Errata-Corrige al volume

M. Giaquinta, G. Modica, Note di Metodi Matematici per Ingegneria Informatica, Edizione 2007, Pitagora editrice, Bologna 2007.

Malgrado le migliori intenzioni degli autori, il volume contiene imprecisioni ed errori. Qui di seguito sono elencati gli errori noti agli autori ad oggi e le correzioni da apportare al volume in oggetto.

Saremo grati a quanti vorranno comunicarci ulteriori errori, imprecisioni o anche critiche agli indirizzi

`giaquinta@sns.it` `giuseppe.modica@unifi.it`.

Pisa e Firenze, 1 novembre 2012

Mariano Giaquinta

Giuseppe Modica

Pagina	Errore	Correzione
4_{12}	$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$
8^{18}	aventi	avente
$12^{7,9,10}$	X	$\mathbb{R}^n$
12_{10}	$\sum_{j=1}^n$ (3 volte)	$\sum_{j=1}^k$
12_4	$(x_1, x_2, \dots, x_n)$	$(x^1, x^2, \dots, x^n)$
12_4	$(y_1, y_2, \dots, y_n)$	$(y^1, y^2, \dots, y^n)$
13^{11}	$x \in X$	$x \in \mathbb{R}^n$
20_6	le cui	la cui
$21_{9,10}$	φ (5 volte)	ℓ
23_{11}	. Mostrare	, mostrare
25^{20}	$z \in X$	di $z \in X$
27^6	$e'_1 :=$	$e_1 :=$

28^{12}	$e_i,\ i=1,\dots,n$	$e_j,\ j=1,\dots,k$
28^{13}	$\sum_{i=1}^{n}$ (2 volte)	$\sum_{i=1}^{k}$
28^{14}	$\dots,n$	$\dots,k$
28^{14}	$(e_1,\,e_2,\dots,\,e_n)$	$(e_1,\,e_2,\dots,\,e_k)$
29^{8}	$=n$	$=n:=\dim X$
29_{19}	Sia X è uno	Sia X uno
29_{8}	$F:=L(\overline{x})\overline{x}$	$F:=\overline{L(\overline{x})}\overline{x}$
32_{7}	$n-\dim\ker L$	$\dim X-\dim\ker L$
34_{7}	poiezione	proiezione
34_{6}	dunqe	dunque
34_{3}	di decompone	si decompone
35_{16}	$L(y):=\ y\bullet w_L\,.$	$L(y)=\ y\bullet w_L\ \ \forall y\in X.$
35_{11}	$\dots(x_n\|w)$	$\dots,\ (x_m\|w)$
39^{11}	$\mathbf{B}=\mathbf{SAS}^{-1}$	$\mathbf{B}=\mathbf{S}^{-1}\mathbf{AS}$
40^{15}		E' d'uso chiamare molteplicità di un autovalore la sua molteplicità algebrica.
40^{15}	autovalore ... di $A\in M_{n,n}(\mathbb{K})$	autovalore di $A\in M_{n,n}(\mathbb{K})$
42^{6}	A è simile	ogni matrice associata ad A è simile
43^{18}	Segue dalla ... che	Segue che
43^{18}	quindi $\sum_{k=1}^{n}\dim V_{\lambda_i}=n.$	quindi dalla Proposizione 5.3 che $\sum_{k=1}^{n}\dim V_{\lambda_i}=n.$
44^{2}	vettoriale ... finita.	vettoriale di dimensione n su $\mathbb{K}$.
44_{2}	dimensione finita.	dimensione n.
45_{16}	$\lambda_i,\ i=1,\dots,n$	$\lambda_i,\ i=1,\dots,k$
45_{2}	$\left[e^1_{1,1},e^2_{1,1},\dots,e^1_{1,2},e^2_{1,2},\dots,e^1_{2,1},e^2_{2,1},\dots\right]$	$\left[e^1_{1,1}\,\|\,e^2_{1,1}\,\|\,\dots\,\|\,e^1_{1,2}\,\|\,e^2_{1,2}\,\|\,\dots\,\|\,e^1_{2,1}\,\|\,e^2_{2,1}\,\|\,\dots\right]$
47^{9}	$x-y$	$-y$
49^{12}	se e solo se $(x-P(x)\|P(z))=0$	se e solo se $\forall x\in X\ (x-P(x)\|P(z))=0$
50^{2}	autoggiunto	autoaggiunto
51_{4}	(ii) Proposizione	(iii) Proposizione
53_{20}	(i) Essendo	Essendo
54^{12}	alla restrizioni	alle restrizioni
56^{20}	$+bxy$	$+2bxy$
59^{19}	Se λ_i	Se λ_j
59^{19}	a u_i	a u_j
60_{15}	autoaggiunto sullo	autoaggiunto e semidefinito positivo sullo
62^{8}	e siano $\mu_1,\,\mu_2,\dots,\,\mu_n$	e $\mu_1,\,\mu_2,\dots,\,\mu_n$
64^{8}	$\|x_\epsilon-A^\dagger y\|^2$	$\|x_\epsilon-A^\dagger y\|$
67_{2}	complessa e	complessa in z_0 e
68_{2}	λw	$\lambda w\qquad\forall w\in\mathbb{C}$
69^{6}	w_1 a w_2	w_1 e w_2
71^{2}	Esercizio $\dots z^2$,	**Esercizio (La funzione $z\to z^2$).**
73^{7}	$\int_0^1$ (2 volte)	$\int_a^b$
76_{6}	un curva	una curva

77^1	(9.2)	(9.3)
85^{20}	le successione	le successioni
80_7	$\frac{x^{2k+1}}{2k+1}dt+$	$\frac{x^{2k+1}}{2k+1}+$
87^{12}	2^{-k}	2^{-k+1}
88_8	h^n	$\left(\frac{r}{t}\right)^n$
89_8	assoutamente	assolutamente
103^9	dal bordo di ∂B	dal bordo ∂B di B
104^3	per ogni intero n	per ogni intero $n \geq 1$
105^5	$B(z_0, \rho)$	$B(z_0, r)$
108_3	w^{-j}	w^{-j-1}
114^3	palti	lati
$109^{1,3}$	$s_n(w)\,dw$	$s_n(w)\frac{1}{w}\,dw$
112_{16}	antioriario	antiorario
116_{10}	Se	Siano
116_{10}	è tale che	tali che
119^4	Sono stime	. Sono stime
120_{13}	$\sum_{k=j}^{\infty} \frac{f^{(k)}}{k!}(z-z_0)^j$	$\sum_{j=k}^{\infty} \frac{f^{(j)}}{j!}(z-z_0)^j$
127_6	$\mathcal{H}(\Omega))$	$\mathcal{H}(\Omega)$
128_9	$\mathcal{H}(\Omega \setminus \{z_0\}$ se	$\mathcal{H}(\Omega \setminus \{z_0\})$ se
131_{10}	indentità	identità
132_{17}	una aperto	un aperto
135_{13}	$h_m(z) :=$	$g_m(z) :=$
140_{16}	$\|f(z\| \to$	$\|f(z)\| \to$
141_1	$dx \int_{-\infty} \infty$	$dx = \int_{-\infty} \infty$
156^3	y_n il secondo	y_n è il secondo
163_{11}	p_j (2 volte)	m_j
171^1	laprocedura	la procedura
207_{10}	δ_{hk}	δ_{h0}
214^6	$\sum_{k=-[n/2]}^{[n/2]}$	$\sum_{k=0}^{[n/2]}$
214_9	$\sum_{k=-n}^{n}$	$\sum_{k=0}^{[n/2]}$
242^1	logaritmmo	logaritmo

La Sezione 23.g è segnata da vari errori ed imprecisioni. Qui di seguito riportiamo la sua sostituzione.

23.g. Un sistema di ODE: piccole oscillazioni

Siano dati N punti materiali $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N$ in $\mathbb{R}^3$ aventi masse rispettivamente $m_1, m_2, \dots, m_N$ non nulle. e si supponga che le suddette masse interagiscano fra loro con forze soddisfacenti la *legge di Hooke*. Indichiamo con $\mathbf{x}_i(t)$ la legge oraria del moto dell'i-esimo punto. La forza di richiamo esercitata dalla massa in $\mathbf{x}_j$ su $\mathbf{x}_i$ è dunque proporzionale al vettore $\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i$

$$\mathbf{f}_{ij} := k_{ij}(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i), \qquad j \neq i,\ k_{ij} \geq 0.$$

Si pone $k_{ij} = 0$ se non c'è alcuna forza di richiamo diretta tra i e j. Per il principio di azione e reazione, la forza esercitata da $\mathbf{x}_i$ su $\mathbf{x}_j$ è uguale e opposta, $\mathbf{f}_{ji} = -\mathbf{f}_{ij}$ e le costanti elastiche k_{ij}, $i \neq j$, soddisfano la relazione di simmetria $k_{ij} = k_{ji}$.

La forza totale agente sulla massa in $\mathbf{x}_i$ è la somma delle forze esercitate dagli altri punti, i.e.,

$$\mathbf{f}_i = \sum_{j\neq i} k_{ij}(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) = \sum_{j\neq i} k_{ij}\mathbf{x}_j - \Big(\sum_{j\neq i} k_{ij}\Big)\mathbf{x}_i := \sum_{j=1}^{n} k_{ij}\mathbf{x}_j$$

se si ha cura di porre $k_{ii} := -\sum_{j\neq i} k_{ij}$. Le equazioni della dinamica danno quindi luogo ad un sistema di $3N$ equazioni accoppiate

$$m_i\mathbf{x}_i'' = \mathbf{f}_i = \sum_{j=1}^{N} k_{ij}\mathbf{x}_j, \qquad i = 1, \dots, N.$$

Tuttavia, l'accoppiamento è tale che la j-esima componente della forza dipende solo dalle coordinate j-esime dei punti materiali. Il sistema si divide dunque in 3 sistemi di N equazioni del secondo ordine, uno per coordinata

$$\begin{aligned}
m_i(\mathbf{x}_i^1)''(t) &= \sum_{j=1}^{N} k_{ij}\mathbf{x}_j^1(t), \qquad \forall i = 1, \dots, N,\\
m_i(\mathbf{x}_i^2)''(t) &= \sum_{j=1}^{N} k_{ij}\mathbf{x}_j^2(t), \qquad \forall i = 1, \dots, N,\\
m_i(\mathbf{x}_i^3)''(t) &= \sum_{j=1}^{N} k_{ij}\mathbf{x}_j^3(t), \qquad i = 1, \dots, N.
\end{aligned}$$

Siano $\mathbf{M} := \operatorname{diag}(m_1, m_2, \dots, m_N)$, $\mathbf{K} := (k_{ij}) \in M_{N,N}(\mathbb{R})$ la matrice simmetrica delle costanti elastiche (dove si è posto per ogni i, $k_{ii} := -\sum_{j\neq i} k_{ij}$) e sia $X(t) = X_j(t) \in \mathbb{R}^N$ il vettore colonna delle j-esime coordinate dei moti dei punti $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N$

$$X(t) = X_j(t) := (x_1^j(t), \dots, x_N^j(t))^T, \qquad \mathbf{x}_i(t) =: (\mathbf{x}_i^1(t), \mathbf{x}_i^2(t), \mathbf{x}_i^3(t)).$$

Allora $X(t)$ verifica il sistema di N equazioni

$$X''(t) = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}X(t).$$

e quindi la mappa a valori matrici $N \times 3$ data da $t \mapsto \mathbf{X}(t) := [X_1(t)|X_2(t)|X_3(t)]$ verifica il sistema

$$\mathbf{X}''(t) = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{X}(t) \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

La matrice $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$ non è in generale simmetrica (pur essendolo le matrici $\mathbf{M}$ e $\mathbf{K}$). Tuttavia si osserva quanto segue.

- La mappa bilineare $(x, y) \mapsto (x|y) = \mathbf{M}x \bullet y := \sum_{i=1}^{N} m_i x_i y_i$ è un prodotto scalare su $\mathbb{R}^N$, la cui matrice di Gram è $\mathbf{M}$.

- Le colonne di $\mathbf{M}^{-1/2}$,
$$\mathbf{M}^{-1/2} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{m_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{m_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -0 & 0 & \dots & 1/\sqrt{m_N} \end{pmatrix}$$
formano una base di $\mathbb{R}^N$ ortonormale per il prodotto scalare $(\ |\ )$.
- La mappa $x \to \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}x$ è autoaggiunta per il prodotto scalare $(\ |\ )$. Infatti $\forall x, y \in \mathbb{R}^N$
$$(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}x|y) = \mathbf{K}x \bullet y = x \bullet \mathbf{K}y = x \bullet \mathbf{M}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}y = \mathbf{M}x \bullet \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}y = (x|\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}y).$$
Equivalentemente, la matrice $\mathbf{M}^{1/2}(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K})\mathbf{M}^{-1/2} = \mathbf{M}^{-1/2}\mathbf{K}\mathbf{M}^{-1/2}$ è simmetrica; infatti,
$$(\mathbf{M}^{-1/2}\mathbf{K}\mathbf{M}^{-1/2})_{ij} = k_{ij}\frac{1}{\sqrt{m_i}\sqrt{m_j}}$$
In particolare, $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$ ha N autovalori reali $\lambda_1,\ \lambda_2, \dots,\ \lambda_N$ se contati con la loro molteplicità.
- Gli autovalori della matrice $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$ sono tutti non positivi. Infatti si osserva che la matrice $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$ è una Q-matrice: per $i \neq j$
$$(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K})^i_j = \sum_{h=1}^N \frac{1}{m_i}\delta_{ih}\mathbf{K}^h_j == \frac{1}{m_i}k_{ij} \geq 0$$
e
$$\sum_{j=1}^N (\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K})^i_j = \frac{1}{m_i}\sum_{j=1}^N k_{ij} = 0.$$
Pertanto, cfr. Lemma 23.19, tutti gli autovalori di $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$ sono contenuti in un cerchio chiuso $B(-q, q)$ con $q \leq 0$, in particolare sono non positivi.
- Poiché $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$ è autoaggiunta con autovalori $\lambda_1,\ \lambda_2, \dots,\ \lambda_N$ tutti non positivi, i numeri $-\lambda_1, \dots, -\lambda_N$ sono i *valori singolari* della matrice $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$. Si possono pertanto calcolare concretamente con l'algoritmo di decomposizione secondo i valori singolari.
- 0 è un autovalore di $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$ e $(1, 1, \dots, 1)^T$ è un suo autovettore. Infatti
$$(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}(1, 1, \dots, 1)^T)^i = \sum_{j=1}^N (\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K})^i_j = 0.$$
- Si può dimostrare che se i punti sono tra loro connessi, o, come si dice, se la matrice $\mathbf{K}$ è *irriducibile*, allora 0 è un autovalore di molteplicità 1, e tutti gli altri autovalori sono strettamente negativi
$$\lambda_N \leq \lambda_{N-1} \leq \dots \leq \lambda_2 < \lambda_1 = 0.$$

Pertanto dal teorema spettrale, esiste una base $u_1,\ u_2, \dots,\ u_N$ di $\mathbb{R}^N$ ortonormale per il prodotto scalare $(\ |\ )$ formata da autovettori di $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$. Se λ_s denota l'autovalore relativo a u_s e $\mathbf{S} := [u_1| \cdots |u_N]$ è la matrice che ha in colonna s le coordinate di u_s, allora
$$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} = \mathbf{S}\,\mathrm{diag}\,(\lambda_1,\ \lambda_2, \dots,\ \lambda_N)\,\mathbf{S}^{-1}$$
e quindi la mappa a valori matrici $N \times 3$ definita da

$$t \mapsto \mathbf{Y}(t) := \mathbf{S}^{-1}\mathbf{X}(t)$$

verifica

$$\mathbf{Y}''(t) = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{X}''(t) = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N)\mathbf{Y}(t)$$

Per ogni $s = 1, \dots, N$, indichiamo con $\mathbf{y}^s(t) \in \mathbb{R}^3$ il punto avente come coordinate la riga s-esima della matrice $\mathbf{Y}$. Allora

$$(\mathbf{y}^s)''(t) = \lambda_s \mathbf{y}^s(t)$$

i.e., le coordinate di $\mathbf{y}^s$ sono tutte soluzioni dell'equazione

$$y''(t) = \lambda_s y(t)$$

i.e., si muovono o di moto rettilineo uniforme se $\lambda_s = 0$ o con moto armonico semplice di periodo $\sqrt{-\lambda_s}$ se $\lambda_s < 0$.

Pertanto, per ogni $s = 1, \dots n$

- se $\lambda_s = 0$, la curva $t \mapsto \mathbf{y}^s(t)$ è un moto rettilineo uniforme. In particolare, se si prende come autovettore di norma 1 relativo all'autovalore nullo il vettore $u_1 := \frac{1}{M}(1, \cdots, 1)^T$ con $M := \sum_{i=1}^N m_i$, allora il punto

$$\mathbf{y}^1(t) = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{x}_i(t),$$

  i.e., il *baricentro del sistema*, si muove di moto rettilineo uniforme.
- se $\lambda_s < 0$, allora

$$\mathbf{y}^s(t) = \cos(\omega_s t)\mathbf{y}(0) + \frac{\sin(\omega_s)t}{\omega_s}(\mathbf{y}^s)'(0)$$

  dove $\omega_s := \sqrt{-\lambda_s}$. La traiettoria descritta da $\mathbf{y}^s(t)$ è un ellisse centrata in 0 nel piano generato da $\mathbf{y}^s(0)$ e $(\mathbf{y}^s)'(0)$. I numeri

$$\nu_s := \frac{\sqrt{-\lambda_s}}{2\pi}, \qquad \lambda_s < 0,$$

  si chiamano *frequenze proprie del sistema.*

Infine, ciascun punto $\mathbf{x}_i$ descrive un moto che è una combinazione lineare dei moti dei punti $\mathbf{y}_i$ essendo $\mathbf{X}(t) = \mathbf{S}\mathbf{Y}(t)$.

23.19 Lemma. *Sia $\mathbf{A}$ una matrice $N \times N$ a coefficienti complessi. Per ogni $i = 1, \dots N$ siano $x_i := \mathbf{A}^i_i$ e $r_i := \sum_{j \neq i} |\mathbf{A}^i_j|$ e indichiamo con B_i la palla chiusa di centro x_i e raggio r_i, $B_i := \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z - x_i| \leq r_i\}$. Allora gli autovalori di $\mathbf{A}$ appartengono a $\bigcup_{i=1,\dots,N} B_i$.*

Dimostrazione. Sia $\lambda \in \mathbb{C}$ un autovalore di $\mathbf{A}$ e sia $z = (z^1, z^2, \dots, z^N) \in \mathbb{C}^N$ un autovettore non nullo relativo all'autovalore λ, $\mathbf{A}z = \lambda z$. Sia $h = h(\lambda)$ l'indice tale che $|z^h| = \max_i |z^i|$. Allora

$$\begin{aligned} |\lambda - x_h|\,|z^h| &= |(\mathbf{A}z)^h - \mathbf{A}^h_h z^h| = |\sum_{j\neq h} \mathbf{A}^h_j z^j| \\ &\leq \Big(\sum_{j \neq h} |\mathbf{A}^h_j|\Big) \max_i |z^i| \leq r_h |z^h|. \end{aligned}$$

Pertanto $|\lambda - x_h| \leq r_h$, i.e., $\lambda \in B_h$. $\square$