Il seguente metodo, noto come *metodo di Putzer*, calcola le potenze di $\mathbf{A}$ mediante la risoluzione di k ricorrenze scalari del primo ordine a partire dalla sola conoscenza degli autovalori di $\mathbf{A}$.

Sia $\mathbf{A} \in M_{k,k}(\mathbb{C})$ e siano $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ i k autovalori di $\mathbf{A}$ elencati in un ordine arbitrario. Siano $\mathbf{M}_0, \dots \mathbf{M}_k \in M_{k,k}(\mathbb{C})$ definite da

$$\begin{aligned}
&\mathbf{M}_0 = \mathrm{Id},\\
&\mathbf{M}_1 = (\mathbf{A} - \lambda_1 \,\mathrm{Id})\,\mathbf{M}_0\\
&\mathbf{M}_2 = (\mathbf{A} - \lambda_2 \,\mathrm{Id})\,\mathbf{M}_1\\
&\dots\\
&\mathbf{M}_k = (\mathbf{A} - \lambda_k \,\mathrm{Id})\,\mathbf{M}_{k-1}.
\end{aligned} \tag{21.13}$$

Osserviamo che $\mathbf{M}_k = p_{\mathbf{A}}(\mathbf{A})$ è il polinomio caratteristico di $\mathbf{A}$ valutato su $\mathbf{A}$ e pertanto $\mathbf{M}_k = 0$ per il teorema di Cayley–Hamilton. Siano poi $\{c_1(n)\}, \dots, \{c_k(n)\}$ le successioni definite dalle ricorrenze lineari *scalari* del primo ordine

$$\begin{aligned}
&c_1(n+1) = \lambda_1\, c_1(n), && c_1(0) = 1,\\
&c_2(n+1) = \lambda_2\, c_2(n) + c_1(n), && c_2(0) = 0\\
&c_3(n+1) = \lambda_3\, c_3(n) + c_2(n), && c_3(0) = 0\\
&\dots\\
&c_k(n+1) = \lambda_k\, c_k(n) + c_{k-1}(n), && c_k(0) = 0.
\end{aligned} \tag{21.14}$$

21.7 Teorema (Decomposizione di Putzer). *Per ogni $n \geq 0$ si ha $\mathbf{A}^n = \sum_{i=0}^{k-1} c_{i+1}(n)\,\mathbf{M}_i$.*

Dimostrazione. Sia $\mathbf{S}_n := \sum_{i=0}^{k-1} c_{i+1}(n)\,\mathbf{M}_i$. Si ha $\mathbf{A}\mathbf{M}_i = \lambda_{i+1}\mathbf{M}_i + \mathbf{M}_{i+1}$ per ogni $i = 0, \dots, k-1$. Pertanto

$$\begin{aligned}
\mathbf{S}_{n+1} - \mathbf{A}\mathbf{S}_n &= \sum_{i=0}^{k-1} \Big(c_{i+1}(n+1)\mathbf{M}_i - c_{i+1}(n)(\mathbf{M}_{i+1} + \lambda_{i+1}\mathbf{M}_i) \Big)\\
&= \sum_{i=0}^{k-1} \Big(c_{i+1}(n+1) - \lambda_{i+1} c_{i+1}(n) \Big)\mathbf{M}_i - \sum_{i=0}^{k-1} c_{i+1}(n)\mathbf{M}_{i+1}\\
&= \sum_{i=1}^{k-1} c_i(n)\mathbf{M}_i - \sum_{i=1}^{k} c_i(n)\mathbf{M}_i\\
&= -c_k(n)\mathbf{M}_k = 0.
\end{aligned}$$

Dunque $\{\mathbf{S}_n\}$ è la soluzione della ricorrenza

$$\begin{cases} \mathbf{S}_{n+1} = \mathbf{A}\mathbf{S}_n,\\ \mathbf{S}_0 = \mathrm{Id}, \end{cases}$$

cioè $\mathbf{S}_n = \mathbf{A}^n \ \forall n \geq 0$. □

21.8 Esercizio. Calcolare le potenze della matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ associata alla successione di Fibonacci, vedi Esercizio 21.6, utilizzando la formula di Putzer.

Soluzione. La matrice $\mathbf{A}$ ha due autovalori distinti

$$\lambda = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \qquad \mu = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Siano dunque

$$\mathbf{M}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{M}_1 = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

le matrici in (21.13). Le successioni $\{c_1(n)\}$ e $\{c_2(n)\}$ in (21.14) sono rispettivamente la successione soluzione di $c_1(n+1) = \lambda c_1(n)$, $c_1(0) = 1$, cioè

$$c_1(n) = \lambda^n \qquad \forall n \geq 0$$

e la successione soluzione di

$$\begin{cases} c_2(n+1) = \mu c_2(n) + c_1(n), \\ c_2(0) = 0, \end{cases}$$

cioè, vedi Esempio 21.4,

$$c_2(n) = \sum_{j=0}^{n-1} \mu^{n-1-j}\lambda^j = \mu^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j = \frac{\lambda^n - \mu^n}{\lambda - \mu} \qquad \forall n \geq 0.$$

Pertanto, vedi Teorema 21.7,

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^n &= \lambda^n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{\lambda^n - \mu^n}{\lambda - \mu}\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \\ &= \dots = \frac{1}{\lambda - \mu}\begin{pmatrix} \mu^{n-1} - \lambda^{n-1} & \lambda^n - \mu^n \\ \lambda^n - \mu^n & \lambda^{n+1} - \mu^{n+1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Nell'eseguire i calcoli omessi, fa comodo osservare che $\lambda + \mu = 1$ e $\lambda\mu = 1$.