Corso di Laurea in Ingegneria Informatica (270)
Metodi Matematici e Probabilistici (9 CFU)
Soluzioni della prova intermedia del 24/10/2014.

1. Impostare il calcolo del piano di regressione lineare $z = ax + by + c$ per i punti (x, y, z) dati rispettivamente da $(1, 1, 3)$, $(0, 1, 2)$, $(0, 3, 3)$, $(2, 1, 2)$, $(1, 2, 3)$.

Soluzione. Indico con $P_1, \cdots P_4$ i cinque punti dati e sia $P_i := (x_i, y_i, z_i)^T$ per $i = 1, \ldots, 4$. Si tratta trovare la terna $x := (a, b, c)$ minimizzante la funzione $\sum_{i=1}^{5} |z_i - ax_i - by_i - c|^2$. Siano

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad z := (3, 2, 3, 2, 3)^T$$

e $Ax = \mathbf{A}x$ l'operatore associato ad $\mathbf{A}$. La matrice $\mathbf{A}$ ha rango 3, dunque A nucleo nullo e il punto cercato $x := (a, b, c)^T$ è l'unica soluzione x dell'equazione $A^*Ax = A^*z$. Se si sceglie in $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^5$ il prodotto scalare standard, allora le basi standard di $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^5$ sono ortonormali, pertanto la matrice associata ad A^* è $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^T$. Basta allora risolvere il sistema $\mathbf{A}^T\mathbf{A}x = \mathbf{A}^Tz$, i.e., $x = (\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^Tz$. •

2. Sia $\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Impostare il calcolo di $\mathbf{A}^\dagger y$ dove $y = (1, 1, 2, 1)^T$.

Soluzione. La matrice $\mathbf{A}$ ha rango 2 quindi non ha nucleo. Pertanto l'inversa x di Moore-Penrose di y è l'unica soluzione dell'equazione $A^*Ax = A^*y$, i.e., $x = (A^*A)^{-1}A^*y$. Se si sceglie in $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^4$ il prodotto scalare standard, le basi standard di $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^4$ sono ortonormali. Pertanto la matrice associata ad A^* è $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^T$ ed è sufficiente calcolare $x := (\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^Ty$. •

3. Trovare la successione $\{x_n\}$ soluzione della ricorrenza $\begin{cases} x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 0 \ \forall n \geq 0, \\ x_0 = 0, x_1 = 1. \end{cases}$.

Soluzione. Le soluzioni dell'equazione caratterisca $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$ sono 2 e 3. La soluzione $\{x_n\}$ è dunque definita da $x_n := 3^n - 2^n \ \forall n \geq 0$. Vedi [GM] Sezione 20.b. •

4. Enunciare e dimostrare il teorema di decomposizione di Schur.

Soluzione. Vedi [GM] teorema 5.13. •

5. Sia $A : X \to Y$ un operatore lineare tra spazi euclidei e siano $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ i suoi valori singolari. Sia $||A||$ la norma dell'operatore A, $||A|| := \sup_{|x|=1} |Ax|$. Dimostrare che $||A||$ è il più grande valore singolare di A.

Soluzione. Dalla definizione $||A|| = \sup_{|x|=1} |Ax|$. Pertanto

$$||A||^2 = \sup_{|x|=1} |Ax|^2 = \sup_{|x|=1} \big(Ax|Ax\big) = \sup_{|x|=1} \big(A^*Ax|x\big) = \lambda$$

essendo λ il più grande autolvalore di A^*A. L'ultima uguaglianza è la caratterizzazione variazionale del più grande autovalore dell'operatore autoaggiunto A^*A. Se μ è il più grande valore singolare allora $\lambda = \mu^2$. Pertanto $||A||^2 = \mu^2$ e, essendo $\mu \geq 0$, si conclude che $||A|| = \mu$. •

6. Sia A un operatore autoaggiunto su uno spazio euclideo X. Quali proprietà hanno gli autovalori e gli autospazi di A?

Soluzione. Gli autovalori di A, o meglio, gli zeri del polinomio caratteristico, sono tutte reali ed esiste una base ortonormale di X fatta da autovettori di A. Queste due proprietà caratterizzano in effetti gli operatori autoaggiunti. •

7. Dare la definizione della funzione complessa $f(z) = e^z$ e elencare alcune sue proprietà.

Soluzione. [GM] Vedi 12.b. •

8. Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ una serie di potenze. Scrivere le relazioni che conosce tra la sua somma e la successione dei coefficienti $\{a_n\}$.

Soluzione. 1. Sia ρ definito da $\frac{1}{\rho} := \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Allora la serie data assolutamente converge in z se $|z| < \rho$ e non converge se $|z| > \rho$. 2. Supponiamo che $\rho > 0$. Detta $S(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ la somma, allora $S(z)$ è olomorfa nel cerchio $B(0,\rho)$ e $S'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ $\forall z \in B(0,\rho)$. In particolare si calcola ogni coefficiente a_n, $n \geq 0$, come $a_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!}$. 3. Si calcolano gli $\{a_n\}$ anche mediante la formula

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial^+ B(0,\rho/2)} \frac{S(s)}{s^{n+1}}\, ds, \qquad n \geq 0.$$

•

9. Calcolare, se possibile, la somma della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n+1} z^n$.

Soluzione. La serie ha raggio di convergenza 1. Poi per ogni intero n

$$\frac{n^2}{n+1} = n - 1 + \frac{1}{n+1}.$$

Si ha $\sum_{n=0}^{\infty} n z^n = zD(\sum_{n=0}^{\infty} z^n) = \frac{z}{(1-z)^2}$, $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ e $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} z^n = -\frac{1}{z}\log(1-z)$ se $|z| < 1$. Pertanto

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{n+1} z^n = \frac{z}{(1-z)^2} - \frac{1}{1-z} - \frac{1}{z}\log(1-z), \qquad |z| < 1.$$

•

10. Calcolare, se possibile, $\int_{\partial^+ B(0,1)} \frac{\sin(2z)}{z}\, dz$.

Soluzione. Si ha

$$\frac{\sin(2z)}{z} = \frac{2z + \frac{4}{3}z^3 + \cdots}{z} = 2 + \frac{4}{3}z^2 + \cdots$$

La funzione integranda ha una singolarità eliminabile in 0. Pertanto l'integrale cercato è nullo. •

11. Enunciare il teorema di derivazione termine a termine per le serie di potenze.

Soluzione. Vedi [GM] Teorema 11.19. •

12. Calcolare, se possibile, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\, dx$.

Soluzione. Sia $f(z) := \frac{z^2}{1+z^4}$. f è olomorfa tranne che sulle radici quarte di -1, i.e., $z_k = e^{i(\pi/4 + k\pi/2)}$, $k = 0,1,2,3$. Inoltre $|z|^{1.5}|f(z)| \to 0$ per $|z| \to \infty$. Per il teorema dei residui,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 2\pi\, i(\mathrm{Res}\,(f(z), z_0) + \mathrm{Res}\,(f(z), z_1)).$$

Le singolarità di f in z_0 e z_1 sono poli semplici. Pertanto

$$\mathrm{Res}\,(f(z), z_0) + \mathrm{Res}\,(f(z), z_1) = \frac{z_0^2}{4z_0^3} + \frac{z_1^2}{4z_1^3} = \frac{1}{4}(z_3 + z_2) = \frac{1}{4}(-i\sqrt{2}).$$

In definitiva,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 2\pi\, i \frac{1}{4}(-i)\sqrt{2} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

•