Errata-Corrige al volume

G. Modica, L. Poggiolini, Note di Calcolo delle Probabilità, Pitagora editrice, Bologna 2011.

Malgrado le migliori intenzioni degli autori, il volume contiene imprecisioni ed errori. Qui di seguito sono elencati gli errori noti agli autori ad oggi e le correzioni da apportare al volume in oggetto.

Saremo grati a quanti vorranno comunicarci ulteriori errori, imprecisioni o anche critiche agli indirizzi

`giuseppe.modica@unifi.it`   `laura.poggiolini@unifi.it`.

Firenze, 15 novembre 2012

Giuseppe Modica

Laura Poggiolini

Pagina	Errore	Correzione
31^4	$A \subset \Omega.$	$A \subset \Omega,$
32^2	fa loro.	tra loro.
50^{17}	$:= \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$	$:= p^k q^{n-k}$
71_3	$\min\{x \,\|\, \varphi(x) \geq s\}$	$\max\{x \,\|\, \varphi(x) \leq s\}$
$72_{3,5}$	$\mathbb{P}_f \circ X$	$\mathbb{P}_{f \circ X}$
74^10	$= \alpha\rho(\alpha t + \beta)dt$	$= \frac{1}{\alpha}\rho(\alpha t + \beta)dt$
74^12	$= -\alpha\rho(\alpha t + \beta)dt$	$= -\frac{1}{\alpha}\rho(\alpha t + \beta)dt$
74^13	$= \|\alpha\|\rho(\alpha t + \beta)dt$	$= \frac{1}{\|\alpha\|}\rho(\alpha t + \beta)dt$
93^6	$\frac{\lambda^\alpha t^{\alpha-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)}$	$\frac{\lambda^\alpha t^{\alpha-1} e^{-\lambda t}}{\Gamma(\alpha)}$
101_3	$\mathbb{E}\left[\,\alpha X\,\right] = \alpha^2\,\mathbb{E}\left[\,X^2\,\right]$	$\mathbb{E}\left[\,(\alpha X)^2\,\right] = \alpha^2\,\mathbb{E}\left[\,X^2\,\right]$
109_6	riscrie	riscrive
119^10	$\frac{S_n}{n} \to E$:	$\frac{S_n}{n} \to E$ quasi sempre:
120^14	$-X(x)\| = 0$	$-X(x)\| > 0$
122_5	a due a due indipendenti.	con $X_n - X$ a due a due indipendenti.
127^11	$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} - E \leq \sigma b\right) \to \Phi(b\sqrt{n})$	$\left\|\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} - E \leq \sigma b\right) - \Phi(b\sqrt{n})\right\| \longrightarrow 0$
132^10	Esempio 16.3 ... alla fine dell'esempio	Cancellare
138^5	altrimenti.	altrimenti
139_1	$+\mathbf{P}^N$	$+\mathbf{P}^{N-1}$
$146^{16,17}$	Nel paragrafo seguente identificheremo	Qui di seguito identifichiamo
163^2	numeribili	numerabili
163^3	di una (prima) visita	di assorbimento
163^{10}	di calcolare	di calcolare la *probabilità di assorbimento* in C
$163_{11,4}$	f_{iC}	h_{iC}
163_5	f_{ij}	h_{ij}
164^6	Il vettore	Segue che il vettore
$164^{3,6,8,10}$	f_{iC}	h_{iC}
164_{15}	con un solo	al primo
$165^{1,3,4,5,10}$	f_{iC}	h_{iC}
165^8	si ha $x_i = f_{iC}^{(1)}$.	$x_i = \sum_{\ell \in C} p_{i\ell} + \sum_{\ell \notin C} p_{i\ell} x_\ell \geq f_{iC}^{(1)}$.
165_{10}	$\sum_{n=0}^{\infty}$	$\sum_{n=1}^{\infty}$

165_1	$f_{ij} :=$	$f_{ij} := \sum_{k=1}^{\infty} f_{ij}^{(k)} =$
169_{12}	$\sum_{\ell\in S}$	$\sum_{\ell\notin C}$
169_3	T_{iC}	$\overline{T}_{iC}$
170_8	di passaggio per j in k passi.	di primo passaggio per j al passo k.
$196 - \textit{Figura}$ 22.1	3/4 a sinistra	7/8
213^{17}	$\mathbb{P}_1(X_h) = \mathbb{P}_2(X_h)$	$\mathbb{P}_1(D_h) = \mathbb{P}_2(D_h)$
215_{11}	misura su $\mathbb{R}^n$	misura finita su $\mathbb{R}^n$
215_8	misure su $\mathbb{R}^n$	misure finite su $\mathbb{R}^n$
216_2	$(\mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathbb{P})$ tale che	$(\mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathbb{P})$ finita sugli aperti limitati tale che
217^{14}	$= \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$	$= p^k q^{n-k}$
253_1	$F_n(t)$ di classe C^1	$\mathbf{P}(u)$ continua
255_8	probablistic	probabilistic
249^7	$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda \end{pmatrix}$	$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \lambda_{N-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda_N \end{pmatrix}$

L'enunciato della Proposizione 22.16 è impreciso e la dimostrazione non è corretta. Qui di seguito rienunciamo la Proposizione 22.16 e ne diamo una dimostrazione corretta.

22.16 Proposizione. *Il tempo di soggiorno SJ_i nello stato $i \in S$ è una variabile aleatoria con distribuzione esponenziale di intensità $-q_{ii}$, $\mathbb{P}_{SJ_i} = \exp(-q_{ii})$.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{D}$ un insieme numerabile denso in $\mathbb{R}_+$ e sia

$$S_{\mathcal{D}}(x) := \inf\Big\{t \in \mathcal{D}\,\Big|\, X_t(x) \neq i\Big\}.$$

Osserviamo che $SJ_i(x) = S_{\mathcal{D}}(x)$ se la traiettoria $t \mapsto X_t(x)$ di x è continua da destra. Infatti, sia $\{t_n\} \subset \mathcal{D}$ una successione decrescente convergente a $\overline{t} := SJ_i(x)$. Essendo $t \mapsto X_t(x)$ continua da destra, $X_{\overline{t}} \neq i$ e $X_{t_n} \neq i$ per n sufficientemente grande. Pertanto $S_{\mathcal{D}}(x) \leq t_n$ per n sufficientemente grande e, mandando $n \to \infty$, $S_{\mathcal{D}}(x) \leq \overline{t} = SJ_i(x)$. D'altra parte, ovviamente $SJ_i(x) \leq S_{\mathcal{D}}(x)$, da cui $SJ_i(x) = S_{\mathcal{D}}(x)$. Poiché quasi tutte le traiettorie di una catena di Markov sono continue da destra, per ogni $t \in \mathbb{R}$ gli insiemi

$$\Big\{x \in \Omega\,\Big|\, SJ_i(x) > t\Big\} \qquad \text{e} \qquad \Big\{x \in \Omega\,\Big|\, S_{\mathcal{D}}(x) > t\Big\}$$

differiscono per un insieme di misura nulla. D'altra parte

$$t < S_{\mathcal{D}}(x) \qquad \text{se e solo se} \qquad X_s(x) = i \ \forall s \in \mathcal{D}, 0 \leq s \leq t,$$

e quindi

$$\Big\{x \in \Omega\,\Big|\, S_{\mathcal{D}}(x) > t\Big\} = \Big\{x \in \Omega\,\Big|\, X_s(x) = i \ \forall s \in \mathcal{D},\ 0 \leq s \leq t\Big\}$$

è un evento perché intersezione di una infinità al più numerabile di eventi. Si conclude quindi che $\Big\{x \in \Omega\,\Big|\, SJ_i(x) > t\Big\} \in \mathcal{E}$, i.e., è un evento, che

$$\mathbb{P}(SJ_i(x) > t) = \mathbb{P}\left(X_s(x) = i \forall s \in \mathcal{D},\ 0 \leq s \leq t\right)$$

e, per l'arbitrarietà di t che $SJ_i(x)$ è una variabile aleatoria su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$.

Fissato t, sia $\mathcal{D} := \{jt/2^n\}_{j,n}$, e per ogni n, sia $\mathcal{D}_n := \{jt/2^n\}_j$. Ovviamente $\mathcal{D}_n \subset \mathcal{D}_{n+1}$ $\forall n$ e $\mathcal{D} = \cup_{n=1}^{\infty} \mathcal{D}_n$. Pertanto

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(SJ_i(x) > t) &= \mathbb{P}\left(X_s(x) = i \ \forall s \in \mathcal{D},\ 0 \leq s \leq t\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \Big\{x \in \Omega\,\Big|\, X_{t_j}(x) = i \ \forall j,\ 0 \leq j \leq 2^n - 1\Big\}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(X_{t_j}(x) = i \ \forall j,\ 0 \leq j \leq 2^n - 1\right) \end{aligned}$$

dove si è posto $t_j = t_{j,n} := tj/2^n$.

D'altra parte la proprietà di Markov e l'omogeneità della catena danno

$$\mathbb{P}(X_{t_j} = i \ \forall j = 0, \dots, 2^n - 1) = \prod_{j=0}^{2^n-1} \mathbb{P}\left(X_{t_{j+1}=i} \,\middle|\, X_{t_j} = i\right) = \left(p_{ii}\left(\frac{t}{2^n}\right)\right)^{2^n}.$$

e quindi, essendo $\mathbf{P}(t) = (p_{ij}(t))$ differenziabile da destra in 0, in particolare $\frac{p_{ii}(t)-1}{t} \to q_{ii}$ per $t \to 0^+$, si conclude che

$$\log \mathbb{P}(SJ_i > t) = \lim_{n\to\infty} 2^n \log p_{ii}\left(\frac{t}{2^n}\right) = \lim_{k\to\infty} k\left(p_{ii}\left(\frac{t}{k}\right) - 1\right) = q_{ii} t.$$

□

La dimostrazione del Corollario B.10 non è corretta. Qui di seguito ne diamo una dimostrazione corretta.

Dimostrazione del Corollario B.10. La famiglia $\mathcal{I}$ degli intervalli chiusi a destra di $\mathbb{R}^n$ è un semianello e ovviamente μ è σ-additiva su $\mathcal{I}$. Inoltre $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ è la σ-algebra generata da $\mathcal{I}$. La (iii) nella dimostrazione precedente implica che $E = \cap_k G_k \setminus N$ con N di misura nulla e $\{G_k\}$ una successione decrescente di insiemi ognuno dei quali è una unione di intervalli chiusi a destra, $G_k = \cup_j I_{k,j}$, $I_{k,j} \in \mathcal{I}$ $\forall k \geq 1$. Pertanto $\mu(G_k) \downarrow \mu(E)$ e quindi per ogni $\epsilon > 0$ esiste $G = \cup_j I_j$, $I_j \in \mathcal{I}$, tale che $\mu(G) \leq \mu(E) + \epsilon$. D'altra parte, ogni intervallo chiuso a destra è intersezione di una successione di intervalli aperti e qindi per ogni intero j esiste un intervallo aperto A_j tale che $\mu(A_j \setminus I_j) \leq \epsilon 2^{-j}$. L'insieme

$$A := \cup_j A_j$$

è aperto, $A \supset G \supset E$ e, poiché

$$A \setminus G = \Big(\bigcup_j A_j\Big) \setminus \Big(\bigcup_j I_j\Big) \subset \bigcup_j (A_j \setminus I_j),$$

A è tale che

$$\mu(A \setminus E) \leq \mu(A \setminus G) + \mu(G \setminus E) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j \setminus I_j) + \epsilon \leq 2\epsilon.$$

Applicando il ragionamento precedente ad E^c, si trova un insieme chiuso $F \subset E$ tale che

$$\mu(E \setminus F) \leq 2\epsilon.$$

Per concludere, sia $K := F \cap \overline{B(0,n)}$. Ovviamente K è compatto, $K \subset F \subset E$ e per n sufficientemente grande

$$\mu(E \setminus K) \leq 3\epsilon.$$

□