Sia $A : X \to X$ un operatore lineare su uno spazio X. Per ogni autovalore λ di A indichiamo con $V(\lambda, A)$ l'autospazio relativo all'autovalore λ di A.

8.1 Teorema. *Sia $A : X \to X$ un operatore autoaggiunto semidefinito positivo su uno spazio X euclideo o hermitiano. Allora λ è autovalore per A se e solo se λ^2 è autovalore per A^2 e $V(\lambda, A) = V(\lambda^2, A^2)$.*

Dimostrazione. Se $Ax = \lambda x$, allora $A^2x = A(Ax) = A(\lambda x) = \lambda Ax = \lambda^2 x$, cioè λ^2 è autovalore per A^2 e $V(\lambda, A) \subset V(\lambda^2, A^2)$.

Viceversa, siano $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ una base di X di autovettori di A e $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ gli autovalori relativi. Per ogni $x = \sum_{i=1}^n (x|u_i)u_i$, si ha, vedi Proposizione 7.4, $Ax = \sum_{i=1}^n \lambda_i(x|u_i)u_i$ e quindi $A^2x = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2(x|u_i)u_i$. Se $A^2x = \mu x$, $\mu \geq 0$, allora $\sum_{i=1}^k (\lambda_i^2 - \mu)(x|u_i)u_i = 0$, e quindi $(\lambda_i - \sqrt{\mu})(x|u_i) = 0$ $\forall i$, essendo λ_i e μ non negativi. Pertanto

$$Ax = \sum_{i=1}^n \lambda_i(x|u_i)u_i = \sqrt{\mu}\sum_{i=1}^n (x|u_i)u_i = \sqrt{\mu}x,$$

cioè $\sqrt{\mu}$ è un autovalore per A e $x \in V(\sqrt{\mu}, A)$. □

8.2 Teorema. *Sia $A : X \to X$ un operatore autoaggiunto e semidefinito positivo sullo spazio euclideo o hermitiano X. Esiste un unico operatore su X autoaggiunto e semidefinito positivo indicato con $A^{1/2}$ tale che $(A^{1/2})^2 = A$. Se $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ è una base ortonormale di X di autovettori di A e se $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ sono gli autovettori corrispondenti, allora*

$$A^{1/2}x = \sum_{i=1}^k \sqrt{\lambda_i}(x|u_i)u_i \qquad \forall x \in X. \tag{8.1}$$

Dimostrazione. (i) *(Unicità)* Siano A, B, C tre operatori semidefiniti positivi e autoaggiunti, tali che $B^2 = C^2 = A$. Dal Teorema 8.1 B e C hanno gli stessi autovalori e gli stessi autospazi relativi. Pertanto $B = C$.

(ii) *(Esistenza)* L'operatore in (8.1) ha come autovettori $u_1, u_2, \dots, u_n$ e autovalori relativi $\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}$ e quindi è semidefinito positivo. Inoltre si verifica facilmente che è anche autoaggiunto, vedi la dimostrazione del teorema spettrale, Teorema 7.3. Infine per ogni $x \in X$

$$\begin{aligned}(A^{1/2})^2x &= A^{1/2}\Big(\sum_{i=1}^n \sqrt{\lambda_i}(x|u_i)u_i\Big) = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \sqrt{\lambda_i}\sqrt{\lambda_j}(x|u_i)(u_j|u_i)u_j \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i(x|u_i)u_i = Ax.\end{aligned}$$

□

8.b A^*A e AA^*

Sia $A : X \to Y$ un operatore lineare tra spazi X e Y entrambi euclidei o hermitiani e sia $A^* : Y \to X$ l'operatore aggiunto.

8.3 Proposizione. *L'operatore $A^*A : X \to X$ è*

(i) *autoaggiunto,*
(ii) *semidefinito positivo,*

(iii) *Ax, A^*Ax e $(x|A^*Ax)$ sono tutti e tre nulli o tutti non nulli; pertanto $\ker(A^*A) = \ker A$ e A^*A è positivo se e solo se $\dim\ker A = 0$,*
(iv) *se $u_1, u_2, \dots, u_n$ sono autovettori di A^*A con autovalori relativi rispettivamente $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, allora*

$$(Au_i|Au_j) = \overline{\lambda_j}(u_i|u_j),$$

in particolare, se gli $u_1, u_2, \dots, u_n$ sono tra loro ortogonali, allora le immagini $Au_1, \dots, Au_n$ sono ortogonali.

Dimostrazione. (i) Si ha $(A^*A)^* = A^*A^{**} = A^*A$.

(ii) e (iii) Se $Ax = 0$ allora necessariamente $A^*Ax = 0$ e se $A^*Ax = 0$ allora $(x|A^*Ax) = 0$. D'altra parte $(x|A^*Ax) = (Ax|Ax) = |Ax|^2$ e quindi se $(x|A^*Ax) = 0$, allora $|Ax|^2 = 0$, cioè $Ax = 0$.

(iv) Se λ_j è l'autovalore di A^*A relativo a u_j, allora $(Au_i|Au_j) = (u_i|A^*Au_j) = \overline{\lambda_j}(u_i|u_j)$. □

Analogamente

8.4 Proposizione. *L'operatore $AA^* : Y \to Y$ è*

(i) *autoaggiunto,*
(ii) *semidefinito positivo,*
(iii) *A^*x, AA^*x e $(AA^*x|x)$ sono tutti e tre nulli o tutti e tre non nulli; pertanto $\ker(AA^*) = \ker A^*$ e AA^* è positivo se e solo se $\dim\ker A^* = 0$,*
(iv) *se $u_1, u_2, \dots, u_n$ sono autovettori di AA^* con autovalori relativi rispettivamente $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, allora*

$$(A^*u_i|A^*u_j) = \lambda_i(u_i|u_j),$$

in particolare, se gli $u_1, u_2, \dots, u_n$ sono tra loro ortogonali, allora i vettori $A^*u_1, \dots, A^*u_n$ sono ortogonali.

Dimostrazione. Le (i) (ii) (iii) (iv) seguono in modo analogo alle affermazioni della Proposizione 8.3. □

8.5 Proposizione. *Sia $A : X \to Y$ un operatore lineare tra spazi X e Y entrambi euclidei o hermitiani e sia $A^* : Y \to X$ l'operatore aggiunto. Allora AA^* e A^*A hanno uguali autovalori non nulli e per ogni autovalore $\lambda \neq 0$ gli autospazi $V(\lambda, A^*A)$ e $V(\lambda, AA^*)$ hanno la stessa dimensione. Più precisamente, se $u_1, u_2, \dots, u_k$ è una base ortornomale di $V(\lambda, A^*A)$, allora*

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}A(u_1),\ \dots\ ,\frac{1}{\sqrt{\lambda}}A(u_k)$$

è una base ortonormale dell'autospazio $V(\lambda, AA^*)$.

Dimostrazione. Sia λ un autovalore di A^*A non nullo. Osserviamo che *se x è un autovettore non nullo di A^*A con autovalore λ, allora Ax è un autovettore non nullo per AA^* con autovalore λ*. In particolare, λ è autovalore per AA^*. Infatti, se $A^*Ax = \lambda x$, allora $Ax \neq 0$ essendo $|Ax|^2 = (Ax|Ax) = (x|A^*Ax) = \lambda|x|^2 \neq 0$. e inoltre $AA^*(Ax) = A(A^*Ax) = A(\lambda x) = \lambda Ax$.

Sia $u_1, u_2, \dots, u_k$ una base ortonormale di $V(\lambda, A^*A)$. Allora, come abbiamo appena visto, $A(u_1), A(u_2), \cdots, A(u_k)$ sono autovettori non nulli di AA^* con autovalore λ e, cfr. Proposizione 8.3 (iv), i vettori $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}A(u_1), \dots, \frac{1}{\sqrt{\lambda}}A(u_k)$, sono ortonormali. In particolare

$$\dim V(\lambda, A^*A) \leq \dim V(\lambda, AA^*).$$

Ripetendo il ragionamento con A^* al posto di A, si ottiene che gli autovalori non nulli di AA^* sono autovalori non nulli di A^*A e che

$$\dim V(\lambda, AA^*) \leq \dim V(\lambda, A^*A).$$

Si conclude quindi che $\dim V(\lambda, AA^*) = \dim V(\lambda, A^*A)$ e che

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}A(u_1),\ \ldots,\ \frac{1}{\sqrt{\lambda}}A(u_k)$$

è una base ortonormale di $V(\lambda, AA^*)$. $\square$

8.6 Esercizio. Sia $A : X \to Y$ lineare tra spazi euclidei o hermitiani. Se $\dim X < \dim Y$, allora $\det(AA^*) = 0$.