, \bar{n}' \in \mathbf{S}$, allora lo scalare

$$\hat{\tau}_{(t,p)}(\bar{n}) \cdot \bar{n}'$$

è la componente secondo \bar{n}' dello sforzo relativo a \bar{n} .

In base alla discussione precedente, l'applicazione $\hat{\tau}_{(t,p)}$ è definita solo sull'insieme dei versori \mathbf{S} .

E' comodo estendere formalmente tale applicazione a tutti i vettori dello spazio, definendo l'applicazione

$$\hat{\sigma}_{(t,p)} : \bar{\mathbf{P}} \rightarrow \bar{\mathbf{P}},$$

data da

$$\begin{aligned} \bar{v} &\mapsto \|\bar{v}\| \hat{\tau}_{(t,p)}\left(\frac{\bar{v}}{\|\bar{v}\|}\right), \quad \forall \bar{v} \neq \bar{0} \\ \bar{0} &\mapsto \bar{0}. \end{aligned}$$

Chiaramente, in particolare, se consideriamo un versore $\bar{n} \in \mathbf{S}$, allora abbiamo

$$\hat{\sigma}_{(t,p)}(\bar{n}) = \hat{\tau}_{(t,p)}(\bar{n}).$$

Le precedenti ipotesi e la precedente discussione portano al seguente postulato.

3.1.3 Assunzione. Postuliamo che sul continuo agisca una *densità di forza di superficie*

$$\hat{\sigma} : \mathbf{D} \times \bar{\mathbf{P}} \rightarrow \bar{\mathbf{P}}. \square$$

Per ogni sottodominio sufficientemente regolare $\mathbf{D}' \subset \mathbf{D}$, la *forza totale di superficie* agente sulla superficie è il campo vettoriale dipendente dal tempo

$$\bar{\Sigma}_{\mathbf{D}}(t) := \int_{\partial_{\text{int}} \mathbf{D}_t} \hat{\sigma}_t(\bar{n}_t) d\mathcal{S} = \int_{\partial_{\text{int}} \mathbf{D}_t} \hat{\tau}_t(\bar{n}_t) d\mathcal{S},$$

dove $\bar{n}_t : \partial \mathbf{D}'_t \rightarrow \bar{\mathbf{P}}$ è il campo dei versori normali uscenti della superficie $\partial \mathbf{D}'_t$.

Dunque, la forza totale di superficie $\hat{\Sigma}_{\mathbf{D}'}(t) \in \bar{\mathbf{P}}$ è un vettore misurato in Newton.

3.1.4 Densità di carico

Postuliamo un terzo tipo di forza agente sul continuo.

Questo tipo di forza non ha un analogo nel caso di un sistema meccanico costituito da una sola particella. Infatti, le forze di carico nascono dall'azione esercitata sul bordo da agenti esterni al continuo.

Anche per questo tipo di forza si può parlare solo di densità di forza ed in tal caso per ottenere una forza finita occorre integrare sul bordo (cioè sommare su tutte le particelle appartenenti a tale superficie).

3.1.4 Assunzione. Postuliamo che sul bordo del continuo agisca una *densità di carico*

$$\bar{\gamma} : \partial\mathbf{D} \rightarrow \bar{\mathbf{P}}. \square$$

La *forza totale di carico* agente sul bordo è il campo vettoriale dipendente dal tempo

$$\bar{\Gamma}[\partial\mathbf{D}](t) := \int_{\partial\mathbf{D}} \bar{\gamma}_t d\mathcal{S}.$$

Dunque, la forza totale di superficie $\bar{\Gamma}_{\partial\mathbf{D}}(t) \in \bar{\mathbf{P}}$ è un vettore misurato in Newton.

3.1.5 Le equazioni di moto in forma integrale

Formuliamo le equazioni di moto in forma integrale, postulando le due equazioni cardinali *per ogni* sottodominio sufficientemente regolare del continuo.

Innanzitutto, consideriamo le seguenti grandezze totali relative al sottodominio “sufficientemente regolare” $\mathbf{D}' \subset \mathbf{D}$.

Sia $o : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{P}$ il moto di un *polo* e sia

$$\bar{\mathbf{r}} : \mathbf{D} \rightarrow \bar{\mathbf{P}} : p \mapsto p - o$$

il vettore distanza rispetto al polo.

Abbiamo le seguenti forze e momenti di forze totali agenti sul sottodominio.

La *forza di volume totale* agente sul sottodominio è

$$\bar{\mathbf{F}}[\mathbf{D}'] := \int_{\mathbf{D}'} \bar{\mathbf{f}} d\mathcal{V} : \mathbf{T} \rightarrow \bar{\mathbf{P}}.$$

La *forza totale di superficie* agente sul sottodominio è

$$\bar{\Sigma}[\mathbf{D}'] := \int_{\partial_{\text{int}}\mathbf{D}'} \hat{\sigma}(\bar{\mathbf{n}}) d\mathcal{S} : \mathbf{T} \rightarrow \bar{\mathbf{P}}.$$

La *forza totale di carico* agente sul sottodominio è

$$\bar{\Sigma}[\mathbf{D}'] := \int_{\partial_{\text{est}} \mathbf{D}'} \bar{\gamma} d\mathcal{S} : \mathbf{T} \rightarrow \bar{\mathbf{P}}.$$

Il *momento totale delle forze di volume* agente sul sottodominio è

$$\bar{M}[\bar{f}][\mathbf{D}'] := \int_{\mathbf{D}'} (\bar{\mathbf{r}} \times f) d\mathcal{V} : \mathbf{T} \rightarrow \bar{\mathbf{P}}.$$

Il *momento totale delle forza di superficie* agente sul sottodominio è

$$\bar{M}[\hat{\sigma}][\mathbf{D}'] := \int_{\partial_{\text{int}} \mathbf{D}'} (\bar{\mathbf{r}} \times \hat{\sigma}(\bar{\mathbf{n}})) d\mathcal{S} : \mathbf{T} \rightarrow \bar{\mathbf{P}}.$$

Il *momento totale delle forze di carico* agente sul sottodominio è

$$\bar{M}[\bar{\gamma}][\mathbf{D}'] := \int_{\partial_{\text{est}} \mathbf{D}'} (\bar{\mathbf{r}} \times \bar{\gamma}) d\mathcal{S} : \mathbf{T} \rightarrow \bar{\mathbf{P}}. \square$$

Postuliamo dunque le equazioni generali della dinamica in forma integrale.

3.1.5 Assunzione. Supponiamo che, *per ogni* sottominio “sufficientemente regolare” $\mathbf{D}' \subset \mathbf{D}$, valgono le seguenti equazioni integrali:

1) *prima equazione cardinale*

$$\int_{\mathbf{D}'} \mu \bar{\mathbf{a}} d\mathcal{V} = \int_{\mathbf{D}'} \bar{f} dV + \int_{\partial_{\text{int}} \mathbf{D}'} \hat{\sigma}(\bar{\mathbf{n}}) d\mathcal{S} + \int_{\partial_{\text{est}} \mathbf{D}'} \bar{\gamma} d\mathcal{S};$$

2) *seconda equazione cardinale*

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{D}'} \mu \bar{\mathbf{r}} \times \bar{\mathbf{a}} d\mathcal{V} - D\mathbf{o} \times \int_{\mathbf{D}'} \mu \bar{\mathbf{v}} d\mathcal{V} &= \\ &= \int_{\mathbf{D}'} \bar{\mathbf{r}} \times \bar{f} dV + \int_{\partial_{\text{int}} \mathbf{D}'} \bar{\mathbf{r}} \times \hat{\sigma}(\bar{\mathbf{n}}) d\mathcal{S} + \int_{\partial_{\text{est}} \mathbf{D}'} \bar{\mathbf{r}} \times \bar{\gamma} d\mathcal{S}. \square \end{aligned}$$

3.1.6 Nota. Se il dominio $\mathbf{D}' \subset \mathbf{D}$ è interno, allora la prima equazione cardinale diventa

$$\int_{\mathbf{D}'} \mu \bar{\mathbf{a}} d\mathcal{V} = \int_{\mathbf{D}'} \bar{f} dV + \int_{\partial \mathbf{D}'} \hat{\sigma}(\bar{\mathbf{n}}) d\mathcal{S},$$

e la seconda equazione cardinale diventa

$$\int_{\mathbf{D}'} \mu \bar{\mathbf{r}} \times \bar{\mathbf{a}} d\mathcal{V} - D\mathbf{o} \times \int_{\mathbf{D}'} \mu \bar{\mathbf{v}} d\mathcal{V} = \int_{\mathbf{D}'} \bar{\mathbf{r}} \times \bar{f} dV + \int_{\partial \mathbf{D}'} \bar{\mathbf{r}} \times \hat{\sigma}(\bar{\mathbf{n}}) d\mathcal{S}. \square$$

3.1.7 Nota. Se il polo o è fisso o coincide con il centro di massa del sistema, allora la seconda equazione cardinale diventa

$$\int_{\mathbf{D}'} \mu \bar{\mathbf{r}} \times \bar{\mathbf{a}} dV = \int_{\mathbf{D}'} \bar{\mathbf{r}} \times \bar{\mathbf{f}} dV + \int_{\partial_{\text{int}} \mathbf{D}'} \bar{\mathbf{r}} \times \hat{\sigma}(\bar{\mathbf{n}}) dS + \int_{\partial_{\text{est}} \mathbf{D}'} \bar{\mathbf{r}} \times \bar{\boldsymbol{\gamma}} dS.$$

Se, inoltre, il sottodominio $\mathbf{D}' \subset \mathbf{D}$ è interno, allora la seconda equazione cardinale diventa

$$\int_{\mathbf{D}'} \mu \bar{\mathbf{r}} \times \bar{\mathbf{a}} dV = \int_{\mathbf{D}'} \bar{\mathbf{r}} \times \bar{\mathbf{f}} dV + \int_{\partial \mathbf{D}'} \bar{\mathbf{r}} \times \hat{\sigma}(\bar{\mathbf{n}}) dS. \square$$

3.1.8 Nota. In particolare, se $\mathbf{D}' = \mathbf{D}$, le equazioni precedenti si riferiscono a tutto il dominio del continuo.

Ribadiamo, però, che abbiamo postulato le precedenti equazioni per “ogni” sottodominio (“sufficientemente regolare”) e non solo per tutto il dominio. Dunque, abbiamo postulato “infinite” equazioni, coerentemente con il fatto che il sistema continuo ha infiniti gradi di libertà. \square

3.1.6 Linearità delle tensioni

3.1.6.1 Il teorema di Cauchy

Dimostriamo che la densità di forze di superficie è lineare rispetto al vettore normale alla superficie e che quindi essa è un tensore. Dimostriamo anche che questo tensore è simmetrico.

Vogliamo dimostrare che:

1) l'applicazione $\hat{\sigma}$ è lineare rispetto a \mathbf{P} , cioè l'applicazione $\hat{\sigma}$ può essere vista come un tensore

$$\hat{\sigma} : \mathbf{D} \rightarrow L(\bar{\mathbf{P}}, \bar{\mathbf{P}}) \simeq \bar{\mathbf{P}}^* \otimes \bar{\mathbf{P}};$$

2) il tensore $\hat{\sigma}$ è simmetrico.

Incominciamo a dimostrare la linearità di $\hat{\sigma}$.

Consideriamo una qualunque coppia $(t, p) \in \mathbf{D}$ e poniamo, per brevità di notazione,

$$\hat{\Sigma} \equiv \hat{\sigma}_{(t,p)}.$$

Ricordando come l'applicazione $\hat{\sigma}$ era stata definita a partire da $\hat{\tau}$, per dimostrare la linearità dell'applicazione $\hat{\Sigma}$, basterà dimostrare le seguenti due proprietà

$$\begin{aligned} \hat{\Sigma}(-\bar{\mathbf{n}}) &= -\hat{\Sigma}(\bar{\mathbf{n}}), & \forall \bar{\mathbf{n}} \in \bar{\mathbf{S}}, \\ \hat{\Sigma}(\bar{v}_1 + \bar{v}_2) &= \hat{\Sigma}(\bar{v}_1) + \hat{\Sigma}(\bar{v}_2), & \forall \bar{v}_1, \bar{v}_2 \in \bar{\mathbf{P}}. \end{aligned}$$

Dimostriamo la prima proprietà.

3.1.9 Teorema (*Teorema di Cauchy; prima parte.*). Sia $\bar{n} \in \bar{\mathbf{S}}$. Allora, abbiamo

$$\hat{\Sigma}(-\bar{n}) = -\hat{\Sigma}(\bar{n}).$$

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo la famiglia di sottodomini $\mathbf{D}_\lambda \subset \mathbf{D}$ dipendente dal parametro $0 < \lambda$ a forma di parallelepipedo retto, con un vertice nel punto $p \in \mathbf{P}$, con altezza $\lambda^2 \bar{n}$ e lati di base $\lambda \bar{n}_1, \lambda \bar{n}_2$, dove $\bar{n}_1, \bar{n}_2 \in \bar{\mathbf{P}}$ sono vettori tali che $(\bar{n}_1, \bar{n}_2, \bar{n})$ sia una base ortonormale (figura 1).

Dunque, quando λ tende a zero, il parallelepipedo \mathbf{D}_λ tende a collapsare al punto p .

La prima equazione cardinale per il sottodominio \mathbf{D}_λ può essere decomposta come segue

$$D\bar{Q}(\lambda) = \bar{F}(\lambda) + \bar{L}(\lambda) + \bar{B}(\lambda),$$

dove $D\bar{Q}(\lambda)$ è la derivata rispetto al tempo della quantità di moto, $\bar{F}(\lambda)$ è la risultante delle forze di volume, $\bar{L}(\lambda)$ è la risultante delle forze di superficie sulla superficie laterale del parallelepipedo, $\bar{B}(\lambda)$ è la risultante delle forze di superficie sulle basi del parallelepipedo.

Applicando il teorema della media ed approssimando le applicazioni $\mu_t, \bar{a}_t, \bar{f}_t, \hat{\sigma}_t$ con il loro valore in (p) , mediante il loro differenziale spaziale, possiamo scrivere, all'istante $t \in \mathbf{T}$,

$$\begin{aligned} D\bar{Q}(\lambda) &= \mu(t, p) \bar{a}(t, p) \lambda^4 + o_Q(\lambda^4) \\ \bar{F}(\lambda) &= \bar{f}(t, p) \lambda^4 + o_{\bar{F}}(\lambda^4) \\ \bar{L}(\lambda) &= (\hat{\Sigma}(n_1) + \hat{\Sigma}(-n_1) + \hat{\Sigma}(n_2) + \hat{\Sigma}(-n_2)) \lambda^3 + o_L(\lambda^3) \\ \bar{B}(\lambda) &= (\hat{\Sigma}(\bar{n}) + \hat{\Sigma}(-\bar{n})) \lambda^2 + o_{\bar{B}}(\lambda^2), \end{aligned}$$

dove i vari o indicano infinitesimi di ordine superiore rispetto alla loro variabile.

Dunque, quando λ tende a zero, i primi tre termini tendono a zero più velocemente dell'ultimo. Perciò, la prima equazione cardinale può essere scritta come segue

$$(\hat{\Sigma}(\bar{n}) + \hat{\Sigma}(-\bar{n})) \lambda^2 + o(\lambda^2) = 0, \quad \forall \lambda > 0,$$

dove o indica un infinitesimo di ordine superiore rispetto alla variabile.

Allora, per l'arbitrarietà di λ , otteniamo

$$\hat{\Sigma}(\bar{n}) + \hat{\Sigma}(-\bar{n}) = 0,$$

cioè

$$\hat{\Sigma}(\bar{n}) = -\hat{\Sigma}(-\bar{n}). \text{ QED}$$

Dimostriamo ora l'additività di $\hat{\Sigma}$.

Per questo scopo abbiamo bisogno di un'osservazione elementare di geometria euclidea piana.

3.1.10 Lemma. Sia T un triangolo generato dalla coppia di vettori (\bar{u}_1, \bar{u}_2) .

Siano \bar{v}_1, \bar{v}_2 i vettori ortogonali ad \bar{u}_1 ed \bar{u}_2 , di lunghezze pari a quelle di \bar{u}_1 ed \bar{u}_2 , rispettivamente, e rivolti verso l'esterno di T .

Allora, $\bar{v}_3 \equiv \bar{v}_1 + \bar{v}_2$ è ortogonale ad $\bar{u}_3 \equiv \bar{u}_1 + \bar{u}_2$ e rivolto verso l'interno di T (figura 2).

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo

$$\text{ang}(\bar{u}_1, \bar{u}_2) = \text{ang}(\bar{v}_1, \bar{v}_2),$$

perché $\bar{v}_1 \cdot \bar{u}_1 = 0$ ed $\bar{v}_2 \cdot \bar{u}_2 = 0$.

Inoltre, abbiamo

$$\|\bar{u}_1\| = \|\bar{v}_1\|, \quad \|\bar{u}_2\| = \|\bar{v}_2\|.$$

Perciò, i triangoli generati da (\bar{u}_1, \bar{u}_2) e da (\bar{v}_1, \bar{v}_2) sono congruenti ed il secondo è ottenuto dal primo mediante una rotazione di $\pi/2$. QED

3.1.11 Teorema (*Teorema di Cauchy; seconda parte.*). *Sia $v_1, v_2 \in \bar{\mathbf{P}}$. Allora, abbiamo*

$$\hat{\Sigma}(v_1 + v_2) = \hat{\Sigma}(v_1) + \hat{\Sigma}(v_2).$$

DIMOSTRAZIONE. Se \bar{v}_1, \bar{v}_2 sono dipendenti, allora il teorema si riduce a casi già dimostrati. Siano, dunque, \bar{v}_1, \bar{v}_2 indipendenti.

Consideriamo la famiglia di sottodomini $\mathbf{D}_\lambda \subset \mathbf{D}$ dipendente dal parametro $0 < \lambda$ a forma di parallelepipedo retto a base triangolare, con un vertice nel punto $p \in \mathbf{P}$, con altezza $\lambda \bar{n}$ e triangolo di base generato da $(\lambda^2 \bar{u}_1, \lambda^2 \bar{u}_2)$, dove $\bar{n} \in \bar{\mathbf{P}}$ è un versore ortogonale a \bar{v}_1 e \bar{v}_2 e dove $\bar{u}_1, \bar{u}_2 \in \bar{\mathbf{P}}$ sono vettori ortogonali a \bar{v}_1 e \bar{v}_2 e di lunghezza pari a \bar{v}_1 e \bar{v}_2 , rispettivamente, e tali che le coppie (\bar{v}_1, \bar{u}_1) , (\bar{v}_2, \bar{u}_2) abbiano la stessa orientazione (figura 3).

Poniamo $\bar{u}_3 \equiv \bar{u}_1 + \bar{u}_2$, $\bar{v}_3 \equiv \bar{v}_1 + \bar{v}_2$ ed indichiamo con \bar{n}_i i versori di \bar{v}_i .

Dunque, quando λ tende a zero, il parallelepipedo \mathbf{D}_λ tende a collapsare al punto p .

La prima equazione cardinale per il sottodominio \mathbf{D}_λ può essere decomposta come segue

$$D\bar{Q}(\lambda) = \bar{F}(\lambda) + \bar{L}(\lambda) + \bar{B}(\lambda),$$

dove $D\bar{Q}(\lambda)$ è la derivata rispetto al tempo della quantità di moto, $\bar{F}(\lambda)$ è la risultante delle forze di volume, $\bar{L}(\lambda)$ è la risultante delle forze di superficie sulla superficie laterale del parallelepipedo, $\bar{B}(\lambda)$ è la risultante delle forze di superficie sulle basi del parallelepipedo.

Applicando il teorema della media ed approssimando le applicazioni $\mu_t, \bar{\mathbf{a}}_t, \bar{f}_t, \hat{\sigma}_t$, mediante il loro differenziale spaziale, con il loro valore in p , possiamo scrivere, all'istante $t \in \mathbf{T}$,

$$\begin{aligned} D\bar{Q}(\lambda) &= \mu(t, p) \bar{\mathbf{a}}(t, p) v \lambda^5 + o_Q(\lambda^5) \\ \bar{F}(\lambda) &= \bar{f}(t, p) v \lambda^5 + o_F(\lambda^5) \\ \bar{L}(\lambda) &= (\hat{\Sigma}(\bar{n}_1) s_1 + \hat{\Sigma}(\bar{n}_2) s_2 + \hat{\Sigma}(-\bar{n}_3) s_3) \lambda^3 + o_L(\lambda^3) \\ \bar{B}(\lambda) &= (\hat{\Sigma}(\bar{n}) + \hat{\Sigma}(-\bar{n})) b \lambda^4 + o_{B_{\bar{n}}}(\lambda^4), \end{aligned}$$

dove v, s_i, b indicano il volume, le aree laterali e l'area di base del parallelepipedo \mathbf{D}_1 e dove i vari o indicano infinitesimi di ordine superiore rispetto alla loro variabile.

Dunque, quando λ tende a zero, i primi due termini e l'ultimo termine tendono a zero più velocemente del terzo termine. Perciò, ricordando che

$$s_i = \|\bar{v}_i\|, \quad \bar{v}_i = \|\bar{v}_i\| \bar{n}_i,$$

l'equazione cardinale può esse scritta come segue

$$(\hat{\Sigma}(v_1) + \hat{\Sigma}(v_2) + \hat{\Sigma}(-v_3)) \lambda^3 + o(\lambda^3) = 0, \quad \forall \lambda > 0,$$

dove o indica un infinitesimo di ordine superiore rispetto alla variabile.

Allora, per l'arbitrarietà di λ , otteniamo

$$\hat{\Sigma}(\bar{v}_1) + \hat{\Sigma}(\bar{v}_2) + \hat{\Sigma}(-\bar{v}_3) = 0,$$

cioè

$$\hat{\Sigma}(\bar{v}_1) + \hat{\Sigma}(\bar{v}_2) = -\hat{\Sigma}(-\bar{v}_3) = \hat{\Sigma}(\bar{v}_3) = \hat{\Sigma}(\bar{v}_1 + \bar{v}_2). \text{ QED}$$

Infine, vogliamo dimostrare che il tensore

$$\hat{\sigma} : \mathbf{D} \rightarrow \bar{\mathbf{P}}^* \otimes \bar{\mathbf{P}}$$

è simmetrico.

Come prima, consideriamo una qualunque coppia $(t, p) \in \mathbf{D}$ e poniamo, per brevità di notazione

$$\hat{\Sigma} \equiv \sigma_{(t,p)}.$$

3.1.12 Teorema (*Teorema di Cauchy; terza parte.*). Per ogni $\bar{u}, \bar{v} \in \bar{\mathbf{P}}$, abbiamo

$$\hat{\Sigma}(\bar{u}) \cdot \bar{v} = \hat{\Sigma}(\bar{v}) \cdot \bar{u}.$$

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo la famiglia di sottodomini $\mathbf{D}_\lambda \subset \mathbf{D}$ dipendente dal parametro $0 < \lambda$ a forma di cubo, con un vertice nel punto $p \in \mathbf{P}$ e con lati $\lambda\bar{e}_1, \lambda\bar{e}_2, \lambda\bar{e}_3$, dove $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ è una base ortonormale (figura 4).

Dunque, quando λ tende a zero, il parallelepipedo \mathbf{D}_λ tende a collapsare al punto p .

La seconda equazione cardinale per il sottodominio \mathbf{D}_λ , relativamente al polo $o := p$, può essere decomposta come segue

$$D\bar{K}(\lambda) = \bar{\lambda} + \bar{N}_{\text{int}}(\lambda) + \bar{N}_{\text{est}}(\lambda),$$

dove $D\bar{K}(\lambda)$ è la derivata rispetto al tempo del momento della quantità di moto, $\bar{\lambda}$ è la risultante dei momenti delle forze di volume, $\bar{N}_{\text{int}}(\lambda)$ è la risultante dei momenti delle forze di superficie relativamente alle tre facce che toccano p ed $\bar{N}_{\text{est}}(\lambda)$ è la risultante dei momenti delle forze di superficie relativamente alle tre facce che non toccano p .

Applicando il teorema della media ed approssimando le applicazioni $\mu_t, \bar{\mathbf{a}}_t, \bar{\mathbf{f}}_t, \hat{\sigma}_t, \bar{\mathbf{r}}_t$, mediante il loro differenziale spaziale, con il loro valore in p , possiamo scrivere, all'istante $t \in \mathbf{T}$,

$$\begin{aligned} D\bar{K}(\lambda) &= \mu(t, p) (o - o) \times a(t, p) \lambda^3 + o_K(\lambda^3) = 0 + o_K(\lambda^3) \\ \bar{\lambda} &= (o - o) \times f(t, p) \lambda^3 + o_M(\lambda^3) = 0 + o_M(\lambda^3) \\ \bar{N}_{\text{int}}(\lambda) &= (o - o) \times (\hat{\Sigma}_1^i e_i + \hat{\Sigma}_2^i e_i + \hat{\Sigma}_3^i e_i) \lambda^2 + o_N(\lambda^3) \\ &= 0 + o_N(\lambda^3), \end{aligned}$$

dove i vari o indicano infinitesimi di ordine superiore rispetto alla loro variabile.

Inoltre, applicando il teorema della media ed approssimando le applicazioni $\hat{\sigma}_t, \bar{\mathbf{r}}_t$, mediante il loro differenziale spaziale, con il loro valore nei punti $p + \lambda e_1, p + \lambda e_2, p + \lambda e_3$, rispettivamente per le tre facce, possiamo scrivere, all'istante $t \in \mathbf{T}$,

$$\begin{aligned} \bar{N}_{\text{est}}(\lambda) &= (e_1 \times (\hat{\Sigma}_1^2 e_2 + \hat{\Sigma}_1^3 e_3) + e_2 \times (\hat{\Sigma}_2^1 e_1 + \hat{\Sigma}_2^3 e_3) + e_3 \times (\hat{\Sigma}_3^1 e_1 + \hat{\Sigma}_3^2 e_2)) \lambda^3 + o_N(\lambda^3) \\ &= ((\hat{\Sigma}_2^3 - \hat{\Sigma}_3^2) e_1 + (\hat{\Sigma}_3^1 - \hat{\Sigma}_1^3) e_2 + (\hat{\Sigma}_1^2 - \hat{\Sigma}_2^1) e_3) \lambda^3 + o_N(\lambda^3), \end{aligned}$$

dove i vari o indicano infinitesimi di ordine superiore rispetto alla loro variabile.

Perciò, la seconda equazione cardinale può esse scritta come segue

$$((\hat{\Sigma}_2^3 - \hat{\Sigma}_3^2) e_1 + (\hat{\Sigma}_3^1 - \hat{\Sigma}_1^3) e_2 + (\hat{\Sigma}_1^2 - \hat{\Sigma}_2^1) e_3) \lambda^3 + o(\lambda^3) = 0, \quad \forall \lambda > 0,$$

dove o indica un infinitesimo di ordine superiore rispetto alla variabile.

Allora, per l'arbitrarietà di λ , otteniamo

$$\hat{\Sigma}_2^3 = \hat{\Sigma}_3^2, \quad \hat{\Sigma}_3^1 = \hat{\Sigma}_1^3, \quad \hat{\Sigma}_1^2 = \hat{\Sigma}_2^1. \text{ QED}$$

3.1.6.2 Relazione tra carico e tensione sul bordo esterno

Aggiungiamo un ulteriore risultato importante che può essere dimostrato in modo analogo al primo passo della linearità.

3.1.13 Teorema. *La densità di forza superficiale $\hat{\sigma}(\bar{n})$ relativa al bordo $\partial\mathbf{D}$ del dominio \mathbf{D} è uguale al carico $\bar{\gamma}$.*

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione può essere ottenuta ragionando in modo analogo alla prima parte del teorema di Cauchy, considerando una famiglia di sottodomini che tende al bordo esterno del dominio in modo che due facce siano “parallele” al bordo e la relativa distanza tenda a zero più velocemente dei lati di tali facce. QED

3.1.6.3 Linearità delle tensioni

Il fatto che gli sforzi superficiali siano descritti da un'endomorfismo lineare simmetrico ha importanti conseguenze che derivano dal significato fisico delle tensioni e dalle regole generali sui tensori.

Dunque, tutti i risultati di questa sezione hanno un analogo (*mutatis mutandis*) per altri tensori (come, per esempio il tensore d'inerzia, il tensore delle deformazioni infinitesime e così via).

3.1.14 Corollario. Possiamo scrivere

$$\hat{\sigma} : \mathbf{D} \rightarrow \text{End}(\bar{\mathbf{P}}) \simeq \bar{\mathbf{P}}^* \otimes \bar{\mathbf{P}}. \square$$

3.1.15 Definizione. Il tensore $\hat{\sigma}$ è chiamato *tensore delle tensioni*. \square

3.1.16 Nota. La linearità delle tensioni implica i seguenti fatti.

a) Per ogni versore $\bar{n} \in \mathbf{S}$, abbiamo

$$\hat{\sigma}(-\bar{n}) = -\hat{\sigma}(\bar{n}).$$

Cioè, lo sforzo che la regione $-$ esercita sulla regione $+$ attraverso una superficie orientata, che ha \bar{n} come normale orientata, ha la stessa direzione, lo stesso modulo e verso opposto dello sforzo che la regione $+$ esercita sulla regione $-$ attraverso la stessa superficie.

In sostanza, questo è il *principio di azione e reazione* per gli sforzi.

b) Se conosciamo gli sforzi $\hat{\sigma}(\bar{n}')$ e $\hat{\sigma}(\bar{n}'')$, relativi alle facce (orientate) ortogonali ai versori $\bar{n}', \bar{n}'' \in \mathbf{S}$, otteniamo lo sforzo relativo alla faccia (orientata) ortogonale al versore $\bar{n} \equiv \frac{\bar{n}' + \bar{n}''}{\|\bar{n}' + \bar{n}''\|}$, mediante la formula

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}(\bar{n}) &= \hat{\sigma}\left(\frac{\bar{n}' + \bar{n}''}{\|\bar{n}' + \bar{n}''\|}\right) \\ &= \frac{1}{\|\bar{n}' + \bar{n}''\|} \hat{\sigma}(\bar{n}' + \bar{n}'') \\ &= \frac{1}{\|\bar{n}' + \bar{n}''\|} \hat{\sigma}(\bar{n}') + \frac{1}{\|\bar{n}' + \bar{n}''\|} \hat{\sigma}(\bar{n}'').\end{aligned}$$

c) Più in generale, se conosciamo gli sforzi relativi alle facce (orientate) ortogonali a tre versori $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3 \in \mathbf{S}$ ortogonali fra loro (i quali costituiscono una base ortonormale), otteniamo lo sforzo relativo alla faccia (orientata) ortogonale ad un qualunque altro versore $\bar{n} = n^1 \bar{e}_1 + n^2 \bar{e}_2 + n^3 \bar{e}_3$, mediante la formula

$$\hat{\sigma}(\bar{n}) = n^1 \hat{\sigma}(\bar{e}_1) + n^2 \hat{\sigma}(\bar{e}_2) + n^3 \hat{\sigma}(\bar{e}_3).$$

Dunque, per conoscere lo stato di tensione in un punto, basta conoscere i tre sforzi relativi a tre facce in tale punto, orientate ed ortogonali fra loro.

Quindi, la linearità permette di ridurre un numero infinito di misure vettoriali a solo tre misure vettoriali! Tutti gli altri sforzi possono essere ottenuti da queste tre con un calcolo semplice. \square

3.1.17 Nota. La simmetria delle tensioni dice che, per ogni coppia di versori $\bar{n}, \bar{n}' \in \mathbf{S}$, la componente lungo \bar{n}' dello sforzo relativo alla faccia (orientata) ortogonale ad \bar{n} è uguale alla componente lungo \bar{n} dello sforzo relativo alla faccia (orientata) ortogonale ad \bar{n}' .

Dunque, per la linearità sarebbero sufficienti 3 misure vettoriali, ossia 9 misure scalari, per determinare lo stato di tensione in un punto. Ora, per l'ulteriore proprietà di simmetria, sono sufficienti 6 misure scalari, per determinare lo stato di tensione in un punto. \square

3.1.18 Nota. In accordo con le regole generali sui tensori, possiamo esprimere il tensore delle tensioni anche mediante la forma bilineare associata

$$\sigma \in L^2(\bar{\mathbf{P}}, \mathbb{R}) \simeq \bar{\mathbf{P}}^* \otimes \bar{\mathbf{P}}^*,$$

definita dall'uguaglianza

$$\sigma(\bar{n}, \bar{n}') := (\sigma(\bar{n})) \cdot \bar{n}',$$

per ogni coppia di versori \bar{n} e \bar{n}' .

Dunque, la forma bilineare σ associa ad ogni coppia di versori $\bar{n}, \bar{n}' \in \mathbf{S}$, la componente lungo \bar{n}' dello sforzo relativo alla faccia (orientata) ortogonale al versore \bar{n} .

Tale forma bilineare è simmetrica. \square

3.1.19 Nota. In accordo con le regole generali sui tensori simmetrici, possiamo esprimere il tensore delle tensioni anche mediante la forma quadratica associata

$$\sigma^\square : \bar{\mathbf{P}} \rightarrow \mathbb{R},$$

definita dall'uguaglianza

$$\sigma^\square(\bar{n}) = \sigma(\bar{n}, \bar{n}) = (\hat{\sigma}(\bar{n})) \cdot \bar{n},$$

per ogni versore $\bar{n} \in \mathbf{S}$.

Dunque, la forma quadratica σ^\square associa ad ogni versore $\bar{n} \in \mathbf{S}$ la componente dello sforzo normale relativo alla faccia (orientata) ortogonale ad \bar{n} .

Pertanto, se conosciamo la forma quadratica σ^\square , allora conosciamo le componenti degli sforzi normali relativi a tutte le facce.

Ma, la conoscenza di tutte le componenti degli sforzi normali relativi a tutte le facce implica anche la conoscenza degli sforzi di taglio relativi a tutte le facce. Infatti, vale la formula (detta di “polarizzazione”)

$$\sigma(\bar{n}, \bar{n}') = \sigma^\square\left(\frac{\bar{n} + \bar{n}'}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{2}(\sigma^\square(\bar{n}) + \sigma^\square(\bar{n}')),$$

per ogni coppia di versori ortogonali fra loro $\bar{n}, \bar{n}' \in \mathbf{S}$.

In altre parole, la componente lungo \bar{n}' dello sforzo relativo alla faccia (orientata) ortogonale al versore \bar{n} è data dallo sforzo relativo alla faccia (orientata) ortogonale al versore bisettore $(\bar{n} + \bar{n}')/\sqrt{2}$ meno un mezzo la somma delle componenti degli sforzi normali relativi alle facce (orientate) ortogonali ai versori \bar{n} ed \bar{n}' .

DIMOSTRAZIONE. La formula di polarizzazione è un caso particolare della formula generale

$$\sigma(\bar{u}, \bar{v}) = \frac{1}{2}(\sigma^\square(\bar{u} + \bar{v}) - \sigma^\square(\bar{u}) - \sigma^\square(\bar{v})), \quad \bar{u}, \bar{v} \in \bar{\mathbf{P}}. \text{ QED}$$

3.1.6.4 Faccie principali ed autovalori

Possiamo applicare al tensore delle tensioni i concetti di autovalore ed autovettore validi per ogni endomorfismo ed i risultati del teorema spettrale validi per ogni endomorfismo simmetrico.

3.1.20 Definizione. La faccia (orientata) ortogonale ad un versore \bar{n} è detta *principale* se il relativo sforzo di taglio è nullo. \square

3.1.21 Proposizione. Una faccia (orientata) è principale se e solo se è ortogonale ad un autovettore di $\hat{\sigma}$.

In tal caso, la componente dello sforzo normale è il corrispondente autovalore.

DIMOSTRAZIONE. Lo sforzo di taglio è nullo se e solo se $\hat{\sigma}(\bar{n})$ è parallelo ad \bar{n} , cioè se e solo se vale una formula del tipo

$$\hat{\sigma}(\bar{n}) = \lambda \bar{n}, \quad \text{con} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

In tal caso, abbiamo

$$(\hat{\sigma}(\bar{n})) \cdot \bar{n} = \lambda \bar{n} \cdot \bar{n} = \lambda \mathbf{1} = \lambda. \text{ QED}$$

3.1.22 Nota. Se una faccia orientata è principale, allora la faccia con la stessa giacitura ed orientazione opposta è anche principale. \square

3.1.23 Proposizione. Il tensore delle tensioni ammette tre autovalori reali.

Possono verificarsi i seguenti tre casi.

1) I tre autovalori sono distinti. In tal caso, esistono solo tre facce principali ortogonali tra loro. Queste facce principali sono le tre facce ortogonali ai tre assi principali corrispondenti ai tre autovalori.

2) Due autovalori sono uguali ed il terzo è distinto dai primi due. In tal caso, abbiamo infinite facce principali. Queste facce principali sono la faccia ortogonale al terzo asse principale e le facce ortogonali a ciascuno degli infiniti assi del piano generato dai primi due assi principali (che sono ortogonali al terzo asse principale).

3) I tre autovalori sono uguali tra loro. In tal caso, tutte le facce sono principali. In questo caso il tensore delle tensioni è isotropo e possiamo applicare il teorema di Pascal.

DIMOSTRAZIONE. Segue immediatamente dal teorema spettrale. QED

3.1.24 Nota. Per trovare gli autovalori λ del tensore delle tensioni occorre trovare le radici del polinomio caratteristico

$$\det(\hat{\sigma} - \lambda \mathbf{1}) = 0.$$

Dato un autovalore λ , per trovare il corrispondente autovettore \bar{u} occorre risolvere l'equazione vettoriale

$$\hat{\sigma}(\bar{u}) = \lambda \bar{u}. \square$$

3.1.25 Nota. Se gli autovalori sono distinti e se due assi principali sono noti, allora il terzo asse principale è l'asse ortogonale ai primi due. \square

3.1.26 Nota. Per quanto riguarda i massimi sforzi di pressione (in valore assoluto) e trazione, valgono i seguenti casi.

1) I tre autovalori sono positivi (o nulli). Allora, gli sforzi normali relativi a tutte le infinite facce sono di trazione. Inoltre gli sforzi di trazione massimo e minimo (relativamente a tutte le infinite facce) sono quelli relativi alle due facce principali con autovalore massimo e minimo.

2) I tre autovalori sono negativi (o nulli). Allora, gli sforzi normali relativi a tutte le infinite facce sono di pressione. Inoltre, gli sforzi di pressione massimo e minimo, in valore assoluto, (relativamente a tutte le infinite facce) sono quelli relativi alle due facce principali con autovalore massimo e minimo, in valore assoluto.

3) Almeno un autovalore è positivo ed almeno un autovalore è negativo. Allora, gli sforzi normali relativi a tutte le infinite facce sono di trazione o di pressione. Inoltre, lo sforzo di trazione massimo (relativamente a tutte le infinite facce) è quello relativo alla faccia principale con autovalore massimo e lo sforzo di pressione massimo, in valore assoluto, (relativamente a tutte le infinite facce) è quello relativo alla faccia principale con autovalore minimo. \square

3.1.6.5 Sforzi di taglio

Possiamo determinare le facce il cui sforzo normale è nullo.

3.1.27 Nota. Le facce il cui sforzo normale è nullo sono tutte e solo le facce ortogonali ai versori \bar{n} che soddisfano l'equazione algebrica (non lineare)

$$\hat{\sigma}(\bar{n}) \cdot \bar{n} = 0.$$

3.1.28 Esempio. Supponiamo che gli autovalori di $\hat{\sigma}$ siano $\lambda_1 = -\lambda_2 \neq 0$ e $\lambda_3 = 0$.

Allora, le facce il cui sforzo normale è nullo sono infinite. Queste sono le facce ortogonali agli assi del piano generato dal terzo autovettore e dall'asse bisettore dei due assi principali associati ai primi due autovalori.

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo un vettore $0 \neq \bar{u} \in \bar{\mathbf{P}}$ e decomponiamolo secondo una base ortogonale di autovettori, scrivendo

$$\bar{u} = u^1 \bar{e}_1 + u^2 \bar{e}_2 + u^3 \bar{e}_3.$$

Allora, l'equazione $\hat{\sigma}(\bar{u}, \bar{u}) = 0$ diventa

$$\lambda_1 (u^1)^2 + \lambda_2 (u^2)^2 + \lambda_3 (u^3)^2 = 0,$$

ossia

$$\lambda_1 ((u^1)^2 - (u^2)^2) = 0,$$

ossia

$$(u^1)^2 = (u^2)^2.$$

Quindi, il vettore \bar{u} è soluzione dell'equazione $\hat{\sigma}(\bar{u}, \bar{u}) = 0$ se e solo se le sue componenti sono del tipo

$$u^1 = \pm u^2 \in \mathbb{R}, \quad u^3 \in \mathbb{R}. \text{ QED}$$

3.1.6.6 Rappresentazione matriciale del tensore delle tensioni

Il tensore delle tensioni ammette una rappresentazione matriciale conformemente alle regole generali.

Consideriamo una base (\bar{b}_i) e la sua duale $(\underline{\beta}^i)$.

In particolare, consideriamo una base ortonormale (\bar{e}_i) e la sua duale (\underline{e}^i) .

3.1.29 Proposizione. Conformemente alle regole generali sulla rappresentazione matriciale dei tensori, le matrici dei tensori $\hat{\sigma}$ e $\underline{\sigma}$ nella base (\bar{b}_i) sono

$$\sigma_j^i = \underline{\beta}^i(\hat{\sigma}(\bar{b}_j)) \quad \text{e} \quad \sigma_{ij} = \underline{\sigma}(\bar{b}_i, \bar{b}_j) = (\hat{\sigma}(\bar{b}_i)) \cdot \bar{b}_j. \quad \square$$

3.1.30 Corollario. Nella base ortonormale (\bar{e}_i) abbiamo

$$\sigma_j^i = \sigma_{ij} = (\hat{\sigma}(\bar{e}_i)) \cdot \bar{e}_j.$$

Pertanto,

- ogni elemento diagonale σ_j^i , con $i = 1, 2, 3$, è uguale alla componente dello sforzo normale relativamente alla faccia (orientata) ortogonale al versore \bar{e}_i ;

- ogni elemento trasversale σ_j^i , con $i \neq j$, ed $i, j = 1, 2, 3$, è uguale alla componente lungo \bar{e}_i dello sforzo (di taglio) relativo alla faccia ortogonale al versore \bar{e}_j ed è anche uguale (per la simmetria di $\hat{\sigma}$) alla componente lungo \bar{e}_j dello sforzo (di taglio) relativo alla faccia ortogonale al versore \bar{e}_i . \square

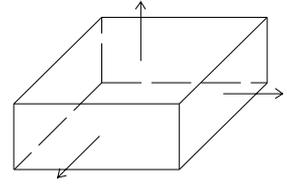
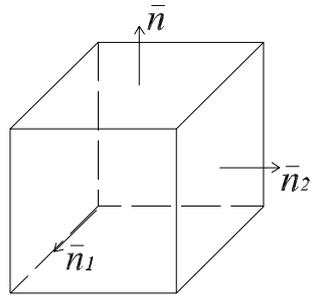


figura 1

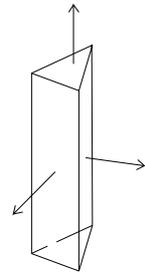
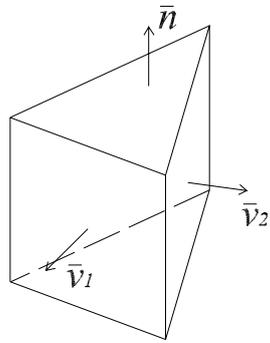


figura 2

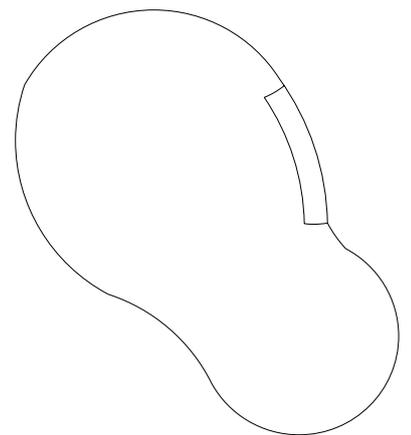
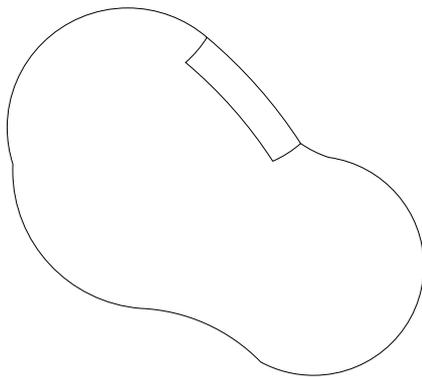


figura 3

3.1.7 Equazioni di moto in forma differenziale

Riscriviamo le equazioni fondamentali della dinamica in forma differenziale.

3.1.31 Teorema. *La prima equazione cardinale in forma integrale*

$$\int_{D'} \mu \bar{a} dV = \int_{D'} \bar{f} dV + \int_{\partial D'} \hat{\sigma}(\bar{n}) dS,$$

valida per ogni sottodominio interno “sufficientemente regolare” $D' \subset D$, è equivalente all’equazione di moto in forma differenziale

$$\mu \bar{a} = \bar{f} + \operatorname{div} \bar{\sigma}.$$

DIMOSTRAZIONE. Per ogni sottodominio interno “sufficientemente regolare” $D' \subset D$, la prima equazione cardinale è

$$\int_{D'} \mu \bar{a} dV = \int_{D'} \bar{f} dV + \int_{\partial_{\text{int}} D'} \hat{\sigma}(\bar{n}) dS.$$

Tenendo conto del teorema di Gauss e ricordando che σ è un tensore (per il teorema di Cauchy), possiamo esprimere la precedente equazione tramite integrali di volume solamente come segue

$$\int_{D'} \mu \bar{a} dV = \int_{D'} \bar{f} dV + \int_{D'} \operatorname{div} \hat{\sigma} dV.$$

Allora, gli integrali $\int_{D'} \mu \bar{a} dV$ e $\int_{D'} (\bar{f} + \operatorname{div} \hat{\sigma}) dV$ sono uguali per ogni sottodominio “sufficientemente regolare” $D' \subset D$ se e solo se le funzioni integrande sono uguali su tutto il dominio. QED

3.1.32 Proposizione. L’espressione dell’equazione di moto in un qualunque sistema di coordinate è

$$\mu \delta^2 C^i = f^i + \partial_j \sigma^{ji} + \Gamma_j^j{}_h \sigma^{hi} + \Gamma_j^i{}_h \sigma^{jh}.$$

In particolare, l’espressione dell’equazione di moto in un sistema di coordinate cartesiane è

$$\mu \delta^2 C^i = f^i + \partial_j \sigma^{ji}. \square$$

3.1.33 Nota. Possiamo interpretare intuitivamente l’equazione di moto

$$\mu \bar{a} = \bar{f} + \operatorname{div} \bar{\sigma}$$

nel modo seguente.

Consideriamo un istante $t \in \mathbf{T}$ ed un punto $p \in D_t \subset \mathbf{P}$. Consideriamo poi una base ortonormale $(\bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{e}_z)$ applicata in p ed il volumetto di lato infinitesimo l generato da tale base.

Moltiplicando entrambi i membri dell’equazione di moto valutata in (t, p) otteniamo l’uguaglianza

$$\mu(t, p) l^3 \bar{a}(t, p) = \bar{f}(t, p) l^3 + \operatorname{div} \bar{\sigma}(t, p) l^3.$$

Il prodotto $\mu(t, p) l^3$ approssima la massa m del volumetto con un errore che è un infinitesimo di ordine superiore ad l^3 .

Il prodotto $\bar{f}(t, p) l^3$ approssima la risultante delle forze di volume $\bar{F}(t)$ applicate al volumetto all'istante t con un errore che è un infinitesimo di ordine superiore ad l^3 .

Il prodotto $\text{div } \bar{\sigma}(t, p) l^3$ approssima la risultante delle forze di superficie $\bar{\Sigma}(t)$ applicate al bordo del volumetto all'istante t con un errore che è un infinitesimo di ordine superiore ad l . Infatti, la risultante degli sforzi sulle 6 facce del volumetto è data, a meno di infinitesimi di ordine superiore ad l , da

$$\begin{aligned} \bar{\Sigma}(t) &= \hat{\sigma}(t, p)(-\bar{e}_x) l^2 + (\hat{\sigma}(t, p) + \partial_x \hat{\sigma}(t, p) l)(\bar{e}_x) l^2 \\ &\quad + \hat{\sigma}(t, p)(-\bar{e}_y) l^2 + (\hat{\sigma}(t, p) + \partial_y \hat{\sigma}(t, p) l)(\bar{e}_y) l^2 \\ &\quad + \hat{\sigma}(t, p)(-\bar{e}_z) l^2 + (\hat{\sigma}(t, p) + \partial_z \hat{\sigma}(t, p) l)(\bar{e}_z) l^2 \\ &= \partial_x \hat{\sigma}(t, p)(\bar{e}_x) l^3 + \partial_y \hat{\sigma}(t, p)(\bar{e}_y) l^3 + \partial_z \hat{\sigma}(t, p)(\bar{e}_z) l^3 \\ &= (\partial_x \sigma_x^x(t, p) + \partial_y \sigma_y^x(t, p) + \partial_z \sigma_z^x(t, p)) \bar{e}_x l^3 \\ &\quad + (\partial_x \sigma_x^y(t, p) + \partial_y \sigma_y^y(t, p) + \partial_z \sigma_z^y(t, p)) \bar{e}_y l^3 \\ &\quad + (\partial_x \sigma_x^z(t, p) + \partial_y \sigma_y^z(t, p) + \partial_z \sigma_z^z(t, p)) \bar{e}_z l^3 \\ &= \text{div } \bar{\sigma}(t, p) l^3. \end{aligned}$$

Dunque, con un errore che tende a zero quando il lato del volumetto tende a zero, possiamo scrivere l'equazione

$$m \bar{a}(t, p) = \bar{F}(t) + \bar{\Sigma}(t),$$

la quale dice che il prodotto della massa del volumetto per la sua accelerazione uguaglia la risultante delle forze applicate al volumetto. \square

3.1.34 Nota. Il *problema fondamentale della dinamica* dei continui consiste nel determinare

- il moto,
- la densità di massa,
- il tensore delle tensioni,

quando siano noti

- la densità delle forze di volume,
- le condizioni iniziali e le condizioni al contorno.

Dunque, abbiamo

- 3 incognite scalari del moto,
- 1 incognita scalare della densità di massa,
- 6 incognite scalari del tensore delle tensioni.

D'altra parte,

- l'equazione di moto ha 3 componenti scalari,
- l'equazione di continuità ha 1 componente scalare.

Queste equazioni sono *universali*, cioè hanno la stessa forma per tutti i continui.

Per completare il sistema di equazioni necessarie per risolvere il nostro problema occorrerà postulare anche un'altra equazione che coinvolga il tensore delle tensioni. Tale equazione prende il nome di *equazione costitutiva*. Essa varia da continuo a continuo ed esprime le proprietà meccaniche caratteristiche del materiale costituente il continuo.

Osserviamo che possiamo associare

- l'equazione di moto con il moto,
- l'equazione di continuità con la densità di massa,
- l'equazione costitutiva con il tensore delle tensioni.

Però queste equazioni costituiscono, in generale, un sistema accoppiato. \square

3.1.8 Statica

Vediamo come si riducono le equazioni della dinamica nel caso statico.

Supponiamo, come caso particolare, che il moto del continuo sia *fermo*, ossia che, per ogni $s \in \mathbf{T}$, $(t, p) \in \mathbf{D}$,

$$C(s; t, p) = p, \quad \text{ossia, equivalentemente,} \quad \bar{\mathbf{S}}(s; t, p) = 0.$$

Supponiamo anche che il polo o sia fermo.

3.1.35 Teorema. *Nel caso statico le equazioni della dinamica in forma integrale diventano:*

1) equazione di continuità

$$\delta\mu = \partial_0\mu = 0,$$

2) prima equazione cardinale

$$\int_{\mathbf{D}'} \bar{\mathbf{f}} dV + \int_{\partial_{\text{int}} \mathbf{D}'} \hat{\sigma}(\bar{\mathbf{n}}) d\mathcal{S} + \int_{\partial_{\text{est}} \mathbf{D}'} \bar{\boldsymbol{\gamma}} d\mathcal{S} = 0;$$

3) seconda equazione cardinale

$$\int_{\mathbf{D}'} \bar{\mathbf{r}} \times \bar{\mathbf{f}} dV + \int_{\partial_{\text{int}} \mathbf{D}'} \bar{\mathbf{r}} \times \hat{\sigma}(\bar{\mathbf{n}}) d\mathcal{S} + \int_{\partial_{\text{int}} \mathbf{D}'} \bar{\mathbf{r}} \times \bar{\boldsymbol{\gamma}} d\mathcal{S} = 0.$$

Nel caso statico, l'equazione di moto diventa l'equazione della statica:

$$\bar{\mathbf{f}} + \text{div } \bar{\boldsymbol{\sigma}} = 0,$$

ossia, in un sistema di coordinate curvilineo,

$$f^i + \partial_j \sigma^{ji} + \Gamma_j^j{}_h \sigma^{hi} + \Gamma_j^i{}_h \sigma^{jh} = 0,$$

ossia, in un sistema di coordinate cartesiano,

$$f^i + \partial_j \sigma^{ji} = 0. \square$$

3.1.9 Il teorema dell'energia cinetica

Definiamo la densità di potenza, la potenza totale, la densità di lavoro ed il lavoro totale dei tre tipi di forze agenti sul continuo.

Calcoliamo inoltre la derivata (rispetto al tempo) dell'energia cinetica totale e la esprimiamo tramite la potenza delle forze agenti sul continuo. Conseguentemente calcoliamo la variazione di energia cinetica totale e la esprimiamo tramite il lavoro delle forze agenti sul continuo.

3.1.36 Definizione. Diciamo che

1) la *densità di potenza delle forze di volume* è la funzione

$$W[\bar{f}] := \bar{f} \cdot \bar{v} : \mathbf{D} \rightarrow \mathbb{R},$$

2) la *densità di potenza delle forze di superficie* è la funzione

$$W[\hat{\sigma}] := \bar{\sigma} \cdot \bar{\epsilon} : \mathbf{D} \rightarrow \mathbb{R},$$

3) la *densità di potenza delle forze di carico* è la funzione

$$W[\bar{\gamma}] := \bar{\gamma} \cdot \bar{v} : \partial \mathbf{D} \rightarrow \mathbb{R},$$

e, quindi,

1') la *potenza totale delle forze di volume* è la funzione

$$W[\bar{f}][\mathbf{D}] := \int_{\mathbf{D}} \bar{f} \cdot \bar{v} \, d\mathcal{V} : \mathbf{T} \rightarrow \mathbb{R},$$

2') la *potenza totale delle forze di superficie* è la funzione

$$W[\hat{\sigma}][\mathbf{D}] := \int_{\mathbf{D}} \bar{\sigma} \cdot \bar{\epsilon} \, d\mathcal{V} : \mathbf{T} \rightarrow \mathbb{R},$$

3') la *potenza totale delle forze di carico* è la funzione

$$W[\bar{\gamma}][\partial \mathbf{D}] := \int_{\partial \mathbf{D}} \bar{\gamma} \cdot \bar{v} \, d\mathcal{S} : \mathbf{T} \rightarrow \mathbb{R}. \square$$

3.1.37 Nota. Osserviamo che il segno nell'espressione della potenza delle forze di superficie dipende dalla nostra scelta della *normale uscente* sul bordo del dominio; la scelta della normale entrante porterebbe ad un segno opposto. \square

3.1.38 Nota. Possiamo giustificare la definizione di densità di potenza delle forze di superficie analizzando intuitivamente la funzione $\bar{\sigma} \cdot \bar{\epsilon} : \mathbf{D} \rightarrow \mathbb{R}$ nel modo seguente.

Consideriamo un istante $t \in \mathbf{T}$ ed un punto $p \in \mathbf{D}_t \subset \mathbf{P}$. Consideriamo poi una base ortonormale $(\bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{e}_z)$ di autovettori di $\hat{\sigma}(t, p)$ applicata in p ed il volumetto di lato infinitesimo l generato da tale base.

Con riferimento a tale base, e trascurando gli infinitesimi di ordine superiore ad l^3 , otteniamo l'uguaglianza

$$\begin{aligned}
(\bar{\sigma}(t, p) \cdot \bar{\epsilon}(t, p)) l^3 &= (\sigma_x^x(t, p) \epsilon_x^x(t, p) + \sigma_y^y(t, p) \epsilon_y^y(t, p) + \sigma_z^z(t, p) \epsilon_z^z(t, p)) l^3 \\
&= (\sigma_x^x(t, p) \partial_x v^x(t, p) + \sigma_y^y(t, p) \partial_y v^y(t, p) + \sigma_z^z(t, p) \partial_z v^z(t, p)) l^3 \\
&= \sigma_x^x(t, p) (v^x(t, p + l\bar{e}_x) - v^x(t, p)) l^2 \\
&\quad + \sigma_y^y(t, p) (v^y(t, p + l\bar{e}_y) - v^y(t, p)) l^2 \\
&\quad + \sigma_z^z(t, p) (v^z(t, p + l\bar{e}_z) - v^z(t, p)) l^2 \\
&= \sigma_x^x(t, p + l\bar{e}_x) v^x(t, p + l\bar{e}_x) l^2 - \sigma_x^x(t, p) v^x(t, p) l^2 \\
&\quad + \sigma_y^y(t, p + l\bar{e}_y) v^y(t, p + l\bar{e}_y) l^2 - \sigma_y^y(t, p) v^y(t, p) l^2 \\
&\quad + \sigma_z^z(t, p + l\bar{e}_z) v^z(t, p + l\bar{e}_z) l^2 - \sigma_z^z(t, p) v^z(t, p) l^2.
\end{aligned}$$

Si vede facilmente che (a meno di infinitesimi di ordine superiore ad l^3)

$$\begin{aligned}
(\bar{\sigma}(t, p) \cdot \bar{\epsilon}(t, p)) l^3 &= \sigma_x^x(t, p + l\bar{e}_x) v^x(t, p + l\bar{e}_x) l^2 - \sigma_x^x(t, p) v^x(t, p) l^2 \\
&\quad + \sigma_y^y(t, p + l\bar{e}_y) v^y(t, p + l\bar{e}_y) l^2 - \sigma_y^y(t, p) v^y(t, p) l^2 \\
&\quad + \sigma_z^z(t, p + l\bar{e}_z) v^z(t, p + l\bar{e}_z) l^2 - \sigma_z^z(t, p) v^z(t, p) l^2
\end{aligned}$$

è la somma dei prodotti scalari delle tensioni sulle sei facce del cubo per le velocità di tali facce, ossia è la potenza totale delle forze di superficie sulle facce del cubo.

Dunque, $\bar{\sigma}(t, p) \cdot \bar{\epsilon}(t, p)$ è la densità di potenza delle forze di superficie in $(t, p) \in \mathbf{D}$. \square

3.1.39 Esempio. Nel caso particolare in cui $\hat{\sigma}$ è isotropo, cioè nel caso in cui

$$\hat{\sigma} = p \hat{\text{id}}, \quad \text{dove } p : \mathbf{D} \rightarrow \mathbb{R},$$

la densità di potenza delle forze di superficie diventa

$$\bar{\sigma} \cdot \bar{\epsilon} = p \operatorname{div} \bar{v}.$$

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo

$$\bar{\sigma} \cdot \bar{\epsilon} = p \mathbf{g} \cdot \boldsymbol{\epsilon} = p \operatorname{id} \cdot \hat{\epsilon} = p \operatorname{tr} \hat{\epsilon} = p \operatorname{div} \bar{v}. \text{ QED}$$

3.1.40 Esempio. Nel caso particolare di un moto rigido, cioè nel caso in cui

$$\bar{\epsilon} = 0,$$

la densità di potenza delle tensioni è nulla

$$\bar{\sigma} \cdot \bar{\epsilon} = 0. \square$$

3.1.41 Definizione. Definiamo i seguenti integrali.

Per una particella caratterizzata dai dati iniziali $(t, p) \in \mathbf{D}$, o $(t, p) \in \partial_{\text{est}} \mathbf{D}$,

1) la *densità di lavoro, per unità di volume, delle forze di volume*, relativamente al moto della particella scelta, tra l'istante iniziale $t \in \mathbf{T}$ e l'istante finale $r \in \mathbf{T}$, è il numero reale

$$L[\bar{f}](r; t, p) := \int_{[t, r]} \bar{f}(s, C(s; t, p)) \cdot \bar{\mathbf{v}}(s, C(s; t, p)) ds \in \mathbb{R},$$

2) la *densità di lavoro, per unità di volume, delle forze di superficie*, relativamente al moto della particella scelta, tra l'istante iniziale $t \in \mathbf{T}$ e l'istante finale $r \in \mathbf{T}$, è il numero reale

$$L[\hat{\sigma}](r; t, p) := \int_{[t, r]} \bar{\sigma}(s, C(s; t, p)) \cdot \bar{\epsilon}(s, C(s; t, p)) ds \in \mathbb{R};$$

3) la *densità di lavoro, per unità di volume, delle forze di carico*, relativamente al moto della particella scelta, tra l'istante iniziale $t \in \mathbf{T}$ e l'istante finale $r \in \mathbf{T}$, è il numero reale

$$L[\bar{\gamma}](r; t, p) := \int_{[t, r]} \bar{\gamma}(s, C(s; t, p)) \cdot \bar{\mathbf{v}}(s, C(s; t, p)) ds \in \mathbb{R}.$$

Inoltre, definiamo i seguenti integrali

1') il *lavoro totale delle forze di volume*, tra l'istante iniziale $t \in \mathbf{T}$ e l'istante finale $r \in \mathbf{T}$, è il numero reale

$$L[\bar{f}][\mathbf{D}]_{[t, r]} := \int_{[t, r]} W[\bar{f}][\mathbf{D}] dt := \int_{[t, r]} \left(\int_{\mathbf{D}} \bar{f} \cdot \bar{\mathbf{v}} d\mathcal{V} \right) dt \in \mathbb{R},$$

2') il *lavoro totale delle forze di superficie*, tra l'istante iniziale $t \in \mathbf{T}$ e l'istante finale $r \in \mathbf{T}$, è il numero reale

$$L[\hat{\sigma}][\mathbf{D}]_{[t, r]} := \int_{[t, r]} W[\hat{\sigma}][\mathbf{D}] dt := \int_{[t, r]} \left(\int_{\mathbf{D}} \bar{\sigma} \cdot \bar{\epsilon} d\mathcal{V} \right) dt \in \mathbb{R},$$

3') il *lavoro totale delle forze di carico*, tra l'istante iniziale $t \in \mathbf{T}$ e l'istante finale $r \in \mathbf{T}$, è il numero reale

$$L[\bar{\gamma}][\partial \mathbf{D}]_{[t, r]} := \int_{[t, r]} W[\bar{\gamma}][\partial \mathbf{D}] dt := \int_{[t, r]} \left(\int_{\partial \mathbf{D}} \bar{\gamma} \cdot \bar{\mathbf{v}} d\mathcal{S} \right) dt \in \mathbb{R}. \square$$

3.1.42 Teorema. [Teorema dell'energia cinetica.]

Vale la seguente uguaglianza

$$D \int_{\mathbf{D}} \frac{1}{2} \mu \bar{v}^2 d\mathcal{V} + \int_{\mathbf{D}} \bar{\sigma} \cdot \bar{\epsilon} d\mathcal{V} = \int_{\mathbf{D}} \bar{f} \cdot \bar{v} d\mathcal{V} + \int_{\partial_{\text{est}} \mathbf{D}} \bar{\gamma} \cdot \bar{v} dS.$$

DIMOSTRAZIONE. Il teorema del trasporto implica

$$D \int_{\mathbf{D}} \frac{1}{2} \mu \bar{v}^2 d\mathcal{V} = \int_{\mathbf{D}} \mu \bar{a} \cdot \bar{v} d\mathcal{V}$$

Allora, l'equazione di moto implica

$$D \int_{\mathbf{D}} \frac{1}{2} \mu \bar{v}^2 d\mathcal{V} = \int_{\mathbf{D}} (\bar{f} + \text{div } \bar{\sigma}) \cdot \bar{v} d\mathcal{V}.$$

D'altra parte, un semplice calcolo in coordinate cartesiane, tenendo conto della regola di Leibniz per le derivate, implica la formula

$$(\text{div } \bar{\sigma}) \cdot \bar{v} = \text{div } (\bar{\sigma}(\bar{v})) - \hat{\sigma} \cdot \check{D}\bar{v}.$$

Inoltre, dato che $\hat{\sigma}$ è simmetrico, otteniamo

$$\hat{\sigma} \cdot \check{D}\bar{v} = \hat{\sigma} \cdot \text{Sim } \check{D}\bar{v} = \hat{\sigma} \cdot \check{\epsilon}.$$

Dunque, otteniamo

$$(\text{div } \bar{\sigma}) \cdot \bar{v} = \text{div } (\bar{\sigma}(\bar{v})) - \hat{\sigma} \cdot \check{\epsilon}.$$

Sostituendo questa formula nell'espressione di $D \int_{\mathbf{D}} \frac{1}{2} \mu \bar{v}^2 d\mathcal{V}$, otteniamo

$$D \int_{\mathbf{D}} \frac{1}{2} \mu \bar{v}^2 d\mathcal{V} = \int_{\mathbf{D}} (\bar{f} - \hat{\sigma} \cdot \check{\epsilon}) \cdot \bar{v} d\mathcal{V} + \int_{\mathbf{D}} \text{div } (\hat{\sigma}(\bar{v})) d\mathcal{V}.$$

Infine, tenendo conto del teorema di Gauss, otteniamo

$$D \int_{\mathbf{D}} \frac{1}{2} \mu \bar{v}^2 d\mathcal{V} = \int_{\mathbf{D}} (\bar{f} - \hat{\sigma} \cdot \check{\epsilon}) \cdot \bar{v} d\mathcal{V} + \int_{\partial_{\text{est}} \mathbf{D}} \hat{\sigma}(\bar{n}) \cdot \bar{v} d\mathcal{V}.$$

Inoltre, tenendo conto dell'uguaglianza valida sul bordo esterno $\hat{\sigma}(\bar{n}) = \bar{\gamma}$, otteniamo

$$D \int_{\mathbf{D}} \frac{1}{2} \mu \bar{v}^2 d\mathcal{V} = \int_{\mathbf{D}} (\bar{f} - \hat{\sigma} \cdot \check{\epsilon}) \cdot \bar{v} d\mathcal{V} + \int_{\partial_{\text{est}} \mathbf{D}} \bar{\gamma} \cdot \bar{v} d\mathcal{V}. \text{ QED.}$$

3.1.43 Corollario. Per ogni $t, r \in \mathbf{T}$, vale la seguente uguaglianza

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{D}_r} \frac{1}{2} \mu \bar{v}^2 d\mathcal{V} - \int_{\mathbf{D}_t} \frac{1}{2} \mu \bar{v}^2 d\mathcal{V} + \int_{[t,r]} \left(\int_{\mathbf{D}} \bar{\sigma} \cdot \bar{\epsilon} d\mathcal{V} \right) dt = \\ = \int_{[t,r]} \left(\int_{\mathbf{D}} \bar{f} \cdot \bar{v} d\mathcal{V} \right) dt + \int_{[t,r]} \left(\int_{\partial \mathbf{D}} \bar{\gamma} \cdot \bar{v} dS \right) dt. \end{aligned}$$

DIMOSTRAZIONE. Segue integrando rispetto al tempo l'uguaglianza del precedente Teorema 3.1.42. QED

3.1.44 Nota. Possiamo considerare come *forze esterne* applicate al sistema quelle generate dalla densità di forza di volume \bar{f} e della densità di carico $\bar{\gamma}$. Invece, consideriamo come *forze interne* applicate al continuo quelle generate dalla densità di forza di superficie $\hat{\sigma}$.

Pertanto, il Teorema 3.1.42 dice che il valore globale della potenza delle forze esterne è uguale alla somma della (derivata rispetto al tempo) del valore globale dell'energia cinetica più il valore globale della potenza delle forze interne.

Conseguentemente, il Corollario 3.1.43 dice che il lavoro totale delle forze esterne è uguale alla somma della variazione dell'energia cinetica più il lavoro totale delle forze interne. \square

3.1.45 Nota. Possiamo confrontare i risultati precedenti validi per un sistema continuo con i risultati analoghi validi per una particella.

Nel caso di una particella abbiamo solo una forza puntuale esterna e nessuna forza interna.

Nel caso di un sistema continuo abbiamo densità di forze; le forze esterne possono essere distinte in forze esercitate all'interno (\bar{f}) e forze esercitate sul bordo ($\bar{\gamma}$); inoltre, esistono forze interne, ossia le tensioni ($\hat{\sigma}$).

Nel caso di una particella, la potenza della forza applicata è uguale esattamente alla derivata (rispetto al tempo) dell'energia cinetica ed il lavoro della forza applicata è uguale esattamente alla variazione dell'energia cinetica.

Nel caso di un sistema continuo, la potenza delle forze esterne è uguale alla derivata dell'energia cinetica più la potenza delle forze interne ed il lavoro delle forze esterne è uguale alla variazione dell'energia cinetica più il lavoro delle forze interne; dunque, il lavoro delle forze esterne si traduce solo parzialmente nella variazione di energia cinetica ed è speso in parte per una modifica dello stato di tensione e deformazione interno al continuo. \square

3.1.46 Esempio. Le osservazioni della precedente Nota possono essere illustrate mediante i due esempi seguenti. Questi esempi sono formulati in modo da separare gli effetti del lavoro delle forze esterne da quelli delle forze interne, per meglio mettere in evidenza i loro ruoli distinti. Infatti, in un esempio generico, gli effetti delle diverse forze interferirebbero tra loro in modo più complicato tramite le equazioni di moto e le equazioni costitutive.

1) Consideriamo due cilindri rigidi vincolati da una guida orizzontale liscia e sollecitati da due carichi costanti applicati alle due basi esterne B_e , ortogonali a queste e rivolti verso l'esterno. Supponiamo che ad un certo istante i due cilindri abbiano velocità nulla.

In base alle equazioni di moto, successivamente all'istante iniziale considerato, i due cilindri si muovono di moto traslatorio orizzontale uniformemente accelerato verso l'esterno

della guida. Le uniche forze esterne che fanno lavoro sono i due carichi $\bar{\gamma}$. In questo caso, il lavoro delle tensioni è nullo ed il lavoro dei carichi è esattamente uguale alla variazione di energia cinetica.

Dunque, in questo caso, la situazione è del tutto analoga a quella di due particelle che si muovono vincolate dalla guida orizzontale liscia, sollecitate da due forze pari al valore globale del carico $\bar{\gamma}$.

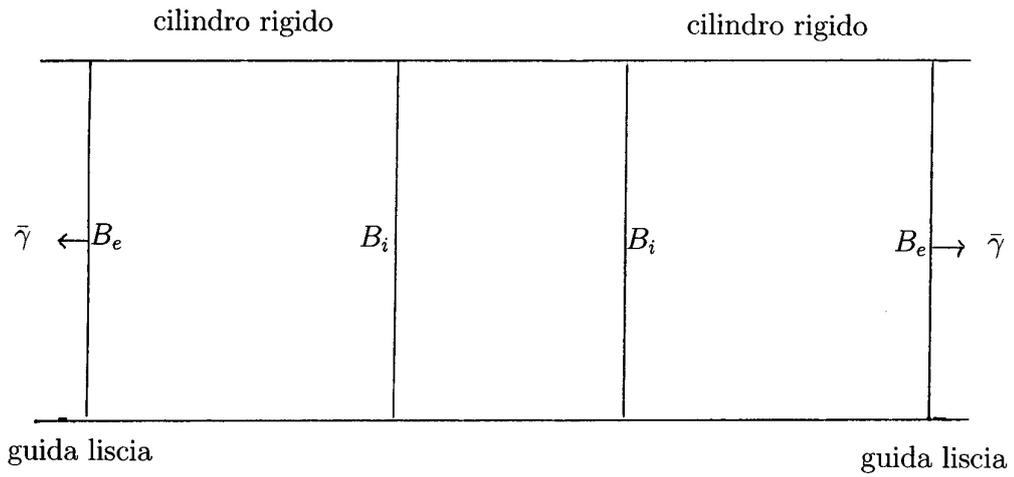
2) Consideriamo, come in 1), due cilindri rigidi vincolati da una guida orizzontale liscia e sollecitati da due carichi costanti applicati alle due basi esterne B_e , ortogonali a queste e rivolti verso l'esterno. Supponiamo, inoltre, che tra i due cilindri rigidi sia inserito un cilindro di gomma incollato ad essi lungo le due basi interne B_i . Supponiamo che la massa del cilindro di gomma sia trascurabile. Consideriamo i tre cilindri come un unico continuo (le cui legge costitutiva non è omogenea). Supponiamo che ad un certo istante i tre cilindri abbiano velocità nulla e che la tensione del cilindro di gomma sia nulla (in particolare, la tensione relativa alle facce B_i sia nulla).

In base alle equazioni di moto, successivamente all'istante iniziale considerato, i due cilindri rigidi si muovono, almeno per un certo tempo, di moto orizzontale verso l'esterno della guida. Contemporaneamente, il cilindro di gomma si allunga e nasce una tensione costante rivolta verso l'interno sulle basi interne B_i dei cilindri rigidi. Questa tensione contrasta i carichi esterni $\bar{\gamma}$ dei due cilindri rigidi. Perciò, l'energia cinetica acquistata dai due cilindri rigidi è inferiore a quella del caso 1). In effetti, il lavoro fornito da queste forze esterne viene in parte speso per deformare il cilindro di gomma. Abbiamo trascurato l'energia cinetica del cilindro di gomma, perché abbiamo supposto trascurabile la sua massa.

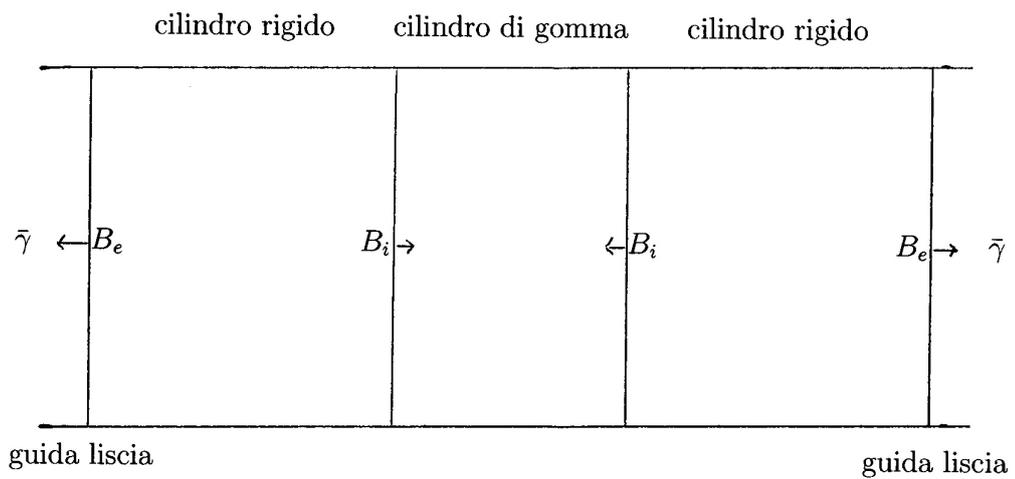
Naturalmente, dopo un certo tempo, la deformazione del cilindro di gomma sarà tale che la tensione sulle facce interne supererà il carico esterno ed il moto di allontanamento dei cilindri rallenterà, fino ad invertire il senso di marcia. Anche in queste fasi del moto, il bilancio va fatto tra il lavoro delle forze esterne, l'energia cinetica ed il lavoro delle forze interne di tensione.

Vedremo in seguito (nel capitolo dedicato ai sistemi elastici) che, se il cilindro di gomma è elastico, allora il lavoro delle tensioni genera *un'energia elastica* che può essere recuperata quando lo stato di deformazione torna al valore iniziale. \square

Caso 1) Esempio sul Teorema dell'energia



Caso 2) Esempio sul Teorema dell'energia



3.2 Sistemi continui notevoli

Studiamo ora due tipi notevoli di sistemi continui caratterizzati da particolari leggi costitutive: i fluidi e gli elastici.

3.2.1 Fluidi

Innanzitutto, introduciamo la legge costitutiva dei fluidi in due tappe: i “fluidi perfetti” caratterizzati dall’isotropia del tensore delle tensioni ed i “fluidi perfetti barotropici” caratterizzati dalla dipendenza della densità di massa dalla pressione.

Successivamente, analizziamo la forma che prende la legge di moto per un fluido perfetto barotropico ed il conseguente bilancio energetico espresso dal teorema di Bernoulli.

Nel caso di fluidi reali, la temperatura gioca un ruolo importante insieme alle altre grandezze termodinamiche ad essa connesse. Quindi, una trattazione realistica dei fluidi dovrebbe coinvolgere anche la temperatura, aumentando così le incognite e le equazioni del nostro modello. Però, questa estensione realistica del modello va oltre le possibilità del nostro corso. Pertanto, non parleremo di temperatura e delle grandezze termodinamiche ad essa connesse, limitandoci, implicitamente, a considerare solo processi isoterfici.

3.2.1.1 Fluidi perfetti

Il tensore delle tensioni è detto “isotropo” se soddisfa alcune proprietà algebriche e fisiche equivalenti tra loro.

Definiamo un “fluido perfetto” come un continuo il cui tensore delle tensioni sia isotropo.

Se il tensore delle tensioni è isotropo, allora la sua divergenza e la sua densità di potenza assumono una forma interessante.

3.2.1 Lemma. Consideriamo un endomorfismo simmetrico

$$\hat{\sigma} \in L(\bar{\mathbf{P}}, \bar{\mathbf{P}}).$$

Le seguenti condizioni sono equivalenti:

1) $\hat{\sigma}$ è del tipo

$$\hat{\sigma} = p \hat{\text{id}}, \quad \text{con } p \in \mathbb{R},$$

ossia, la matrice di $\hat{\sigma}$ in una base qualunque è del tipo

$$(\sigma_j^i) = \begin{pmatrix} \mathbf{p} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{p} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{p} \end{pmatrix}, \quad \text{con } \mathbf{p} \in \mathbb{R};$$

2) $\underline{\sigma} := g^b(\hat{\sigma})$ è del tipo

$$\underline{\sigma} = \mathbf{p}' g, \quad \text{con } \mathbf{p}' \in \mathbb{R},$$

ossia, la matrice di $\underline{\sigma}$ in una base ortonormale è del tipo

$$(\sigma_{ij}) = \begin{pmatrix} \mathbf{p}' & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{p}' & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{p}' \end{pmatrix}, \quad \text{con } \mathbf{p}' \in \mathbb{R};$$

3) $\bar{\sigma} := g^\#(\hat{\sigma})$ è del tipo

$$\bar{\sigma} = \mathbf{p}'' \bar{g}, \quad \text{con } \mathbf{p}'' \in \mathbb{R},$$

ossia, la matrice di $\bar{\sigma}$ in una base ortonormale è del tipo

$$(\sigma^{ij}) = \begin{pmatrix} \mathbf{p}'' & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{p}'' & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{p}'' \end{pmatrix}, \quad \text{con } \mathbf{p}'' \in \mathbb{R};$$

4) per ogni versore $\bar{n} \in \mathbf{S} \subset \bar{\mathbf{P}}$, abbiamo

$$\hat{\sigma}(\bar{n}) = \underline{\sigma}(\bar{n}, \bar{n}) \bar{n};$$

5) per ogni coppia di versori $\bar{n}, \bar{n}' \in \mathbf{S} \subset \bar{\mathbf{P}}$ ortogonali tra loro, abbiamo

$$\underline{\sigma}(\bar{n}, \bar{n}') = 0;$$

6) per ogni coppia di versori $\bar{n}, \bar{n}' \in \mathbf{S} \subset \bar{\mathbf{P}}$, abbiamo

$$\underline{\sigma}(\bar{n}, \bar{n}) = \underline{\sigma}(\bar{n}', \bar{n}');$$

7) per ogni operatore di rotazione $\hat{r} \in L(\bar{\mathbf{P}}, \bar{\mathbf{P}})$ ed ogni versore $\bar{n} \in \mathbf{S} \subset \bar{\mathbf{P}}$, abbiamo

$$\hat{\sigma}(\hat{r}(\bar{n})) = \hat{r}(\hat{\sigma}(\bar{n})).$$

Inoltre, se le precedenti condizioni sono verificate, allora abbiamo

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}' = \mathbf{p}'' = \hat{\sigma}(\bar{n}) \cdot \bar{n} = \underline{\sigma}(\bar{n}, \bar{n}).$$

DIMOSTRAZIONE. Le proprietà 1), 2) e 3) sono equivalenti e $\mathbf{p} = \mathbf{p}' = \mathbf{p}''$ perché abbiamo

$$\begin{aligned}\sigma &= g^b(\hat{\sigma}) = g^b(\mathbf{p} \hat{\text{id}}) = \mathbf{p} g^b(\hat{\text{id}}) = \mathbf{p} g, \\ \bar{\sigma} &= g^\#(\hat{\sigma}) = g^\#(\mathbf{p} \hat{\text{id}}) = \mathbf{p} g^\#(\hat{\text{id}}) = \mathbf{p} \bar{g}, \\ \hat{\sigma} &= g^\#(\sigma) = g^\#(\mathbf{p}' g) = \mathbf{p}' g^\#(g) = \mathbf{p}' \hat{\text{id}}, \\ \hat{\sigma} &= g^b(\bar{\sigma}) = g^b(\mathbf{p}'' \bar{g}) = \mathbf{p}'' g^b(\bar{g}) = \mathbf{p}'' \hat{\text{id}}.\end{aligned}$$

Le proprietà 4) e 5) sono equivalenti.

Infatti, se vale 4), allora abbiamo

$$\sigma(\bar{n}, \bar{n}') = \hat{\sigma}(\bar{n}) \cdot \bar{n}' = \sigma(\bar{n}, \bar{n}) \bar{n} \cdot \bar{n}' = 0.$$

Inoltre, se vale 5), allora abbiamo

$$\hat{\sigma}(\bar{n}) \cdot \bar{n}' = \sigma(\bar{n}, \bar{n}') = 0, \quad \forall \bar{n}' \perp \bar{n}, \quad \Rightarrow \quad \hat{\sigma}(\bar{n}) = \lambda \bar{n},$$

e

$$\hat{\sigma}(\bar{n}) = \lambda \bar{n} \quad \Rightarrow \quad \sigma(\bar{n}, \bar{n}) = \hat{\sigma}(\bar{n}) \cdot \bar{n} = \lambda \bar{n} \cdot \bar{n} = \lambda.$$

Le proprietà 5) e 6) sono equivalenti.

Infatti, se vale 5) allora, per ogni coppia di versori ortogonali tra loro (\bar{n}, \bar{n}') , abbiamo

$$\begin{aligned}\sigma(\bar{n}, \bar{n}) &= \sigma\left(\frac{\bar{n} + \bar{n}'}{\sqrt{2}}, \frac{\bar{n} + \bar{n}'}{\sqrt{2}}\right) \\ &= \frac{1}{2} \sigma(\bar{n}, \bar{n}) + \frac{1}{2} \sigma(\bar{n}', \bar{n}') + \frac{1}{2} \sigma(\bar{n}, \bar{n}') + \frac{1}{2} \sigma(\bar{n}', \bar{n}) \\ &= \frac{1}{2} \sigma(\bar{n}, \bar{n}) + \frac{1}{2} \sigma(\bar{n}', \bar{n}'),\end{aligned}$$

da cui segue

$$\sigma(\bar{n}, \bar{n}) = \sigma(\bar{n}', \bar{n}').$$

Inoltre, se vale 6), allora, per ogni coppia di versori ortogonali tra loro (\bar{n}, \bar{n}') , abbiamo

$$\begin{aligned}\sigma\left(\frac{\bar{n} + \bar{n}'}{\sqrt{2}}, \frac{\bar{n} + \bar{n}'}{\sqrt{2}}\right) &= \frac{1}{2} \sigma(\bar{n}, \bar{n}) + \frac{1}{2} \sigma(\bar{n}', \bar{n}') + \frac{1}{2} \sigma(\bar{n}, \bar{n}') + \frac{1}{2} \sigma(\bar{n}', \bar{n}) \\ &= \sigma(\bar{n}, \bar{n}) + \sigma(\bar{n}, \bar{n}'), \\ \sigma\left(\frac{\bar{n} - \bar{n}'}{\sqrt{2}}, \frac{\bar{n} - \bar{n}'}{\sqrt{2}}\right) &= \frac{1}{2} \sigma(\bar{n}, \bar{n}) + \frac{1}{2} \sigma(\bar{n}', \bar{n}') - \frac{1}{2} \sigma(\bar{n}, \bar{n}') - \frac{1}{2} \sigma(\bar{n}', \bar{n}) \\ &= \sigma(\bar{n}, \bar{n}) - \sigma(\bar{n}, \bar{n}'),\end{aligned}$$

per cui l'uguaglianza

$$\sigma\left(\frac{\bar{n} + \bar{n}'}{\sqrt{2}}, \frac{\bar{n} + \bar{n}'}{\sqrt{2}}\right) = \sigma\left(\frac{\bar{n} - \bar{n}'}{\sqrt{2}}, \frac{\bar{n} - \bar{n}'}{\sqrt{2}}\right)$$

implica

$$\sigma(\bar{n}, \bar{n}') = 0.$$

Dunque, le proprietà 4), 5) e 6) sono equivalenti.

Le proprietà 1) e le proprietà 4), 5) e 6) sono equivalenti.

Infatti, se vale 1), allora, chiaramente, valgono le proprietà 4), 5) e 6).

Inoltre, se valgono le proprietà 5) e 6), allora, chiaramente, vale la proprietà 1).

La proprietà 7) è equivalente alle altre proprietà.

Infatti, se vale 1), allora chiaramente vale 7).

Inoltre, se vale 7), allora, per ogni coppia di versori \bar{n} e \bar{n}' esiste una rotazione \hat{r} tale che $\hat{r}(\bar{n}) = \bar{n}'$ ed abbiamo

$$\begin{aligned}\sigma(\bar{n}', \bar{n}') &= \sigma(\hat{r}(\bar{n}), \hat{r}(\bar{n})) \\ &= \hat{r}(\hat{\sigma}(\bar{n})) \cdot \hat{r}(\bar{n}) \\ &= \hat{\sigma}(\bar{n}) \cdot \bar{n} \\ &= \sigma(\bar{n}, \bar{n}),\end{aligned}$$

che implica la proprietà 6). QED

3.2.2 Definizione. Un endomorfismo simmetrico $\hat{\sigma} \in L(\bar{\mathbf{P}}, \bar{\mathbf{P}})$ che soddisfa le condizioni del precedente Lemma è detto *isotropo*. \square

Possiamo interpretare fisicamente il precedente Lemma algebrico nel seguente modo.

3.2.3 Teorema. [Teorema di Pascal.] Consideriamo il tensore delle tensioni di un continuo in un istante $t \in \mathbf{T}$ ed in un punto $p \in \mathbf{D}_t$

$$\hat{\sigma} \in L(\bar{\mathbf{P}}, \bar{\mathbf{P}}).$$

Le seguenti condizioni sono equivalenti:

- a) tutti gli sforzi sono normali (*proprietà 4) del Lemma*);
- b) tutti gli sforzi di taglio sono nulli (*proprietà 5) del Lemma*);
- c) le componenti di tutti gli sforzi normali sono uguali tra loro (*proprietà 6) del Lemma*);
- d) se $\Sigma_{\bar{n}}$ e $\Sigma_{\bar{n}'}$ sono due facce orientate caratterizzate dai versori normali \bar{n} e \bar{n}' e se \bar{n}' è ottenuto mediante una rotazione \hat{r} di \bar{n} , allora lo sforzo relativo alla faccia $\Sigma_{\bar{n}'}$ è uguale allo sforzo ottenuto mediante la rotazione \hat{r} dello sforzo relativo alla faccia $\Sigma_{\bar{n}}$ (*proprietà 7) del Lemma*). \square

Definiamo il sottinsieme dei numeri reali

$$\mathbb{R}_0^- := \{r \in \mathbb{R} \mid r \leq 0\} \subset \mathbb{R}.$$

3.2.4 Definizione. Chiamiamo *fluido perfetto* (o *ideale*) un continuo il cui tensore delle tensioni sia isotropo e con autovalore negativo o nullo:

$$\hat{\sigma} = p \hat{\text{id}} : \mathbf{D} \rightarrow L(\bar{\mathbf{P}}, \bar{\mathbf{P}}), \quad \text{con} \quad p : \mathbf{D} \rightarrow \mathbb{R}_0^-.$$

La funzione p è detta la *pressione del fluido*. \square

Comunque, osserviamo che la maggior parte degli sviluppi successivi possono essere facilmente estesi anche a continui con $\hat{\sigma}$ isotropo per i quali non valga la restrizione $p : \mathbf{D} \rightarrow \mathbb{R}_0^-$ ma sia, più in generale, $p : \mathbf{D} \rightarrow \mathbb{R}$.

3.2.5 Nota. Naturalmente, se avessimo adottato la convenzione della “normale entrante”, al posto della convenzione della “normale uscente”, per la determinazione degli sforzi, allora nella precedente Definizione scriveremmo $\mathbf{p} \geq 0$ al posto di $\mathbf{p} \leq 0$. \square

3.2.6 Nota. I 6 gradi di libertà del tensore delle tensioni di un continuo (espressi dalle 6 componenti indipendenti $\sigma_1^1, \sigma_2^2, \sigma_3^3, \sigma_2^1 = \sigma_1^2, \sigma_3^1 = \sigma_1^3, \sigma_3^2 = \sigma_2^3$) si riducono ad un solo grado di libertà (espresso dall'unica componente indipendente $\mathbf{p} = \sigma_1^1 = \sigma_2^2 = \sigma_3^3$) nel caso di un fluido perfetto. \square

3.2.7 Proposizione. Per un fluido perfetto la divergenza del tensore delle tensioni è uguale al gradiente della pressione:

$$\operatorname{div} \bar{\sigma} = \operatorname{grad} \mathbf{p}.$$

DIMOSTRAZIONE. In coordinate cartesiane abbiamo

$$\operatorname{div} \bar{\sigma} = \sum_{ij} \partial_j \sigma^{ji} \bar{e}_i = \sum_{ij} (\partial_j \mathbf{p}) \delta^{ji} \bar{e}_i = \sum_{ij} \partial_i \mathbf{p} \bar{e}_i = \operatorname{grad} \mathbf{p}. \text{ QED}$$

3.2.8 Proposizione. Per un fluido perfetto la densità di potenza delle tensioni è data da

$$-\boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{\sigma} = -\mathbf{p} \operatorname{div} \bar{\mathbf{v}}.$$

DIMOSTRAZIONE. In coordinate cartesiane abbiamo

$$-\boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{\sigma} = - \sum_{ij} \epsilon_{ij} \sigma_{ij} = -\mathbf{p} \sum_{ij} \epsilon_{ij} \delta_{ij} = -\mathbf{p} \sum_i \epsilon_{ii} = -\mathbf{p} \operatorname{div} \bar{\mathbf{v}}. \text{ QED}$$

3.2.1.2 Fluidi perfetti barotropici

Definiamo “barotropico” un fluido perfetto la cui densità di massa dipenda dalla pressione.

3.2.9 Definizione. Un fluido perfetto è detto *barotropico omogeneo* se la densità di massa $\mu : \mathbf{D} \rightarrow \mathbb{R}^+$ si fattorizza tramite la funzione $\mathbf{p} : \mathbf{D} \rightarrow \mathbb{R}$, ossia se vale un'uguaglianza del tipo

$$\mu = \mathcal{F} \circ \mathbf{p} : \mathbf{D} \rightarrow \mathbb{R}^+, \quad \text{dove } \mathcal{F} \text{ è una funzione } \mathcal{F} : \mathbb{R}_0^- \rightarrow \mathbb{R}^+. \square$$

Dunque, per un fluido perfetto barotropico omogeneo abbiamo il seguente diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{D} & \xrightarrow{\mu} & \mathbb{R}^+ \\ & \searrow \mathbf{p} & \nearrow \mathcal{F} \\ & & \mathbb{R}_0^- \end{array}$$

In altre parole, un fluido perfetto barotropico omogeneo è un continuo il cui tensore delle tensioni è isotropo e tale che la densità di massa μ dipende puntualmente da \mathbf{p} con una legge che non dipenda né dalle singole particelle, né dal tempo.

3.2.10 Nota. Per un fluido perfetto barotropico omogeneo, se la funzione $\mathcal{F} : \mathbb{R}_0^- \rightarrow \mathbb{R}^+$ è invertibile, allora la pressione $\mathbf{p} : \mathbf{D} \rightarrow \mathbb{R}_0^-$ si fattorizza tramite la funzione $\mu : \mathbf{D} \rightarrow \mathbb{R}^+$, ossia vale l'uguaglianza

$$\mathbf{p} = \mathcal{K} \circ \mu : \mathbf{D} \rightarrow \mathbb{R}_0^-, \quad \text{dove } \mathcal{K} \text{ è la funzione } \mathcal{K} := \mathcal{F}^{-1} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^-.$$

Dunque, in tal caso, abbiamo il seguente diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{D} & \xrightarrow{\mathbf{p}} & \mathbb{R}_0^- \\ & \searrow \mu & \nearrow \mathcal{K} \\ & & \mathbb{R}^+ \end{array}$$

3.2.11 Definizione. Un fluido perfetto barotropico omogeneo è detto *incomprimibile* se la funzione $\mathcal{F} : \mathbb{R}_0^- \rightarrow \mathbb{R}^+$ è costante. \square

3.2.12 Proposizione. Per un fluido perfetto barotropico omogeneo incomprimibile valgono i seguenti fatti:

a) la funzione $\mu : \mathbf{D} \rightarrow \mathbb{R}^+$ è costante, e quindi

$$\partial_0 \mu = 0, \quad \check{D} \mu = 0;$$

b) i volumi si conservano lungo il moto, e quindi

$$\delta \det \hat{J} = \operatorname{div} \bar{\mathbf{v}} = 0,$$

c) la densità di potenza delle tensioni è nulla

$$-\underline{\epsilon} \cdot \underline{\sigma} = -\mathbf{p} \operatorname{div} \bar{\mathbf{v}} = 0.$$

DIMOSTRAZIONE. Dal fatto che la funzione $\mathcal{F} : \mathbb{R}_0^- \rightarrow \mathbb{R}^+$ è costante segue che la funzione $\mu = \mathcal{F} \circ \mathbf{p} : \mathbf{D} \rightarrow \mathbb{R}^+$ è costante.

Inoltre, dalla costanza di μ segue $\delta \mu = \partial_0 \mu + \check{D} \mu(\bar{\mathbf{v}}) = 0$.

Allora, dall'equazione di continuità $\delta \mu + \mu \operatorname{div} \bar{\mathbf{v}} = 0$ segue $\operatorname{div} \bar{\mathbf{v}} = 0$, essendo $\mu \neq 0$. QED

3.2.13 Nota. Per un fluido perfetto barotropico omogeneo incompressibile la funzione \mathcal{F} non è invertibile. \square

3.2.14 Definizione. Un fluido perfetto barotropico omogeneo è detto *gas* se la funzione $\mathcal{F} : \mathbb{R}_0^- \rightarrow \mathbb{R}^+$ è monotona decrescente e $\lim_{p \rightarrow 0} \mathcal{F} = 0$. \square

3.2.15 Nota. Per un gas la funzione \mathcal{F} è invertibile. \square

3.2.16 Nota. Un gas tende ad occupare lo spazio disponibile. Possiamo spiegare questo fatto intuitivamente come segue.

Supponiamo che il bordo del gas sia libero (cioè senza carico). Partendo, da una data densità di massa ed una data pressione iniziali, il gas tenderà ad espandersi, in base alla legge di moto, per effetto del gradiente di pressione. Contemporaneamente, la densità di massa diminuirà e quindi la pressione diminuirà in valore assoluto. Se il gas non è contenuto in un recipiente, questo processo continuerà fino al limite in cui la densità di massa e la pressione tendono a 0. Se il gas è contenuto in un recipiente, questo processo continuerà fino al limite in cui il gas raggiunge il bordo del recipiente. \square

3.2.17 Esempio. Un *gas perfetto* è un fluido perfetto barotropico omogeneo per cui

$$\mu = c p, \quad \text{con} \quad c \in \mathbb{R}^-.$$

In particolare, se la densità di massa è costante rispetto allo spazio (e quindi anche la pressione è costante rispetto allo spazio), allora l'uguaglianza precedente può essere scritta, ad ogni istante $t \in \mathbf{T}$, nel modo seguente

$$p_t V_t = \frac{m}{c},$$

dove V_t è il volume del dominio \mathbf{D}_t . \square

Usualmente, nel Corso di Fisica la legge precedente è scritta utilizzando una costante $c > 0$, perché si adotta la convenzione della “normale entrante”.

3.2.1.3 Equazione di moto

Nel caso di un fluido perfetto l'equazione di moto assume una forma interessante.

Nell'ulteriore caso di un fluido perfetto barotropico si può eliminare la densità di massa dall'equazione di moto con un opportuno cambio di variabile.

3.2.18 Corollario. Per un fluido perfetto l'equazione di moto diventa

$$\mu \bar{\mathbf{a}} = \bar{f} + \text{grad } p. \square$$

3.2.19 Corollario. [*Condizione per la statica.*] Per un fluido perfetto la condizione di equilibrio è

$$\bar{f} = -\text{grad } \mathbf{p} . \square$$

3.2.20 Nota. Al fine di scrivere l'equazione di moto di un fluido perfetto barotropico omogeneo in modo più conveniente, è utile riscaldare la pressione nel seguente modo.

Introduciamo la funzione

$$s : \mathbb{R}_0^- \rightarrow \mathbb{R} : \xi \mapsto s(\xi)$$

data dalla formula

$$s(\xi) := \int_{[k, \xi]} \frac{1}{\mathcal{F}(\lambda)} d\lambda : \mathbf{D} \rightarrow \mathbb{R},$$

dove $k \in \mathbb{R}$ è un'opportuna costante (da scegliere a seconda della forma della funzione $\mathcal{F} : \mathbb{R}_0^- \rightarrow \mathbb{R}^+$) e definiamo la *pressione riscalata* mediante la formula

$$\mathbf{p} := s \circ \mathbf{p} : \mathbf{D} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Dunque, consideriamo il cambiamento di variabile indotto dal seguente diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{D} & \xrightarrow{\mathbf{p}} & \mathbb{R} \\ & \searrow \mathbf{p} & \nearrow s \\ & & \mathbb{R}_0^- \end{array}$$

3.2.21 Esempio. Facciamo due esempi di pressione riscalata.

Nel caso di un fluido perfetto barotropico omogeneo incompressibile, scegliamo $k = 0$ ed otteniamo

$$\mathbf{p} = \frac{1}{\mu} \mathbf{p}.$$

Nel caso di un gas perfetto scegliamo $k = 1$ ed otteniamo

$$\mathbf{p} = \frac{1}{c} \log \mathbf{p} . \square$$

3.2.22 Nota. Al fine di scrivere l'equazione di moto di un fluido perfetto barotropico omogeneo in modo più conveniente, è utile definire la *densità di forza di massa*

$$\bar{b} := \frac{1}{\mu} \bar{f} : \mathbf{D} \rightarrow \mathbb{R}^+ . \square$$

3.2.23 Corollario. Per un fluido perfetto barotropico omogeneo l'equazione di moto può essere scritta nel modo seguente (in cui è eliminata la variabile μ)

$$\bar{\mathbf{a}} = \bar{b} + \text{grad } \mathbf{p} .$$

DIMOSTRAZIONE. Per la regola della catena e la regola di derivazione di un integrale, otteniamo

$$\mu \operatorname{grad} \mathbf{p} = \mu \operatorname{grad}(s \circ \mathbf{p}) = \mu ((D\mathbf{s}) \circ \mathbf{p}) \operatorname{grad} \mathbf{p} = \mu \left(\frac{1}{\mathcal{F} \circ \mathbf{p}} \right) \operatorname{grad} \mathbf{p} = \mu \frac{1}{\mu} \operatorname{grad} \mathbf{p} = \operatorname{grad} \mathbf{p}.$$

Perciò, l'equazione di moto diventa

$$\mu \bar{\mathbf{a}} = \mu \bar{\mathbf{b}} + \mu \operatorname{grad} \mathbf{p}$$

e, dato che μ è diversa da 0, si può dividere per μ . QED

3.2.24 Nota. Abbiamo un'ulteriore semplificazione nel caso in cui la densità di forze di massa sia conservativa, ossia provenga da un potenziale:

$$\bar{\mathbf{b}} = \operatorname{grad} U, \quad \text{con} \quad U : \mathbf{D} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Per esempio, nel caso notevole in cui la densità di forza di massa sia dovuta alla forza peso, tale densità di forza è conservativa ed abbiamo

$$\bar{\mathbf{b}} = -\gamma \bar{\mathbf{e}}_z, \quad U = -\gamma z,$$

dove $\gamma \in \mathbb{R}^+$ è l'accelerazione di gravità e dove ci siamo riferiti ad un sistema di coordinate cartesiano con il vettore $\bar{\mathbf{e}}_z$ "verticale e rivolto verso l'alto". \square

3.2.25 Corollario. Per un fluido perfetto barotropico omogeneo con densità di forza di massa conservativa la legge di moto può essere scritta come segue

$$\bar{\mathbf{a}} = \operatorname{grad} (U + \mathbf{p}). \square$$

3.2.26 Corollario. Per un fluido perfetto barotropico omogeneo con densità di forza di massa conservativa, abbiamo la seguente legge di conservazione

$$\delta \left(\frac{1}{2} \mathbf{v}^2 - U - \mathbf{p} \right) = 0.$$

DIMOSTRAZIONE. Infatti,

$$\delta \left(\frac{1}{2} \mathbf{v}^2 - U - \mathbf{p} \right) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{v} - \operatorname{grad} (U + \mathbf{p}) \cdot \mathbf{v} = 0 \cdot \mathbf{v} = 0. \text{ QED}$$

3.2.27 Esempio. [Bernoulli.] Per un fluido perfetto barotropico omogeneo incomprimibile con densità di forza di massa dovuta al peso, abbiamo la seguente legge di conservazione

$$\delta \left(\frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + \gamma z - \mathbf{p}/\mu \right) = 0.$$

Dunque, lungo il moto di una particella, la somma dei seguenti tre termini (la cui dimensione è una lunghezza) è costante rispetto al tempo

$$S := \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 / \gamma + z - \mathbf{p} / (\mu \gamma).$$

Il termine $\frac{1}{2}v^2/\gamma$ è detto la *quota cinetica*, perché è uguale alla quota in cui un grave che cade con velocità iniziale nulla raggiunge la velocità \bar{v} .

Il termine z è detto la *quota geometrica*.

Il termine $-p/(\mu\gamma)$ è detto la *quota piezometrica*, perché è uguale all'altezza di una colonna del fluido esercitante sul fondo la pressione statica p . \square

3.2.2 Elastici

Intreduciamo i continui elastici.

3.2.2.1 Elasticità finita

I continui elastici costituiscono un'importante categoria di continui, caratterizzata da una legge costitutiva che esprime la conservatività del tensore delle tensioni e quindi la relativa conservazione dell'energia.

Introduciamo la legge costitutiva elastica facendo varie ipotesi successive. Inoltre, illustreremo alcune di queste ipotesi mediante la loro stretta analogia con ipotesi analoghe relative al caso di una forza conservativa nella dinamica di una particella.

3.2.28 Definizione. *Prima ipotesi sulla legge costitutiva dei continui elastici.*

Supponiamo che, per ogni particella individuata dai dati iniziali $(t, p) \in \mathbf{D}$, il tensore delle tensioni $\sigma(s, C(s; t, p))$ nel punto finale $C(s; t, p)$ all'istante finale $s \in \mathbf{T}$ dipenda solo dal valore del tensore delle tensioni $\sigma(t, p)$ nel punto iniziale p all'istante iniziale t e dal tensore delle deformazioni $\mathcal{E}(s; t, p)$ (oltre alla necessaria, ma non semplice, correzione relativa all'effetto del movimento rigido solidale al moto continuo). Supponiamo inoltre che siano soddisfatte le necessarie relazioni di congruenza relative al caso $s = t$ ed alla composizione di due moti tra gli istanti $t, s, r \in \mathbf{T}$. \square

3.2.29 Nota. Ricordiamo che, nella trasformazione da t ad s , l'intorno infinitesimo della particella caratterizzata dai dati iniziali (t, p) ha subito una traslazione e una trasformazione che al prim'ordine è descritta dal tensore jacobiano $\hat{\mathcal{J}}_{(s;t)}(p) \in \bar{\mathbf{P}}^* \otimes \bar{\mathbf{P}}$, il quale può essere decomposto univocamente mediante la composizione di una rotazione $\hat{\mathcal{R}}_{(s;t)}(p) \in \bar{\mathbf{P}}^* \otimes \bar{\mathbf{P}}$ e di una deformazione $\hat{\mathcal{D}}_{(s;t)}(p) \in \bar{\mathbf{P}}^* \otimes \bar{\mathbf{P}}$. La nostra ipotesi dice che il tensore delle tensioni (corretto dell'effetto del movimento solidale al moto continuo) cambia tra l'istante iniziale e quello finale solo per effetto della deformazione e che la traslazione e la rotazione non influiscono sulle tensioni.

Dunque, da un punto di vista fisico, la nostra ipotesi dice che la variazione dello stato di tensione presso una particella è influenzato solo dalla variazione delle distanze relative tra le particelle in un suo intorno infinitesimo. \square

3.2.30 Definizione. *Seconda ipotesi sulla legge costitutiva dei continui elastici.*

Supponiamo che, per ogni particella, esista una funzione, detta *potenziale elastico*,

$$\mathcal{U} : S^2 \bar{\mathbf{P}}^* \rightarrow \mathbb{R} : \mathcal{E} \mapsto \mathcal{U}(\mathcal{E}),$$

tale che il tensore delle tensioni σ relativo a tale particella (corretto dell'effetto del movimento solidale al moto continuo) sia espresso da

$$\sigma = D\mathcal{U} . \square$$

3.2.31 Definizione. Un *sistema elastico* è definito come un sistema continuo la cui legge costitutiva soddisfa le due ipotesi precedenti. \square

3.2.32 Nota. Possiamo stabilire una stretta analogia tra le tensioni del continuo, con le ipotesi ora considerate, ed una forza conservativa agente su una particella, mediante le seguenti corrispondenze:

$$\begin{array}{llll} \text{deformazioni} & \Leftrightarrow & \text{posizioni} & \\ \text{tensioni dipendenti da deformazioni} & \Leftrightarrow & \text{forze posizionali} & \\ \text{potenziale funzione delle deformazioni} & \Leftrightarrow & \text{potenziale funzione delle posizioni} & \\ \text{tensioni = derivata del potenziale elastico} & \Leftrightarrow & \text{forza = derivata del potenziale} & \end{array}$$

\square

Continuando l'analogia, possiamo dimostrare il seguente risultato.

3.2.33 Proposizione. Le seguenti condizioni sono equivalenti:

1) il tensore delle tensioni è la derivata del potenziale elastico

$$\sigma = D\mathcal{U} ;$$

2) il lavoro delle tensioni si annulla per ogni cammino chiuso nello spazio delle deformazioni, ossia

$$L[\sigma](r; s, t) = 0 ,$$

relativamente ad una qualunque particella i cui dati iniziali sono (t, p) , durante un qualunque moto tra gli istanti $r, t \in \mathbf{T}$, tale che $\mathcal{X}(r; t, p) = 0$. \square

Continuando ancora l'analogia, possiamo dimostrare un teorema di conservazione dell'energia relativo alle tensioni.

3.2.34 Proposizione. Abbiamo

$$\delta(T - \mathcal{U}) = \bar{f} \cdot \bar{v} . \square$$

Nel caso particolare in cui anche la densità delle forze di volume sia conservativa, possiamo aggiungere il suo potenziale al potenziale delle forze di superficie ed ottenere così una piena legge di conservazione dell'energia.

3.2.35 Nota. Durante il moto del continuo l'energia potenziale delle tensioni varia a causa della variazione delle distanze tra le particelle vicine, ma se il continuo subisce una trasformazione in cui le distanze tra le particelle vicine ritornano al valore iniziale, allora l'energia potenziale ritorna al valore iniziale. \square

Facciamo ora un'ulteriore ipotesi semplificativa.

3.2.36 Definizione. *Terza ipotesi sulla legge costitutiva dei continui elastici.*

Un sistema elastico è detto *omogeneo* se la legge costitutiva è *omogenea*, ossia se la dipendenza del tensore delle tensioni dal tensore delle deformazioni è la stessa per tutte le particelle. \square

Chiaramente, per un sistema elastico omogeneo la dipendenza del potenziale elastico dal tensore delle deformazioni è la stessa per tutte le particelle.

3.2.2.2 Elasticità lineare

Le idee che abbiamo ora espresso sono abbastanza intuitive, ma una formulazione rigorosa delle ipotesi e delle loro conseguenze in termini di deformazioni finite è delicata, a causa della difficoltà di tenere conto adeguatamente delle relazioni di congruenza con il moto a differenti istanti finali.

D'altra parte, in molte applicazioni siamo interessati a trasformazioni “piccole” del continuo tra l'istante iniziale e l'istante finale, per cui è sufficiente un'espressione approssimata della legge costitutiva elastica.

Perciò, facciamo perciò un'ipotesi molto utile. Questa non è un'ulteriore ipotesi sulla legge costitutiva, ma piuttosto un'ipotesi sulla trasformazione del continuo ed una conseguente approssimazione della legge costitutiva.

3.2.37 Definizione. *Quarta ipotesi sull'approssimazione lineare.*

Diciamo *approssimazione quasi statica* l'approssimazione del moto del continuo e del tensore delle tensioni in cui ci limitiamo a considerare trasformazioni *infinitesime* del continuo a partire da uno stato iniziale con tensione iniziale *nulla*. \square

Consideriamo, dunque, l'approssimazione quasistatica del moto e la conseguente approssimazione lineare della legge costitutiva.

3.2.38 Nota. Nell'approssimazione quasistatica, abbiamo spostamenti $\bar{\mathbf{u}}$ *infinitesimi* e tensori delle deformazioni infinitesime $\underline{\epsilon}$ *infinitesime*.

1) Allora, possiamo approssimare la prima ipotesi sulla dipendenza del tensore delle tensioni dal tensore delle deformazioni, mediante un'equazione del tipo

$$\sigma = \hat{K}(\underline{\epsilon})$$

dove

$$\hat{K} : S^2 \bar{\mathbf{P}}^* \rightarrow S^2 \bar{\mathbf{P}}^* : \underline{\epsilon} \mapsto \hat{K}(\underline{\epsilon})$$

è un'applicazione lineare, detta *tensore dell'elasticità*.

Conformemente all'ipotesi di trasformazione quasi statica, abbiamo supposto che il tensore dell'elasticità non dipenda dal tempo.

Conformemente alla terza ipotesi sull'omogeneità, abbiamo supposto che il tensore dell'elasticità non dipenda dalla posizione.

2) Inoltre, possiamo approssimare la seconda ipotesi sulla legge costitutiva approssimando il potenziale elastico come una funzione

$$\mathcal{U} : S^2 \bar{\mathbf{P}}^* \rightarrow \mathbb{R} : \underline{\epsilon} \mapsto \mathcal{U}(\underline{\epsilon}),$$

tale che

$$\underline{\sigma} = D\mathcal{U}. \square$$

3.2.39 Proposizione. Il tensore dell'elasticità può essere considerato come un tensore del tipo

$$\hat{K} \in S^2 \bar{\mathbf{P}}^* \otimes S^2 \bar{\mathbf{P}} \subset \bar{\mathbf{P}}^* \otimes \bar{\mathbf{P}}^* \otimes \bar{\mathbf{P}} \otimes \bar{\mathbf{P}}.$$

Consideriamo una base ortonormale (\bar{e}_i) di $\bar{\mathbf{P}}$ e la sua duale (\bar{e}^j) .

Allora, possiamo scrivere

$$\hat{K} = K_{ij}{}^{hk} (\bar{e}^i \otimes \bar{e}^j) \otimes (\bar{e}_h \otimes \bar{e}_k).$$

Ossia, abbiamo

$$\sigma_{ij} = K_{ij}{}^{hk} \epsilon_{hk}.$$

Inoltre, dato che la base è ortonormale, abbiamo

$$K_{ij}{}^{hk} = K^{ij}{}^{hk} = K^{ij}{}_{hk} = K_{ij}{}_{hk}. \square$$

3.2.40 Corollario. Il tensore dell'elasticità \hat{K} ha non più di 36 componenti indipendenti.

DIMOSTRAZIONE. Infatti, la dimensione dello spazio $S^2 \bar{\mathbf{P}}^*$ è 6. \square

3.2.41 Proposizione. Il tensore dell'elasticità \hat{K} è simmetrico.

DIMOSTRAZIONE. Ricordiamo che

$$(x^{(ij)})_{1 \leq i \leq j \leq 3} := (\bar{e}^i \otimes \bar{e}^j)_{1 \leq i \leq j \leq 3} : S^2 \bar{\mathbf{P}} \rightarrow \mathbb{R}$$

è un sistema di coordinate dello spazio $S^2 \bar{\mathbf{P}}$.

Il tensore delle tensioni $\bar{\sigma}$ è conservativo. Perciò, per il Lemma di Poincaré, le derivate parziali in croce delle componenti di $\underline{\sigma}$ sono uguali. Cioè, abbiamo

$$\partial_{(hk)} \sigma_{(ij)} = \partial_{(ij)} \sigma_{(hk)},$$

dove $\partial_{(hk)}$ indica la derivata parziale rispetto alla coordinata $x^{(hk)}$.

Allora, tenendo conto dell'espressione lineare di $\underline{\sigma}$ rispetto ad $\underline{\epsilon}$, otteniamo

$$K_{ij}{}_{hk} \equiv \partial_{(hk)} \sigma_{(ij)} = \partial_{(ij)} \sigma_{(hk)} \equiv K_{hk}{}_{ij}. \text{ QED}$$

3.2.42 Corollario. Il tensore dell'elasticità \hat{K} ha non più di 21 componenti indipendenti. \square

3.2.43 Proposizione. Il potenziale elastico è la funzione (definita a meno di una costante additiva)

$$\mathcal{U} : S^2 \bar{\mathbf{P}}^* \rightarrow \mathbb{R} : \hat{\epsilon} \mapsto \frac{1}{2} \bar{K}(\underline{\epsilon}, \underline{\epsilon}).$$

L'espressione del potenziale elastico (a meno di una costante additiva), in una base ortonormale, è

$$\mathcal{U}(\underline{\epsilon}) = \frac{1}{2} K^{ij\ hk} \epsilon_{ij} \epsilon_{hk}.$$

DIMOSTRAZIONE. Infatti, se $\mathcal{U}(\underline{\epsilon}) = \frac{1}{2} \bar{K}(\underline{\epsilon}, \underline{\epsilon})$ allora otteniamo

$$(D\mathcal{U})(\underline{\epsilon}) = \hat{K}(\underline{\epsilon}).$$

3.2.44 Nota. Osserviamo che anche se \hat{K} non fosse simmetrico, allora la funzione \mathcal{U} coinvolgerebbe solo la componente simmetrica di \bar{K} , perché la componente antisimmetrica darebbe risultato nullo sulla coppia $(\hat{\epsilon}, \hat{\epsilon})$. \square

3.2.2.3 Elasticità lineare isotropa

Per semplificare ulteriormente le nostre ipotesi consideriamo il caso particolare dell'elasticità lineare in cui il tensore dell'elasticità è isotropo, ovvero si comporta ugualmente in tutte le direzioni ed i versi dello spazio delle posizioni.

3.2.45 Lemma. Sia

$$\hat{r} : \bar{\mathbf{P}} \rightarrow \bar{\mathbf{P}}$$

un isomorfismo. Allora otteniamo l'isomorfismo

$$\hat{R} : L(\bar{\mathbf{P}}, \bar{\mathbf{P}}) \rightarrow L(\bar{\mathbf{P}}, \bar{\mathbf{P}}),$$

dato da, per ogni $\hat{f} \in L(\bar{\mathbf{P}}, \bar{\mathbf{P}})$, da

$$(\hat{R}(\hat{f}))(\bar{v}) := \hat{r}\left(\hat{f}(\hat{r}^{-1}(\bar{v}))\right), \quad \forall v \in \bar{\mathbf{P}}.$$

In particolare, se \hat{r} è un operatore ortogonale, allora \hat{R} trasforma tensori simmetrici in tensori simmetrici. \square

3.2.46 Esempio. Se $\hat{r} = -\text{id} : \bar{\mathbf{P}} \rightarrow \bar{\mathbf{P}}$, allora otteniamo

$$\hat{R}(\hat{f}) = \hat{f}. \square$$

3.2.47 Definizione. *Quinta ipotesi.* Il tensore \hat{K} è detto *isotropo* se, per ogni $\hat{\epsilon} \in \text{Sim}(\bar{\mathbf{P}}, \bar{\mathbf{P}})$ e per ogni operatore ortogonale $\hat{r} : \bar{\mathbf{P}} \rightarrow \bar{\mathbf{P}}$, abbiamo

$$\hat{K}(\hat{R}(\hat{\epsilon})) = \hat{R}(\hat{K}(\hat{\epsilon})) . \square$$

Supponiamo che \hat{K} sia *isotropo*.

3.2.48 Nota. Dunque, siano

$$\hat{\epsilon} \in \text{Sim}(\bar{\mathbf{P}}, \bar{\mathbf{P}}) \quad \text{e} \quad \hat{\sigma} := \hat{K}(\hat{\epsilon}) \in \text{Sim}(\bar{\mathbf{P}}, \bar{\mathbf{P}}),$$

e sia

$$\hat{r} : \bar{\mathbf{P}} \rightarrow \bar{\mathbf{P}}$$

un qualunque operatore ortogonale.

Allora, per ogni vettore $\bar{n} \in \bar{\mathbf{P}}$, otteniamo

$$\hat{K}(\hat{R}(\hat{\epsilon}))(\bar{n}) = \left(\hat{r}(\hat{K}(\hat{\epsilon})) \right) (\hat{r}^{-1}(\bar{n}))$$

In altre parole, supponiamo che le proprietà elastiche del continuo non dipendano dalla direzione spaziale e dall'orientazione. \square

3.2.49 Nota. La nozione di isotropia per il tensore delle tensioni $\hat{\sigma}$ è diversa dalla nozione di isotropia per il tensore dell'elasticità \hat{K} .

Infatti, nel primo caso si considerano tutti gli operatori ortogonali \hat{r} che operano sullo spazio $\bar{\mathbf{P}}$ (in cui opera $\hat{\sigma}$); invece, nel secondo caso si considerano solo gli operatori ortogonali \hat{R} sullo spazio $\text{Sim}(\bar{\mathbf{P}}, \bar{\mathbf{P}})$ (in cui opera \hat{K}) che provengono da operatori ortogonali \hat{r} dello spazio $\bar{\mathbf{P}}$.

Per esempio, l'operatore ortogonale $-1 : \text{Sim}(\bar{\mathbf{P}}, \bar{\mathbf{P}}) \rightarrow \text{Sim}(\bar{\mathbf{P}}, \bar{\mathbf{P}})$ non proviene da nessun operatore ortogonale (reale) di $\bar{\mathbf{P}}$.

Inoltre, in generale, l'isotropia del tensore dell'elasticità \hat{K} non implica l'isotropia del tensore delle tensioni $\hat{\sigma} = \hat{K}(\hat{\epsilon})$. \square

3.2.50 Proposizione. Il tensore \hat{K} è dato da una formula del tipo

$$\hat{K}(\hat{\epsilon}) = 2\mu \hat{\epsilon} + \lambda \text{tr} \hat{\epsilon} \text{id}, \quad \text{con} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

DIMOSTRAZIONE. *Facoltativa.* La dimostrazione è molto intuitiva, anche se i dettagli sembrano elaborati.

In sintesi, si incomincia a considerare un tensore delle deformazioni infinitesime in cui ci sia un allungamento unitario in una direzione ed allungamenti nulli nelle direzioni ortogonali.

Considerando l'isotropia relativamente ad opportuni ribaltamenti, si fa vedere che:

- la tensione relativa alla faccia ortogonale alla direzione dell'allungamento è ortogonale a tale direzione,

- la tensione relativa ad ogni faccia parallela alla direzione dell'allungamento è ortogonale alla faccia. Poi, considerando l'isotropia relativamente ad opportune rotazioni, si fa vedere che

- le tensioni relative alle facce parallele alla direzione dell'allungamento sono uguali in modulo.

Poi, si diagonalizza il tensore delle deformazioni infinitesime, si applica il risultato precedente a ciascuna delle tre componenti di tale tensore. Considerando opportune rotazioni, si dimostra che - i coefficienti così ottenuti non dipendono dalla direzione degli assi principali.

Finalmente, sommando i contributi relativamente agli assi principali del tensore delle deformazioni infinitesime, si ottiene il risultato.

Più in dettaglio, la dimostrazione, tappa per tappa, è la seguente.

1) Consideriamo una base ortonormale (\bar{e}_i) e la sua duale (\underline{e}^i) .

Incominciamo con il caso in cui sia

$$\hat{\epsilon} = \underline{e}^1 \otimes \bar{e}_1,$$

ovvero in cui ci sia un allungamento unitario nella direzione del vettore \bar{e}_1 ed allungamenti nulli nelle direzioni dei vettori \bar{e}_2 e \bar{e}_3 .

Sia

$$\hat{\sigma} := \hat{K}(\hat{\epsilon}).$$

Dimostriamo che $\hat{\sigma}$ è del tipo

$$\hat{\sigma} = \alpha \underline{e}^1 \otimes \bar{e}_1 + \beta (\underline{e}^2 \otimes \bar{e}_2 + \underline{e}^3 \otimes \bar{e}_3).$$

a) Poniamo

$$\hat{\sigma}(\bar{e}_1) = \alpha \bar{e}_1 + \beta \bar{e}_2 + \gamma \bar{e}_3$$

e dimostriamo che

$$\beta = \gamma = 0.$$

A tal fine, consideriamo la trasformazione ortogonale data da

$$\hat{r}(\bar{e}_1) = +\bar{e}_1, \quad \hat{r}(\bar{e}_2) = -\bar{e}_2, \quad \hat{r}(\bar{e}_3) = -\bar{e}_3.$$

Facendo operare questa trasformazione, otteniamo

$$\hat{R}(\hat{\epsilon}) = \hat{\epsilon}$$

e quindi

$$\begin{aligned} \hat{R}(\hat{\sigma}) &:= \hat{R}(\hat{K}(\hat{\epsilon})) = \hat{K}(\hat{R}(\hat{\epsilon})) = \hat{K}(\hat{\epsilon}) \\ &= \hat{\sigma}, \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} \alpha \bar{e}_1 + \beta \bar{e}_2 + \gamma \bar{e}_3 &:= \hat{\sigma}(\bar{e}_1) \\ &= (\hat{R}(\hat{\sigma}))(\bar{e}_1) \\ &= \hat{r}(\hat{\sigma}(\hat{r}^{-1}(\bar{e}_1))) \\ &= \hat{r}(\hat{\sigma}(\bar{e}_1)) \\ &= \hat{r}(\alpha \bar{e}_1 + \beta \bar{e}_2 + \gamma \bar{e}_3) \\ &= \alpha \bar{e}_1 - \beta \bar{e}_2 - \gamma \bar{e}_3, \end{aligned}$$

da cui

$$\beta = \gamma = 0.$$

b) Poniamo

$$\hat{\sigma}(\bar{e}_2) = \alpha \bar{e}_1 + \beta \bar{e}_2 + \gamma \bar{e}_3$$

e dimostriamo che

$$\alpha = \gamma = 0.$$

A tal fine, consideriamo la trasformazione ortogonale data da

$$\hat{r}(\bar{e}_1) = -\bar{e}_1, \quad \hat{r}(\bar{e}_2) = +\bar{e}_2, \quad \hat{r}(\bar{e}_3) = -\bar{e}_3.$$

Facendo operare questa trasformazione, otteniamo

$$\hat{R}(\hat{\epsilon}) = \hat{\epsilon}$$

e quindi

$$\begin{aligned} \hat{R}(\hat{\sigma}) &:= \hat{R}(\hat{K}(\hat{\epsilon})) = \hat{K}(\hat{R}(\hat{\epsilon})) = \hat{K}(\hat{\epsilon}) \\ &= \hat{\sigma}, \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} \alpha \bar{e}_1 + \beta \bar{e}_2 + \gamma \bar{e}_3 &:= \hat{\sigma}(\bar{e}_2) \\ &= (\hat{R}(\hat{\sigma}))(\bar{e}_2) \\ &= \hat{r}(\hat{\sigma}(r^{-1}(\bar{e}_2))) \\ &= \hat{r}(\hat{\sigma}(\bar{e}_2)) \\ &= \hat{r}(\alpha \bar{e}_1 + \beta \bar{e}_2 + \gamma \bar{e}_3) \\ &= -\alpha \bar{e}_1 + \beta \bar{e}_2 - \gamma \bar{e}_3, \end{aligned}$$

da cui

$$\alpha = \gamma = 0.$$

c) Poniamo

$$\hat{\sigma}(\bar{e}_3) = \alpha \bar{e}_1 + \beta \bar{e}_2 + \gamma \bar{e}_3$$

e dimostriamo che

$$\alpha = \beta = 0.$$

A tal fine, consideriamo la trasformazione ortogonale data da

$$\hat{r}(\bar{e}_1) = -\bar{e}_1, \quad \hat{r}(\bar{e}_2) = -\bar{e}_2, \quad \hat{r}(\bar{e}_3) = +\bar{e}_3.$$

Facendo operare questa trasformazione, otteniamo

$$\hat{R}(\hat{\epsilon}) = \hat{\epsilon}$$

e quindi

$$\begin{aligned} \hat{R}(\hat{\sigma}) &:= \hat{R}(\hat{K}(\hat{\epsilon})) = \hat{K}(\hat{R}(\hat{\epsilon})) = \hat{K}(\hat{\epsilon}) \\ &= \hat{\sigma}, \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned}
 \alpha \bar{e}_1 + \beta \bar{e}_2 + \gamma \bar{e}_3 &:= \hat{\sigma}(\bar{e}_2) \\
 &= (\hat{R}(\hat{\sigma}))(\bar{e}_3) \\
 &= \hat{r}\left(\hat{\sigma}(r^{-1}(\bar{e}_3))\right) \\
 &= \hat{r}(\hat{\sigma}(\bar{e}_3)) \\
 &= \hat{r}(\alpha \bar{e}_1 + \beta \bar{e}_2 + \gamma \bar{e}_3) \\
 &= -\alpha \bar{e}_1 - \beta \bar{e}_2 + \gamma \bar{e}_3,
 \end{aligned}$$

da cui

$$\alpha = \beta = 0.$$

d) Dunque, abbiamo dimostrato che valgono delle uguaglianze

$$\hat{\sigma}(\bar{e}_1) = \alpha \bar{e}_1, \quad \hat{\sigma}(\bar{e}_2) = \beta \bar{e}_2, \quad \hat{\sigma}(\bar{e}_3) = \gamma \bar{e}_2.$$

Dimostriamo che

$$\beta = \gamma.$$

A tal fine, consideriamo la trasformazione ortogonale data da

$$\hat{r}(\bar{e}_1) = \bar{e}_1, \quad \hat{r}(\bar{e}_2) = \bar{e}_3, \quad \hat{r}(\bar{e}_3) = \bar{e}_2.$$

Facendo operare questa trasformazione, otteniamo

$$\hat{R}(\hat{\epsilon}) = \hat{\epsilon}$$

e quindi

$$\begin{aligned}
 \hat{R}(\hat{\sigma}) &:= \hat{R}(\hat{K}(\hat{\epsilon})) = \hat{K}(\hat{R}(\hat{\epsilon})) = \hat{K}(\hat{\epsilon}) \\
 &= \hat{\sigma},
 \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned}
 \beta \bar{e}_2 &:= \hat{\sigma}(\bar{e}_2) \\
 &= (\hat{R}(\hat{\sigma}))(\bar{e}_2) \\
 &= \hat{r}\left(\hat{\sigma}(r^{-1}(\bar{e}_2))\right) \\
 &= \hat{r}(\hat{\sigma}(\bar{e}_3)) \\
 &= \hat{r}(\gamma \bar{e}_3) \\
 &= \gamma \bar{e}_2,
 \end{aligned}$$

da cui

$$\beta = \gamma.$$

2) Ricordiamo che $\hat{\epsilon}$ è simmetrico e quindi diagonalizzabile mediante una base ortonormale (\bar{e}_i) secondo una formula del tipo

$$\hat{\epsilon} = a_1 \underline{e}^1 \otimes \bar{e}_1 + a_2 \underline{e}^2 \otimes \bar{e}_2 + a_3 \underline{e}^3 \otimes \bar{e}_3,$$

dove (\underline{e}^i) è la base duale di (\bar{e}_i) .

Per la linearità di \hat{K} , otteniamo

$$\begin{aligned}\hat{\sigma} &= a_1 \hat{\sigma}^1 + a_2 \hat{\sigma}^2 + a_3 \hat{\sigma}^3 \\ &= a_1 \hat{K}(\underline{e}^1 \otimes \bar{e}_1) + a_2 \hat{K}(\underline{e}^2 \otimes \bar{e}_2) + a_3 \hat{K}(\underline{e}^3 \otimes \bar{e}_3),\end{aligned}$$

dove abbiamo posto

$$\hat{\sigma}^i := \hat{K}(\underline{e}^i \otimes \bar{e}_i).$$

I risultati della tappa 1) implicano una formula del tipo

$$\begin{aligned}\underline{\sigma}^1(\bar{e}_1) &= \nu^1 \bar{e}_1, & \underline{\sigma}^1(\bar{e}_2) &= \lambda^1 \bar{e}_2, & \underline{\sigma}^1(\bar{e}_3) &= \lambda^1 \bar{e}_3, \\ \underline{\sigma}^2(\bar{e}_2) &= \nu^2 \bar{e}_2, & \underline{\sigma}^2(\bar{e}_1) &= \lambda^2 \bar{e}_1, & \underline{\sigma}^2(\bar{e}_3) &= \lambda^2 \bar{e}_3, \\ \underline{\sigma}^3(\bar{e}_3) &= \nu^3 \bar{e}_3, & \underline{\sigma}^3(\bar{e}_1) &= \lambda^3 \bar{e}_1, & \underline{\sigma}^3(\bar{e}_2) &= \lambda^3 \bar{e}_2,\end{aligned}$$

Inoltre, considerando un'opportuna trasformazione ortogonale, si può dimostrare, in modo analogo a d), che

$$\lambda^1 = \lambda^2 = \lambda^3 \equiv \lambda \quad \text{e} \quad \nu^1 = \nu^2 = \nu^3 \equiv \nu.$$

Dunque, sommando membro a membro, la formula

$$\hat{\sigma} = a_1 \hat{\sigma}^1 + a_2 \hat{\sigma}^2 + a_3 \hat{\sigma}^3$$

diventa

$$\begin{aligned}\hat{\sigma} &= a(\nu \underline{e}^1 \otimes \bar{e}_1 + \lambda(\underline{e}^2 \otimes \bar{e}_2 + \underline{e}^3 \otimes \bar{e}_3)) \\ &\quad + b(\nu \underline{e}^2 \otimes \bar{e}_2 + \lambda(\underline{e}^1 \otimes \bar{e}_1 + \underline{e}^3 \otimes \bar{e}_3)) \\ &\quad + c(\nu \underline{e}^3 \otimes \bar{e}_3 + \lambda(\underline{e}^1 \otimes \bar{e}_1 + \underline{e}^2 \otimes \bar{e}_2))\end{aligned}$$

ossia, aggiungendo e togliendo un termine opportuno,

$$\begin{aligned}\hat{\sigma} &= a((\nu - \lambda) \underline{e}_1 \otimes \bar{e}_1 + \lambda(\underline{e}_1 \otimes \bar{e}_1 + \underline{e}^2 \otimes \bar{e}_2 + \underline{e}^3 \otimes \bar{e}_3)) \\ &\quad + b((\nu - \lambda) \underline{e}^2 \otimes \bar{e}_2 + \lambda(\underline{e}_1 \otimes \bar{e}_1 + \underline{e}^2 \otimes \bar{e}_2 + \underline{e}^3 \otimes \bar{e}_3)) \\ &\quad + c((\nu - \lambda) \underline{e}^3 \otimes \bar{e}_3 + \lambda(\underline{e}_1 \otimes \bar{e}_1 + \underline{e}^2 \otimes \bar{e}_2 + \underline{e}^3 \otimes \bar{e}_3)),\end{aligned}$$

ossia

$$\begin{aligned}\hat{\sigma} &= (\nu - \lambda)(a \underline{e}^1 \otimes \bar{e}_1 + b \underline{e}^2 \otimes \bar{e}_2 + c \underline{e}^3 \otimes \bar{e}_3) \\ &\quad + \lambda(a + b + c)(\underline{e}^1 \otimes \bar{e}_1 + \underline{e}^2 \otimes \bar{e}_2 + \underline{e}^3 \otimes \bar{e}_3),\end{aligned}$$

ossia

$$\hat{\sigma} = 2\mu \hat{\epsilon} + \lambda \operatorname{tr} \hat{\epsilon} \operatorname{id},$$

dove

$$2\mu := \nu - \lambda. \text{ QED}$$

Dunque, l'approssimazione lineare della legge costitutiva per un continuo elastico omogeneo ed isotropo è caratterizzata dalle due costanti

$$\lambda \in \mathbb{R}, \quad \mu \in \mathbb{R},$$

dette *costanti di Lamé*.

Quindi, abbiamo il seguente risultato.

3.2.51 Corollario. Per un sistema elastico omogeneo isotropo caratterizzato dalle costanti di Lamé λ e μ , nell'approssimazione lineare, il tensore delle tensioni $\hat{\sigma}$ generato dal tensore delle deformazioni $\hat{\epsilon}$ è dato dall'uguaglianza

$$\hat{\sigma} = 2\mu \hat{\epsilon} + \lambda \operatorname{tr} \hat{\epsilon} \hat{\text{id}},$$

la cui espressione in coordinate è

$$\sigma_j^i = 2\mu \epsilon_j^i + \lambda \left(\sum_h \epsilon_h^h \right) \delta_j^i. \square$$

3.2.52 Nota. La precedente legge costitutiva dice che una deformazione infinitesima $\underline{\epsilon}$ produce una tensione $\underline{\sigma}$ costituita da una componente proporzionale alla deformazione infinitesima stessa e da una componente isotropa proporzionale alla variazione di volume infinitesima. \square

3.2.53 Esempio. Nel caso particolare in cui il tensore delle deformazioni infinitesime sia isotropo, ossia in cui

$$\hat{\epsilon} = a \hat{\text{id}},$$

anche il tensore delle tensioni risulta isotropo. Più precisamente, otteniamo

$$\hat{\sigma} = (2\mu + 3\lambda) a \hat{\text{id}}. \square$$

3.2.54 Esempio. Nel caso particolare in cui il tensore delle deformazioni infinitesime abbia traccia nulla, ossia in cui

$$\operatorname{tr} \hat{\epsilon} = 0,$$

il tensore è proporzionale al tensore delle deformazioni infinitesime. Più precisamente, otteniamo

$$\hat{\sigma} = 2\mu \hat{\epsilon}. \square$$

3.2.55 Corollario. La densità di potenza delle tensioni è data dall'eguaglianza

$$\underline{\sigma} \cdot \underline{\epsilon} = 2\mu (\underline{\epsilon} \cdot \underline{\epsilon}) + \lambda (\operatorname{tr} \hat{\epsilon})^2,$$

ossia, equivalentemente, dall'eguaglianza

$$\hat{\sigma} \cdot \hat{\epsilon} = 2\mu (\hat{\epsilon} \cdot \hat{\epsilon}) + \lambda (\operatorname{tr} \hat{\epsilon})^2.$$

DIMOSTRAZIONE. Dall'uguaglianza

$$\underline{g} \cdot \underline{\epsilon} = \operatorname{tr} \hat{\epsilon}$$

segue

$$\begin{aligned} \underline{\sigma} \cdot \underline{\epsilon} &= (2\mu \underline{\epsilon} + \lambda (\operatorname{tr} \hat{\epsilon}) \underline{g}) \cdot \underline{\epsilon} \\ &= 2\mu (\underline{\epsilon} \cdot \underline{\epsilon}) + \lambda (\operatorname{tr} \hat{\epsilon}) (\underline{g} \cdot \underline{\epsilon}) \\ &= 2\mu (\underline{\epsilon} \cdot \underline{\epsilon}) + \lambda (\operatorname{tr} \hat{\epsilon})^2. \text{ QED} \end{aligned}$$

Equivalentemente, dall'uguaglianza

$$\hat{\text{id}} \cdot \hat{\epsilon} = \text{tr } \hat{\epsilon}$$

segue

$$\begin{aligned} \hat{\sigma} \cdot \hat{\epsilon} &= (2\mu \hat{\epsilon} + \lambda (\text{tr } \hat{\epsilon}) \hat{\text{id}}) \cdot \hat{\epsilon} \\ &= 2\mu (\hat{\epsilon} \cdot \hat{\epsilon}) + \lambda (\text{tr } \hat{\epsilon}) (\hat{\text{id}} \cdot \hat{\epsilon}) \\ &= 2\mu (\hat{\epsilon} \cdot \hat{\epsilon}) + \lambda (\text{tr } \hat{\epsilon})^2. \text{ QED} \end{aligned}$$

3.2.2.4 Elasticità lineare isotropa: inversione della legge costitutiva

Possiamo scrivere la legge costitutiva in un secondo modo interessante, invertendo l'applicazione lineare \hat{K} , cioè esprimendo la dipendenza del tensore delle deformazioni da quello delle tensioni.

Questa inversione può essere fatta sotto certe condizioni sul valore delle costanti di Lamé.

Per ottenere questo risultato, conviene, innanzitutto, riscrivere la precedente legge costitutiva in un altro modo conveniente.

3.2.56 Lemma. Possiamo decomporre univocamente ogni tensore simmetrico

$$\hat{\tau} \in \text{End}(\bar{\mathbf{P}})$$

in una componente a traccia nulla più una componente isotropa, mediante la formula

$$\hat{\tau} = \left(\hat{\tau} - \frac{1}{3} \text{tr } \hat{\tau} \hat{\text{id}} \right) + \frac{1}{3} \text{tr } \hat{\tau} \hat{\text{id}}. \square$$

3.2.57 Corollario. Il tensore delle tensioni può essere espresso equivalentemente mediante la formula

$$\hat{\sigma} = 2\mu \left(\hat{\epsilon} - \frac{1}{3} \text{tr } \hat{\epsilon} \text{id} \right) + \left(\lambda + \frac{2}{3} \mu \right) \text{tr } \hat{\epsilon} \text{id}. \square$$

3.2.58 Corollario. Abbiamo

$$\text{tr } \hat{\sigma} = (3\lambda + 2\mu) \text{tr } \hat{\epsilon}. \square$$

Dunque, l'approssimazione lineare della legge costitutiva per un continuo elastico omogeneo ed isotropo è caratterizzata dalle due costanti

$$\lambda \in \mathbb{R}, \quad \mu \in \mathbb{R},$$

o, equivalentemente, dalle due costanti

$$2\mu \in \mathbb{R}, \quad \lambda + \frac{2}{3}\mu \in \mathbb{R}.$$

Supponiamo ora che

$$\mu \neq 0, \quad 2\mu + 3\lambda \neq 0.$$

3.2.59 Corollario. L'applicazione \hat{K} è invertibile ed abbiamo

$$\hat{\epsilon} := \hat{K}^{-1}(\hat{\sigma}) = \frac{1}{2\mu} \left(\hat{\sigma} - \frac{\lambda}{2\mu + 3\lambda} \text{tr } \hat{\sigma} \text{ id} \right).$$

DIMOSTRAZIONE. L'uguaglianza

$$\hat{\sigma} = 2\mu \hat{\epsilon} + \lambda \text{tr } \hat{\epsilon} \text{ id}$$

diventa, in virtù del precedente corollario

$$\hat{\sigma} = 2\mu \hat{\epsilon} + \frac{\lambda}{2\mu + 3\lambda} \text{tr } \hat{\sigma} \text{ id},$$

da cui segue immediatamente il risultato. QED

Possiamo scrivere la legge costitutiva in un terzo modo interessante, introducendo delle nuove costanti equivalenti alle costanti di Lamé (sotto certe condizioni).

3.2.60 Definizione. Se

$$\mu \neq 0, \quad 2\mu + 3\lambda \neq 0, \quad \lambda + \mu \neq 0,$$

allora definiamo le due nuove costanti

$$E := \mu \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu}, \quad \nu := \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)},$$

che sono chiamate *modulo di Young* e *modulo di Poisson*, rispettivamente. \square

Supponiamo ulteriormente che

$$1 + \nu \neq 0, \quad 1 - 2\nu \neq 0.$$

3.2.61 Lemma. Le due uguaglianze precedenti sono invertibili ed otteniamo

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}. \square$$

3.2.62 Lemma. Abbiamo

$$\lambda + \mu = \frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad 3\lambda + 2\nu = \frac{E}{1-2\nu}. \square$$

3.2.63 Proposizione. Per un sistema elastico omogeneo isotropo caratterizzato dal modulo di Young E e dal modulo di Poisson ν , nell'approssimazione lineare, il tensore delle deformazioni $\hat{\epsilon}$ generato dal tensore delle tensioni $\hat{\sigma}$ è dato dall'uguaglianza

$$\hat{\epsilon} = \frac{1 + \nu}{E} \hat{\sigma} - \frac{\nu}{E} \text{tr} \hat{\sigma} \text{id},$$

la cui espressione in coordinate è

$$\epsilon_j^i = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_j^i - \frac{\nu}{E} \left(\sum_h \sigma_h^h \right) \delta_j^i. \square$$

Dunque, l'approssimazione lineare della legge costitutiva per un continuo elastico omogeneo ed isotropo è caratterizzata dalle due costanti

$$\lambda \in \mathbb{R}, \quad \mu \in \mathbb{R},$$

o, equivalentemente, dalle due costanti

$$2\mu \in \mathbb{R}, \quad \lambda + \frac{2}{3}\mu \in \mathbb{R},$$

o, equivalentemente, dalle due costanti

$$E \in \mathbb{R}, \quad \nu \in \mathbb{R}.$$

Possiamo mettere in evidenza il significato dei due coefficienti E e ν mediante il seguente esempio.

3.2.64 Nota. Possiamo interpretare bene il significato delle due costanti E e ν considerando il caso in cui il tensore delle tensioni abbia un solo autovalore non nullo (cioè il caso in cui gli sforzi relativi a due delle tre facce principali ortogonali siano nulli).

Infatti, in tal caso, scegliendo opportunamente la base ortonormale $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$, possiamo scrivere

$$\hat{\sigma} = \sigma_1^1 \underline{e}^1 \otimes \bar{e}_1$$

ed otteniamo

$$\begin{aligned} \epsilon_1^1 &= \frac{1}{E} \sigma_1^1, & \epsilon_2^2 &= -\frac{\nu}{E} \sigma_1^1, & \epsilon_3^3 &= -\frac{\nu}{E} \sigma_1^1, \\ \epsilon_2^1 &= \epsilon_1^2 = \epsilon_3^1 = \epsilon_1^3 = \epsilon_3^2 = \epsilon_2^3 = 0. \end{aligned}$$

Dunque,

- $1/E$ esprime il rapporto tra la deformazione “longitudinale” e lo sforzo normale “longitudinale”,

- $-\nu/E$ esprime il rapporto tra la deformazione “trasversale” e lo sforzo normale “longitudinale”,

- ν esprime il rapporto tra le deformazioni “trasversali” e la deformazione “longitudinale”. \square

Sperimentalmente si trovano le seguenti limitazioni

$$\lambda > 0, \quad \mu > 0, \quad \frac{1}{4} < \nu < \frac{1}{2}.$$

Quindi, abbiamo anche

$$E > 0, \quad 0 < 1 + \nu < 3/2, \quad 0 < \frac{\nu}{1 + \nu} < 1.$$

INDICE ANALITICO

- angolo non orientato, 29
- applicazione affine, 16
- applicazione differenziabile, 68
- applicazione lineare, 14
- autovalore, 36
- autovettore, 36

- base, 12
- base ortonormale, 30

- densità di carico, 166
- densità di forza di superficie, 162
- densità di forza di volume, 162
- derivata
 - derivata di un'applicazione differenziabile, 68
 - derivata seconda, 79
 - derivata variazionale, 74
 - derivate parziali, 73
 - regola della catena, 75
 - regola della variabile ripetuta, 75
 - regola di Leibniz, 78
- determinante di un endomorfismo, 25
- dimensione, 12

- endomorfismo, 18
- endomorfismo trasposto, 34
- equazione di continuità, 158
- equazione di moto in forma differenziale, 179
- equazioni cardinali, 167
 - prima equazione cardinale, 167
 - seconda equazione cardinale, 167

- faccia principale, 174
- fluido perfetto, 192
 - equazione di moto, 195
 - fluido perfetto barotropico, 193
 - fluido perfetto incomprimibile, 194
 - gas perfetto, 195
 - pressione, 192
- fluido perfetto incomprimibile
 - teorema di Bernoulli, 197
- forma bilineare, 20
- forma bilineare associata, 33
- forma bilineare trasposta, 21

- forma lineare, 16
- forma quadratica, 22
- forma quadratica definita positiva, 22
- forma volume, 27

- grandezza
 - derivata del valore globale, 157
 - derivata parziale spaziale, 119
 - derivata parziale temporale, 118
 - derivata totale temporale, 119
 - espressione euleriana, 118
 - espressione lagrangiana, 118
 - valore globale, 155

- invarianti di un endomorfismo, 24
- isomorfismo musicale, 31, 33

- massa totale, 156
- metrica euclidea, 28
- modulo, 29
- moto continuo, 114
 - accelerazione, 121
 - decomposizione dello jacobiano, 131
 - decomposizione dello jacobiano infinitesimo, 135
 - dilatazione di volume, 132
 - dilatazione infinitesima di volume, 138
 - divergenza della velocità, 139
 - dominio spaziale, 114
 - dominio spazio temporale, 114
 - identità di congruenza, 114
 - operatore jacobiano, 122
 - operatore jacobiano infinitesimo, 134
 - spostamento, 115
 - spostamento infinitesimo, 139
 - tensore delle deformazioni, 125
 - velocità, 121
 - velocità angolare, 137

- norma, 29
- numero di gradi di libertà, 12

- operatori differenziali
 - divergenza, 107
 - gradiente, 100

- laplaciano, 108
- rotore, 106
- orientazione di uno spazio vettoriale, 26
- polinomio caratteristico, 36
- potenza delle forze di carico, 182
- potenza delle forze di superficie, 182
- potenza delle forze di volume, 182
- prodotto esterno, 53
- prodotto interno, 56
- prodotto tensoriale, 49
- sforzo, 162
 - sforzo di taglio, 174, 176
 - sforzo normale, 174
- simboli di Christoffel, 90
- sistema di coordinate, 81
 - base associata, 82
 - curva coordinate, 81
 - formule di transizione, 89
 - funzioni coordinate, 81
 - sistema di coordinate cartesiano, 92
 - sistema di coordinate cilindrico, 93
 - sistema di coordinate sferico, 96
- sistema elastico, 199–201
 - approssimazione lineare, 201
 - tensore dell'elasticità, 201
- sistema elastico isotropo, 204, 209, 212
 - costanti di Lamé, 209
 - modulo di Poisson, 212
 - modulo di Young, 212
- spazio affine, 13
- spazio duale, 17
- spazio vettoriale, 11
- tensore delle tensioni, 172
- teorema del trasporto, 159
- teorema di Carnot, 22
- teorema di Cauchy, 169–171
- teorema di Pascal, 192
- teorema di Schwarz, 79
- teorema spettrale, 37
- tipo di moto continuo
 - moto di espansione esponenziale sferica, 152
 - moto rigido, 144
 - asse di rotazione, 145
 - moto rotatorio uniforme, 150
 - moto stazionario, 142
 - moto traslatorio, 143
 - moto traslatorio uniforme, 149
- traccia, 54
- trasformazione ortogonale, 38
- trasformazioni rigide, 46
- versore, 29
- vettori applicati, 13
- vettori liberi, 13
- volume orientato, 27