Errata-Corrige al volume

M. Giaquinta, G. Modica, Analisi Matematica: Vol. 4, Funzioni di più variabili, Pitagora editrice, Bologna 2005.

Malgrado le migliori intenzioni degli autori, il volume contiene imprecisioni, errori e alcune palesi assurdità. Qui di seguito sono elencati gli errori noti agli autori ad oggi e le correzioni da apportare al volume in oggetto.

Saremo grati a quanti vorranno comunicarci ulteriori errori, imprecisioni o anche critiche agli indirizzi

`giaquinta@sns.it` `giuseppe.modica@unifi.it`.

Pisa e Firenze, 15 giugno 2006

Mariano Giaquinta

Giuseppe Modica

Pagina	Errore	Correzione
65_6	da (ii) del Teorema 1.2	dalla definizione di insieme misurabile
65_4	*disgiunti*, tutti	*disgiunti*, segue da (ii) Teorema 1.2 che tutti
117_{-1}	$-\alpha_{x^i}$	$D_i\alpha(x')$
$117_{{}_1 1}$	$-\alpha_{x^i}$	$D_i\alpha(x')$
117_{14}	$\partial(Q \times [a,b]) \cap A$	$\partial(Q \times [a,b]) \cap \overline{A}$
156^{14}	$w = x + iy$	$z = x + iy$
156^{15}	è un cerchio o un rettangolo	è un rettangolo
156^{16}	in generale	, se Ω è un aperto qualunque,
159_{10}	si abbia	si ha
159_8	sia	è
159_6	domini piccoli	domini “piccoli”
160^6	$F(\gamma(t)) = F(\gamma(1)) - F(\gamma(0))$	$F_R(\gamma(t))\,dt = F_R(\gamma(1)) - F_R(\gamma(0))$
160_{14}	ammissibile	elementare
160_{14}	domini disgiunti	domini con parti interne disgiunte
160_{12}	opposta.	opposta quando si percorre in senso antiorario $\cup_i \partial A_i$.
161^1	Poiché i segmenti	Poiché gli integrali sui segmenti
161_8	ammissibili	elementari
162_8	$\frac{1}{(\zeta - z)}\,dz$	$\frac{1}{(\zeta - z)}\,d\zeta$
162_8	$\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\,dz$	$\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\,d\zeta$
163_8	ammissibili	elementari
167^7	descrivono i campi	descrivono alcuni campi

168_{17}	$u_y = v_x$	$u_y = -v_x$
168_{16}	$u_x = -v_y$	$u_x = v_y$
176_9	se $z = 0$	se $z = z_0$
178_7	un punto singolare isolato	una singolarità isolata
181^{11}	$\zeta \in B(z_0, r_2)$	$\zeta \in \partial B(z_0, r_2)$
181^{12}	$= \frac{1}{\zeta - z} \sum$	$= \frac{1}{\zeta - z_0} \sum$
181^{13}	totalmente	uniformemente
181_{11}	totalmente	uniformemente
183^9	ammissibile	elementare
183^{13}	dominio ammissibile per	dominio con A^c elementare per
183^5	$\overline{A} \subset B(z_0, r)$	$\overline{A} \subset B(0, r)$
184^{14}	un polo semplice	uno zero semplice
184_3	$\lim_{z\to z_0} \ldots (z_0)$.	$\lim_{z\to z_0} \ldots$.
186^6	ammissibile.	elementare per Ω.
188_{10}	$= 2\pi\, i$	$= -2\pi\, i$
188_3	$ir\, d\theta$	$ire^{i\theta}\, d\theta$
188_5	$f(z)e^{i\omega x}\, dz$	$f(z)e^{i\omega z}\, dz$
189^1	$r\, dt =$	$r\, d\theta =$
189^1	$r\, dt \leq$	$r\, d\theta \leq$
189^6	$\mathrm{Res}\,(f, z)$	$\mathrm{Res}\,(f(z)e^{i\omega z}, z)$
189_4	$\frac{\sin x}{x} =$	$\frac{\sin x}{x}\, dx =$
190^{11}	$e^{ir^2\theta^2}$	$e^{ir^2 e^{2i\theta}}$
190^{12}	$i(\cos\theta \ldots r^2 \sin 2\theta)$	$i \cos 2\theta - \sin 2\theta$
193_8	$\cot(\pi z)) \to 0$	$\cot(\pi z)\Big) \to 0$
209_9	$\frac{\pi}{a} e^{\alpha a}$	$\frac{\pi}{\lvert a\rvert} e^{-\alpha\lvert a\rvert}$
210^9	Da queste sommando e sottraendo ritrovare	Analogamente, si provino
210^{10}	$a, b > 0$.	$\alpha, \beta > 0$.

Inoltre

• *Sostituire l'esercizio 3.47 a pg. 37 con il seguente*

3.47 ¶ Dimostrare il seguente *principio di massimo* per le funzioni armoniche.
Teorema (Principio di massimo). *Sia $u \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ armonica in Ω. Allora*

$$\sup_{\Omega} |u| = \sup_{\partial\Omega} |u|.$$

[*Sugg.* Per ogni $\epsilon > 0$ e x_0 interno a Ω, osservare che $v_\epsilon(x) := u(x) + \epsilon\, |x - x_0|^2$ non ha massimo in x_0 essendo $\Delta v_\epsilon(x_0) = 2n\epsilon > 0$. Pertanto $\sup_\Omega v_\epsilon = \sup_{\partial\Omega} v_\epsilon$. ...]

• *Sostituire il punti (i) e (ii) a pg. 113 con quanto segue*

(i) Sia $\mathbf{A} \in M_{N,n}(\mathbb{R})$. Dal teorema dell'alternativa

$$\begin{aligned} &\ker \mathbf{A}^T\mathbf{A} = \ker \mathbf{A}, \\ &\ker \mathbf{A}\mathbf{A}^T = \ker \mathbf{A}^T, \\ &\mathrm{Rank}\,(\mathbf{A}^T\mathbf{A}) = \mathrm{Rank}\,\mathbf{A}^T = \mathrm{Rank}\,\mathbf{A} = \mathrm{Rank}\,(\mathbf{A}\mathbf{A}^T), \end{aligned} \tag{5.3}$$

in particolare $\mathrm{Rank}\,(\mathbf{A}^T\mathbf{A}) = \mathrm{Rank}\,(\mathbf{A}\mathbf{A}^T) \le \min(n, N)$.

(ii) Da (i) segue che

$$\begin{aligned} &\det(\mathbf{A}^T\mathbf{A}) = 0 \text{ se } n > N, \\ &\det(\mathbf{A}\mathbf{A}^T) = 0 \text{ se } n < N. \end{aligned}$$

Ovviamente $\det(\mathbf{A}\mathbf{A}^T) = \det(\mathbf{A}^T\mathbf{A})$ se $n = N$.

• *Sostituire le pagine da 121 e 122 con le seguenti pagine*

$$F(x') := \int_a^{\alpha(x')} f(x', x_n)\, dx_n, \qquad x' \in Q.$$

Derivando sotto il segno di integrale $F(x')$ in x_i, $i = 1, \dots, n-1$, cfr. Corollario 2.18, si ottiene

$$D_i F(x') = \int_a^{\alpha(x')} D_i f(x', x_n)\, dx_n + f(x', \alpha(x')) D_i \alpha(x');$$

d'altra parte

$$\begin{aligned}\int_A D_i f(x', x_n)\, dx' dx_n &= \int_Q \Big(\int_a^{\alpha(x')} D_i f(x', x_n)\, dx_n \Big)\, dx' \\ &= \int_Q D_i F(x')\, dx' - \int_Q f(x', \alpha(x')) D_i \alpha(x')\, dx',\end{aligned} \tag{6.3}$$

ed essendo $F(x') = 0$ se $x' \in \partial Q$,

$$\begin{aligned}\int_Q D_i F(x')\, dx' &= \int_Q D_i F(x') dx_1 \dots dx_{n-1} \\ &= \int \int \Big(\int_{-1}^1 D_i F(x') dx_i \Big) dx_1 \dots dx_{i-1}\, dx_{i+1} \dots dx_{n-1} \\ &= \int \int \Big(F(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_{n-1}) - F(x_1, \dots, x_{i-1}, -1, x_{i+1}, \dots, x_{n-1}) \Big) \\ &\qquad\qquad dx_1 \dots dx_{i-1}\, dx_{i+1} \dots dx_{n-1} \\ &= \int \int 0\, dx_1 \dots dx_{i-1}\, dx_{i+1} \dots dx_{n-1} = 0.\end{aligned} \tag{6.4}$$

La (6.3) si riduce a

$$\int_A D_i f(x', x_n)\, dx' dx_n = - \int_Q f(x', \alpha(x')) D_i \alpha(x')\, dx',$$

e quest'ultima uguaglianza, confrontata con la (6.1), dà il risultato per $i = 1, \dots, n-1$. □

6.5 Lemma. *Siano $\{V_\alpha\}$ una famiglia di aperti di $\mathbb{R}^n$, e $\Omega := \cup_\alpha V_\alpha$. Allora esiste un ricoprimento localmente finito $\{B_j\}$ con palle $B_j \subset\subset \Omega$ tale che $\overline{B_j} \subset V_\alpha$ per qualche j.*

Dimostrazione. Per ogni $j = 1, 2, \dots$ sia $\{H_j\}$ una successione di compatti di Ω con $H_j \subset\subset \operatorname{int}(H_{j+1})$ tali che $\Omega = \cup_j H_j$. Per comodità poniamo $H_{-1} = H_{-2} = \emptyset$. Per $j := 0, 1, \dots$ consideriamo i compatti $K_j := H_j \setminus \operatorname{int}(H_{j-1})$ e gli aperti $A_j := \operatorname{int} H_{j+1} \setminus H_{j-2}$. Ovviamente $K_j \subset\subset A_j$, $\Omega = \cup_j A_j$ e $A_i \cap A_j = \emptyset$ tranne che se $i = j-1, j$ o $j+1$.

Per ogni $x \in K_j$ scegliamo $\lambda = \lambda(x)$ tale che $x \in V_{\lambda(x)}$ e una palla $B(x, r(x))$ aperta con chiusura contenuta in $A_j \cap V_{\lambda(x)}$. La famiglia $\{B(x, r(x))\}$ è dunque un ricoprimento aperto del compatto K_j e se ne può estrarre un sottoricoprimento finito $\{B_{j,1}, B_{j,2}, \dots B_{j,N_j}\}$. La famiglia $\mathcal{B} := \{B_{j,i} \,\big|\, j = 0, 1, \dots, i = 1, \dots N_j\}$ ha le proprietà volute. □

6.6 Lemma (Partizione dell'unità). *Sia $\{B_j\}$ un ricoprimento localmente finito di $\Omega := \cup_j B_j$ con palle aperte. Esistono allora funzioni $\alpha_j : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ di classe C^∞, tali che*

(i) *$\alpha_j(x) > 0$ se e solo se $x \in B_j$,*
(ii) *$\sum_{j=1}^\infty \alpha_j(x) = 1$ $\forall x \in \Omega$.*

Dimostrazione. Per ogni $j = 0, \dots,$ sia $\varphi_j \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ una funzione positiva in B_j e nulla sul complementare. La funzione $\sum_{j=0}^\infty \varphi_j(x)$ è ben definita in Ω perché localmente è una somma finita ($\{B_j\}$ è localmente finito) e non è mai nulla ($\{B_j\}$ è un ricoprimento di Ω). Segue che le funzioni $\{\alpha_j\}$ date da

$$\alpha_j(x) := \frac{\varphi_j(x)}{\sum_{j=0}^\infty \varphi_j(x)}$$

hanno le proprietà richieste. □

6.7 Osservazione. Si noti che il numero di funzioni α_j della partizione dell'unità non nulle nell'intorno di un punto x è finito e che gli indici delle funzioni α_j che sono non nulle in y sono gli stessi indici delle funzioni non nulle in x se y è sufficientemente vicino a x. Perciò si ha anche $\sum_{j=1}^\infty D\alpha_j(x) = D, \sum_{j=1}^\infty \alpha_j(x)\big) = 0$ in Ω e anche

$$\int \sum_{j=1}^\infty \alpha_j(x)\, d\mu = \sum_{j=1}^\infty \int \alpha_j(x)\, d\mu$$

rispetto a una qualunque misura (ad esempio $\mu = \mathcal{L}^n$ e $\mu = \mathcal{H}^{n-1}$).

Dimostrazione del Teorema 6.2. Ricordiamo che $r(\partial A)$ è l'insieme dei punti regolari di ∂A e $s(\partial A) := \partial A \setminus r(\partial A)$. Sia Δ un aperto limitato contenente $\overline{A}$. Essendo $s(\partial A)$ chiuso per ipotesi, $\Omega := \Delta \setminus s(\partial A)$ è aperto.

Per ogni $x \in \Omega$ scegliamo un intorno aperto U_x di x nel seguente modo

(i) se $x \in \Omega \setminus \overline{A}$, U_x è un cubo centrato in x contenuto in $\Omega \setminus \overline{A}$,
(ii) se $x \in A \cap \Omega$, U_x è un cubo centrato in x contenuto in $A \cap \Omega$,
(iii) se $x \in \partial A \cap \Omega$, allora $x \in r(\partial A)$. In questo caso si sceglie U_x come il parallelepipedo della definizione di punto regolare, parallelepipedo che non è restrittivo supporre sufficientemente piccolo in modo che $U_x \subset \Omega$.

La famiglia $\{U_x\}$ è un ricoprimento di Ω. Esiste dunque, cfr. Lemma 6.5 un raffinamento numerabile localmente finito $\{B_j\}$ di $\{U_x\}$ con associata una partizione dell'unità $\{\alpha_j\}$, cfr. Lemma 6.6. Abbiamo tre casi

- se B_j è esterno a $\overline{A}$, allora $\alpha_j = 0$ su $\overline{A}$ e dunque
$$\int_A D_i(f\alpha_j)\, dx = 0 = \int_{\partial A} f\nu_i\alpha_j\, d\mathcal{H}^{n-1}.$$
- se B_j è interno a A. allora dalla Proposizione 6.3 e dal fatto che $\alpha_j = 0$ su ∂A
$$\int_A D_i(f\alpha_j)\, dx = 0 = \int_{\partial A} f\nu_i\alpha_j\, d\mathcal{H}^{n-1}.$$
- se $B_j \cap \partial A \neq 0$, allora B_j è contenuto in un aperto U_x del tipo in (iii) e in questo caso $f\alpha_j : U_x \to \mathbb{R}$ soddisfa le ipotesi della Proposizione 6.4. Segue che
$$\int_A D_i(f\alpha_j)\, dx = \int_{U_x} D_i(f\alpha_j)\, dx = \int_{\partial A \cap U_x} f\nu_i\alpha_j\, d\mathcal{H}^{n-1} = \int_{\partial A} f\nu_i\alpha_j\, d\mathcal{H}^{n-1}.$$

Sommando su $j = 1, \dots$ e tenendo conto che $\sum_{j=1}^\infty \alpha_j = 1$ in Ω, che il ricoprimento $\{B_j\}$ è localmente finito e che $\mathcal{H}^{n-1}(\partial A \cap \Omega) = \mathcal{H}^{n-1}(r(\partial A)) = \mathcal{H}^{n-1}(\partial A)$ per ipotesi, si ha

$$\begin{aligned}\int_A D_i f\, dx &= \int_{A\cap\Omega} D_i f\, dx = \int_A \sum_{j=1}^\infty (D_i f)\alpha_j\, dx = \sum_{j=1}^\infty \int_A D_i(f\alpha_j)\, dx \\ &= \sum_{j=1}^\infty \int_{\partial A} f\nu_i\alpha_j\, d\mathcal{H}^{n-1} = \int_{\partial A} f\nu_i \sum_{j=1}^\infty \alpha_j\, d\mathcal{H}^{n-1} = \int_{\partial A\cap\Omega} f\nu_i\, d\mathcal{H}^{n-1} \qquad (6.5) \\ &= \int_{\partial A} f\nu_i\, d\mathcal{H}^{n-1}.\end{aligned}$$

□