

Giuseppe Modica

Brevi Note di Calcolo Combinatorio

Note in corso di stesura

1 dicembre 2009

Introduzione

Il contare oggetti è una delle prime, se non la prima, attività umane classificabile come “matematica”, esso si è sviluppato ad un livello scientifico ragionevole a partire da Eulero (1707–1783) e molti dei problemi allora considerati sono oggi classici. Negli ultimi decenni vi è stato un rinnovato interesse per la materia a causa di numerosi collegamenti con altre branche della matematica come la topologia, la meccanica e la probabilità e, ovviamente, la “computer science”.

Queste note raccolgono il materiale presentato nel corso di Matematica Discreta tenuto nell’ambito del Corso di laurea triennale in Ingegneria Informatica dell’Università di Firenze. La parte del corso dedicata all’argomento è di circa 30 ore (3 CFU). È stato possibile esporre circa l’80 per cento del contenuto di queste note con sufficiente dettaglio.

Esistono innumerevoli testi sull’argomento: da semplici presentazioni divulgative, a note, report, articoli, libri, trattati, internet e wikipedia, e enciclopedie. Alcuni dei (pochissimi) titoli consultati nella stesura di queste note sono in bibliografia.

Gli argomenti sono quelli di una breve introduzione ad alcuni problemi classici, essenzialmente uno-dimensionali: enumerazione di parti e funzioni, estrazioni, partizioni di insiemi e di interi, collocazioni, cammini su reticoli, con le corrispondenti successioni numeriche dei coefficienti binomiali, numeri di Stirling, Bell, Catalan. Segue una presentazione di alcuni problemi di conteggio su insiemi parzialmente ordinati, privilegiando l’uso della funzione di Möbius e delle formule di inversione. Le note si concludono con un cenno alla teoria dei modelli.

Le tecniche adottate utilizzano essenzialmente lo strumento delle funzioni generatrici, già noto agli studenti, la costruzione esplicita di bigezioni tra strutture.

Voglio infine ringraziare i molti studenti che con la loro lettura attenta hanno evidenziato fli innumerevoli errori e imprecisioni contentuti nelle bozze precedenti.

Firenze, Novembre 2008

Indice

Introduzione	2
1. Richiami di algebra lineare	1
1.a Autovalori	1
1.b Matrici simili	1
1.c Formule di Laplace	2
1.d Matrici triangolari superiori.....	2
1.e Una formula di inversione	3
2. Serie di potenze	5
2.a Serie di potenze	5
2.b Serie di potenze e funzioni olomorfe.....	7
2.c Invertibilità.....	9
2.d Prodotto di convoluzione	9
2.e Prodotti iterati.....	10
2.f Composizione	12
2.g Strutture combinatorie e funzioni generatrici	13
2.h Esercizi	13
3. Coefficienti binomiali	15
3.a Coefficienti binomiali	15
3.b Alcune formule sui coefficienti binomiali	15
3.c Formule di inversione	17
3.d Coefficienti binomiali generalizzati e serie binomiale..	18
3.e Numeri di Fibonacci e coefficienti binomiali	19
3.f Esercizi	22
4. Permutazioni	27
4.a Segno di una permutazione	27
4.b Rappresentazione ciclica.....	28
4.c Permutazioni libere	29
4.d Permutazioni cicliche	29
4.e Permutazioni senza punti fissi	29
4.f Esercizi	31
5. Insiemi, Multiinsiemi, Liste, Funzioni	33
5.a Insiemi.....	33
5.b Liste.....	33
5.c Multinsiemi.....	34
5.d Funzioni.....	34

5.e	Funzioni iniettive	35
5.f	Funzioni crescenti	36
5.g	Funzioni non decrescenti	36
5.h	Funzioni surgettive	37
5.i	Esercizi	39
6.	Estrazioni	41
6.a	Estrazioni ordinate	41
6.b	Estrazioni semplici	43
6.c	Esercizi	45
7.	Collocazioni di oggetti distinti	47
7.a	Oggetti distinti in scatole distinte	47
7.b	Proprietà moltiplicativa	50
7.c	Oggetti distinti in scatole indistinte	51
7.d	Partizioni di insiemi	53
7.e	Partizioni e liste di sottoinsiemi	54
7.f	Esercizi	55
8.	Collocazioni di oggetti indistinti	57
8.a	Oggetti indistinti in scatole distinte	57
8.b	Proprietà moltiplicativa	58
8.c	Oggetti indistinti in scatole indistinte	59
8.d	Decomposizioni o partizioni di interi	64
8.e	Collocazioni in Fisica Statistica	66
8.f	Esercizi	67
9.	Cammini, alberi, parentesi	69
9.a	Cammini	69
9.b	Cammini di Catalan	69
9.c	Numeri di Catalan	70
9.d	Cammini di Schröder	72
9.e	Altri esempi	74
9.f	Alberi su un insieme	77
9.g	Strutture combinatorie	80
9.h	Strutture unione	81
9.i	Strutture composte	81
9.j	Esercizi	83
10.	Il principio di inclusione-esclusione	87
10.a	La formula di inclusione-esclusione	87
10.b	La valenza	88
10.c	Qualche applicazione	89
10.d	Esercizi	92
11.	Insiemi parzialmente ordinati e formule di inversione	95
11.a	Insiemi parzialmente ordinati	95
11.b	Funzione di Möbius	96
11.c	Esempi di insiemi parzialmente ordinati	98
11.d	Formule di inversione	101

11.e	La funzione di Eulero	101
11.f	Il problema delle collane	102
11.g	Polinomi irriducibili in un campo finito	103
11.h	Formula di inclusione-esclusione	104
11.i	Colorazioni di un grafo	105
12.	Modelli	109
12.0.1	Richiami sui gruppi	109
12.a	Il gruppo ciclico C_n	111
12.b	Il gruppo diedrale	113
12.c	Il gruppo delle simmetrie del cubo	114
12.d	Il teorema di Burnside–Frobenius	114
12.e	Il conteggio dei modelli	117
12.f	Modelli rispetto ad una azione sul dominio	118
12.g	Esercizi	119

1. Richiami di algebra lineare

Raccogliamo in questo capitolo alcuni fatti elementari, ampiamente discussi nei corsi di base.

1.a Autovalori

Sia $\mathbf{A} \in M_{N,N}(\mathbb{K})$ una matrice quadrata a coefficienti in un campo \mathbb{K} . Un *autovalore* per \mathbf{A} è un numero $\lambda \in \mathbb{K}$ per cui esiste $v \in \mathbb{K}^N$ non nullo tale che $\mathbf{A}v = \lambda v$, i.e., λ è autovalore se $\ker(\lambda \text{Id} - \mathbf{A}) \neq \{0\}$. Gli autovalori sono dunque caratterizzati come i numeri in \mathbb{K} per cui la matrice $\lambda \text{Id} - \mathbf{A}$ non è invertibile e perciò come le radici del *polinomio caratteristico* $p_{\mathbf{A}}(\lambda) := \det(\lambda \text{Id} - \mathbf{A})$. In particolare, sono fatti equivalenti

- \mathbf{A} è invertibile,
- $\det \mathbf{A} \neq 0$,
- 0 non è autovalore per \mathbf{A} .

Guardando alla definizione di determinante, non è difficile convincersi che

$$\det(\lambda \text{Id} - \mathbf{A}) = \lambda^n - \text{tr} \mathbf{A} \lambda^{n-1} + \dots + (-1)^n \det \mathbf{A}. \quad (1.1)$$

1.b Matrici simili

Due matrici \mathbf{A} e \mathbf{B} si dicono (\mathbb{K} -)simili se esiste $\mathbf{S} \in M_{N,N}(\mathbb{K})$ tale che $\mathbf{A} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{S}$. Ovviamente la relazione di similitudine è una relazione di equivalenza. Inoltre, dalla formula di Binet, $\det \mathbf{A}\mathbf{B} = \det \mathbf{A} \det \mathbf{B}$, segue che il polinomio caratteristico (e quindi gli autovalori) di matrici simili sono gli stessi,

$$\det(\lambda \text{Id} - \mathbf{A}) = \det(\lambda \text{Id} - \mathbf{B}) \quad \text{se} \quad \mathbf{A} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{S}.$$

Poiché le matrici associate ad una applicazione lineare in basi differenti sono simili, segue che gli autovalori sono riferibili alla applicazione lineare $x \rightarrow \mathbf{A}x$, piuttosto che direttamente alla matrice \mathbf{A} .

Un caso interessante è quello delle matrici $\mathbf{A} \in M_{N,N}(\mathbb{K})$ il cui polinomio caratteristico si fattorizza in N fattori di primo grado

$$\det(\lambda \text{Id} - \mathbf{A}) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_N), \quad (1.2)$$

(questo è sempre vero se il campo è $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ per il teorema fondamentale dell'algebra). Si dimostra che vale la (1.2) se e solo se \mathbf{A} è simile ad una matrice triangolare superiore e, in questo caso, si ottiene

$$\operatorname{tr} \mathbf{A} = \lambda_1 + \cdots + \lambda_N, \quad \det \mathbf{A} = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_N$$

confrontando le (1.1) e (1.2).

1.c Formule di Laplace

Sia $\mathbf{A} = (\mathbf{A}_j^i) \in M_{N,N}(\mathbb{R})$. Indichiamo con $\widehat{\mathbf{A}}_j^i$ il determinante della sottomatrice $\mathbf{A}' \in M_{N-1,N-1}$ ottenuta da \mathbf{A} cancellando la riga i e la colonna j , detto il *complemento algebrico di \mathbf{A}_j^i* , e sia $\widehat{\mathbf{A}} := (\widehat{\mathbf{A}}_j^i)$.

Le *formule di Laplace* per il determinante

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \mathbf{A}_j^i \widehat{\mathbf{A}}_j^k &= \det \mathbf{A} \delta^{ik}, \\ \sum_{j=1}^N \mathbf{A}_i^j \widehat{\mathbf{A}}_k^j &= \det \mathbf{A} \delta_{ik}. \end{aligned} \tag{1.3}$$

si riscrivono in termini di prodotto di matrici introducendo la *matrice dei cofattori* $\operatorname{cof} \mathbf{A} := \widehat{\mathbf{A}}^T$, come

$$\begin{aligned} \mathbf{A} (\operatorname{cof} \mathbf{A}) &= \det \mathbf{A} \operatorname{Id}, \\ (\operatorname{cof} \mathbf{A}) \mathbf{A} &= \det \mathbf{A} \operatorname{Id}. \end{aligned} \tag{1.4}$$

In particolare, se $\det \mathbf{A} \neq 0$, allora

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\operatorname{cof} \mathbf{A}}{\det \mathbf{A}}. \tag{1.5}$$

Nel seguito incontreremo matrici \mathbf{A} a elementi interi. Dalla formula precedente segue che \mathbf{A}^{-1} è una matrice a elementi interi se \mathbf{A} ha elementi interi e $\det \mathbf{A} = 1$.

1.d Matrici triangolari superiori

Una matrice $\mathbf{A} = (\mathbf{A}_j^i) \in M_{N,N}$ si dice triangolare superiore se $\mathbf{A}_j^i = 0$ per ogni coppia (i, j) con $i > j$,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1^1 & \mathbf{A}_2^1 & \mathbf{A}_3^1 & \cdots & \mathbf{A}_n^1 \\ 0 & \mathbf{A}_2^2 & \mathbf{A}_3^2 & \cdots & \mathbf{A}_n^2 \\ 0 & 0 & \mathbf{A}_3^3 & \cdots & \mathbf{A}_n^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \mathbf{A}_n^n \end{pmatrix}$$

Le matrici diagonali sono evidentemente matrici triangolari superiori; e si verifica anche immediatamente che

- o la somma $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ e il prodotto \mathbf{AB} di matrici triangolari superiori sono ancora matrici triangolari superiori. In particolare

$$(\mathbf{AB})_k^i = \sum_{j=1}^N \mathbf{A}_j^i \mathbf{B}_k^j = \begin{cases} 0 & \text{se } i > k, \\ \sum_{j=i}^k \mathbf{A}_j^i \mathbf{B}_k^j & \text{se } i \leq k. \end{cases} \quad (1.6)$$

- o Se \mathbf{A} è triangolare superiore, anche $\lambda \text{Id} - \mathbf{A}$ è triangolare superiore. Segue dalla formula di Laplace che il polinomio caratteristico di \mathbf{A} è

$$\det(\lambda \text{Id} - \mathbf{A}) = (\lambda - \mathbf{A}_1^1)(\lambda - \mathbf{A}_2^2) \dots (\lambda - \mathbf{A}_N^N),$$

i.e., $\det(\lambda \text{Id} - \mathbf{A})$ si fattorizza in fattori di primo grado e gli autovalori di \mathbf{A} sono gli elementi della diagonale principale di \mathbf{A} . In particolare \mathbf{A} è invertibile se e solo se gli elementi sulla diagonale di \mathbf{A} sono tutti non nulli.

- o Se \mathbf{A} è triangolare superiore invertibile, allora \mathbf{A}^{-1} è anch'essa triangolare superiore. Infatti, siano i, j con $i < j$, e sia \mathbf{A}' la matrice ottenuta togliendo da \mathbf{A} la riga i -esima e la colonna j -esima. \mathbf{A}' è triangolare superiore ed ha almeno uno zero sulla diagonale principale e dunque $\widehat{\mathbf{A}}_j^i = \det \mathbf{A}' = 0$ se $i < j$. Segue che $\widehat{\mathbf{A}}$ è triangolare inferiore e dunque $\text{cof } \mathbf{A} = \widehat{\mathbf{A}}^T$ e \mathbf{A}^{-1} sono matrici triangolari superiori.

1.e Una formula di inversione

La formula (1.6) permette di dare una formula iterativa per il calcolo della matrice inversa di una matrice triangolare superiore. Se \mathbf{B} denota l'inversa di \mathbf{A} e \mathbf{A} è triangolare superiore allora, come abbiamo visto, anche \mathbf{B} è triangolare superiore, i.e., $\mathbf{B}_k^i = 0 \forall i, k, k < i$. Eseguendo ora i prodotti e ricordando che $\mathbf{BA} = \text{Id}$, si ottiene

$$1 = (\mathbf{BA})_i^i = \sum_{j=1}^N \mathbf{B}_j^i \mathbf{A}_i^j = \mathbf{B}_i^i \mathbf{A}_i^i$$

e per $k > i$

$$0 = (\mathbf{BA})_k^i = \sum_{j=1}^N \mathbf{B}_j^i \mathbf{A}_k^j = \sum_{j=i}^k \mathbf{B}_j^i \mathbf{A}_k^j$$

i.e.,

$$\mathbf{B}_k^i \mathbf{A}_k^k = - \sum_{j=i}^{k-1} \mathbf{B}_j^i \mathbf{A}_k^j.$$

Concludiamo pertanto che per ogni $i = 1, \dots, N$

$$\mathbf{B}_k^i = \begin{cases} 0 & \text{se } k < i, \\ \frac{1}{\mathbf{A}_i^i} & \text{se } k = i, \\ -\frac{1}{\mathbf{A}_k^k} \sum_{j=i}^{k-1} \mathbf{B}_j^i \mathbf{A}_k^j & \text{se } k > i, \end{cases} \quad (1.7)$$

formula che permette di calcolare per ogni i induttivamente gli elementi \mathbf{B}_j^i per $j \geq i$ a partire dall'elemento \mathbf{B}_i^i posto sulla diagonale.

2. Serie di potenze

Raccogliamo qui alcuni risultati utili della teoria delle serie di potenze che il lettore dovrebbe già conoscere. Per le dimostrazioni e ulteriori approfondimenti, rimandiamo a testi sulle serie di potenze, le funzioni olomorfe e le funzioni generatrici¹.

2.a Serie di potenze

Data una successione $\{a_n\}$ di numeri complessi, la *serie di potenze* centrata in 0 a coefficienti $\{a_n\}$ è

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n := a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n, \quad z \in \mathbb{C},$$

vale a dire la successione $\{s_n(z)\}$ dei polinomi

$$s_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k := a_0 + \sum_{k=1}^n a_k z^k, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Ricordiamo che, data una serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, il numero ρ definito da

$$\frac{1}{\rho} := \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|},$$

(usiamo qui le convenzioni $1/0^+ = +\infty$ e $1/(+\infty) = 0$) si chiama *raggio di convergenza* della serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Il motivo della denominazione è dovuto al fatto che la serie converge assolutamente se $|z| < \rho$, e non converge se $|z| > \rho$. Nel caso in cui $\rho > 0$, equivalentemente nel caso in cui la successione $\{a_n\}$ non cresca (in modulo) più che esponenzialmente, la somma della serie

$$A(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

è definita sul disco $\{|z| < \rho\}$.

Le serie di potenze si possono derivare e integrare termine a termine. Si ha infatti

¹ Si veda, ad esempio, M. Giaquinta, G. Modica, *Analisi Matematica, vol.2, Approssimazione e Processi discreti*, Pitagora Ed., Bologna, 2000, M. Giaquinta, G. Modica, *Note di Metodi Matematici per Ingegneria Informatica, Edizione 2007*, Pitagora Ed., Bologna, 2007 e R. Sprugnoli, *An Introduction to Mathematical Methods in Combinatorics*, 2006, <http://www.dsi.unifi.it/~resp>.

2.1 Teorema. Sia $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ la somma di una serie di potenze di raggio di convergenza ρ . Allora $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ e $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{z^{n+1}}{n+1}$ hanno lo stesso raggio di convergenza ρ . Se poi $\rho > 0$, allora $A(z)$ è derivabile in $B(0, \rho)$ e

$$A'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1},$$

$$\int_{\gamma} A(z) dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\gamma(1)^{n+1} - \gamma(0)^{n+1}}{n+1}$$

per ogni curva C^1 a tratti $\gamma : [0, 1] \rightarrow B(0, \rho)$.

Segue facilmente il seguente corollario.

2.2 Corollario. Sia $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ la somma di una serie di potenze con raggio di convergenza $\rho > 0$. Allora

$$a_n = \frac{D^n A(0)}{n!}.$$

In particolare, vi è una corrispondenza biunivoca tra la successione $\{a_n\}$ e la funzione somma della serie $A(z)$.

In altre parole, $\{a_n\}$ e $A(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ contengono la stessa “informazione” (sempre che $\{a_n\}$ abbia una crescita al più esponenziale). La funzione $A(z)$, $|z| < \rho$, è insomma una nuova “vista” della successione $\{a_n\}$. Se $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $|z| < \rho$, $\rho > 0$, si usa una delle seguenti notazioni

$$[A(z)]_n, \quad [z^n]A(z)$$

per indicare il coefficiente a_n del monomio $a_n z^n$.

Convieni evidenziare alcune regole di calcolo in parte ovvie o derivanti dal Teorema 2.1

$$\begin{aligned} [zA(z)]_n &= [A(z)]_{n-1}, & [z^2A(z)]_n &= [A(z)]_{n-2}, & \dots \\ [A(z)]_n &= [zA(z)]_{n+1} = [z^2A(z)]_{n+2} = \dots \\ \left[\frac{A(z)}{z}\right]_n &= [A(z)]_{n+1}, \\ [A'(z)]_n &= (n+1)[A(z)]_{n+1} \\ \left[\int_{\gamma} A(w) dw\right]_n &= \frac{1}{n}[A(z)]_{n-1}. \end{aligned}$$

Nell’ultima formula $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ è una curva tale che $\gamma(0) = 0$ e $\gamma(1) = z$.

Ovviamente il Corollario 2.2 implica anche che le somme di due serie di potenze $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ e $B(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ con raggi di convergenza positivi hanno somme uguali in un intorno dello zero se e solo se $a_n = b_n$ per ogni n .

2.b Serie di potenze e funzioni olomorfe

Il Teorema 2.1 afferma che la somma di una serie di potenze $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ è una *funzione olomorfa* all'interno del cerchio di convergenza $B(0, \rho)$. Vale anche il viceversa. Più precisamente si ha

2.3 Proposizione. *Sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione olomorfa in un aperto $\Omega \subset \mathbb{C}$ e $z_0 \in \Omega$. Allora*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad \text{se } |z| < \text{dist}(z_0, \partial\Omega)$$

con

$$a_n := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial^+ A} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \quad \forall n \geq 0$$

dove $\partial^+ A$ è una curva che percorre in senso antiorario il bordo di un aperto regolare $A \subset \Omega$ contenente z_0 .

In particolare se $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $|z| < \rho$, $\rho > 0$, segue che

$$[A(z)]_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial^+ A} \frac{A(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta \quad \forall n \geq 0 \quad (2.1)$$

dove $\partial^+ A$ è una curva che percorre in senso antiorario il bordo di un arbitrario aperto regolare $A \subset \Omega$ contenente l'origine.

In termini di residui, la (2.1) si scrive anche come

$$[A(z)]_n = \text{Res}(A(z)z^{-n-1}, 0), \quad \forall n \geq 0.$$

Sia $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $|z| < \rho$, $\rho > 0$. Essendo $A(z)$ olomorfa sul cerchio $B(0, r)$, $A(z)$ si prolunga in modo unico come funzione olomorfa ad una funzione $\widehat{A}(z)$ definita su un dominio massimale Ω contenente $B(0, \rho)$, dominio che non include mai al suo interno $B(0, \rho)$, perché $\text{dist}(0, \Omega) = \rho$. In altri termini, il raggio di convergenza della serie di potenze è la distanza dall'origine del punto singolare di $\widehat{A}(z)$ più vicino all'origine.

Se $\widehat{A}(z)$ è olomorfa in tutto \mathbb{C} eccetto che in un numero finito di punti singolari $\{z_1, z_2, \dots, z_p\}$, allora dal teorema dei residui segue anche che

$$\begin{aligned} [A(z)]_n &= \text{Res}(\widehat{A}(z)z^{-n-1}, 0) \\ &= - \sum_{k=1}^p \text{Res}(\widehat{A}(z)z^{-n-1}, z_k) - \text{Res}(\widehat{A}(z)z^{-n-1}, \infty) \\ &= - \sum_{k=1}^p \text{Res}(\widehat{A}(z)z^{-n-1}, z_k), \end{aligned}$$

formula che a volte è assai utile per il calcolo di $\{a_n\}$ a partire da $\widehat{A}(z)$.

2.4 Esempio. L'esempio tipico di serie di potenze è la *serie geometrica* o funzione generatrice della sequenza $\{1, 1, 1, \dots\}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

la cui somma è

$$S(z) := \sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}, \quad |z| < 1.$$

Equivalentemente,

$$\left[\frac{1}{1-z} \right]_n = 1 \quad \forall n \geq 0.$$

Il prolungamento massimale olomorfo di $S(z)$ è evidentemente $\frac{1}{1-z}$, $z \neq 1$.

2.5 Esempio. Usando ad esempio la formula di Taylor, non è difficile provare che

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Equivalentemente

$$\left[e^z \right]_n = \frac{1}{n!} \quad \forall n \geq 0.$$

2.6 Esempio (Logaritmo). Sostituendo x con $-x$ nella

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad |x| < 1,$$

si ottiene

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \quad |x| < 1,$$

e, integrando,

$$\log(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t} dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad |x| < 1, \quad (2.2)$$

i.e., $[\log(1+x)]_0 = 0$ e

$$[\log(1+x)]_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n = 0, \\ \frac{(-1)^{n-1}}{n} & \text{se } n \geq 1. \end{cases}$$

2.7 Esempio (Arcotangente). Sostituendo x con $-x^2$ nella

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad |x| < 1,$$

e integrando termine a termine, cfr. il Teorema 2.1, si ottiene

$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad |x| < 1, \quad (2.3)$$

D'altra parte si vede immediatamente che il raggio di convergenza della serie dell'arcotangente è 1. Infine la (2.3) si riscrive anche come

$$[\arctan x]_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ è pari,} \\ \frac{(-1)^p}{n} & \text{se } n = 2p + 1. \end{cases}$$

2.c Invertibilità

2.8 Teorema. Sia $G : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione olomorfa definita su un aperto Ω contenente lo zero con $G(0) = 0$ e $G'(0) \neq 0$. Allora esiste un'unica funzione olomorfa $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ definita in un aperto U contenente lo zero tale che

$$G(f(z)) = z \quad \forall z \in U$$

Non è difficile utilizzando la (2.1) trovare una formula esplicita per lo sviluppo di $f(z)$ in serie di potenze centrato in z .

2.9 Corollario (Lagrange). Con le notazioni del Teorema 2.8 si ha per ogni intero $n \geq 1$

$$[f(z)]_n = \frac{1}{n} \left[\left(\frac{z}{G(z)} \right)^n \right]_{n-1}. \tag{2.4}$$

Dimostrazione. Osserviamo anzitutto che 0 è uno zero di ordine uno per G essendo $G'(0) \neq 0$. Segue che $\frac{1}{G(w)} = \frac{1}{w}h(w)$ con h olomorfa con $h(0) \neq 0$, da cui

$$\left(\frac{w}{G^n(w)} \right) = w^{-n+1}g(w), \quad g(w) := h^n(w)$$

e quindi

$$\left(\frac{w}{G^n(w)} \right)' = (-n+1)w^{-n}g(w) + w^{-n+1}g'(w).$$

Pertanto

$$\text{Res} \left(\left(\frac{w}{G^n(w)} \right)', 0 \right) = (-n+1)[g(w)]_{n-1} + [g'(w)]_{n-2} = 0. \tag{2.5}$$

Se ora A è un dominio regolare con $0 \in A \subset W$, allora usando la (2.1), cambiando variabile con $\zeta = G(w)$ nell'integrale si ha

$$\begin{aligned} [f(z)]_n &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial+G(A)} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial+A} w \frac{G'(w)}{G^{n+1}(w)} dw = -\frac{1}{2\pi i n} \int_{\partial+A} \left(\frac{1}{G^n(w)} \right)' w dw \\ &= -\frac{1}{2\pi i n} \int_{\partial+A} \left(\frac{w}{G^n(w)} \right)' dw + \frac{1}{2\pi i n} \int_{\partial+A} \frac{1}{G^n(w)} dw \\ &= \frac{1}{2\pi i n} \int_{\partial+A} \left(\frac{w}{G(w)} \right)^n \frac{1}{w^n} dw \\ &= \frac{1}{n} \left[\frac{z^n}{G^n(z)} \right]_{n-1}, \end{aligned}$$

essendo

$$\int_{\partial+A} \left(\frac{w}{G^n(w)} \right)' dw = 2\pi i \text{Res} \left(\left(\frac{w}{G^n(w)} \right)', 0 \right) = 0$$

per la (2.5). □

2.d Prodotto di convoluzione

2.10 Definizione. Il prodotto di convoluzione di due successioni $a = \{a_n\}$ e $b = \{b_n\}$ è la successione denotata con $\{a * b\}_n$ e definita da

$$(a * b)_n := \sum_{i+j=n} a_i b_j = \sum_{j=0}^n a_j b_{n-j}.$$

La seconda somma è estesa a tutte le coppie (i, j) di interi nonnegativi con $i + j = n$.

Dalla definizione

$$\begin{aligned}(a * b)_0 &= a_0 b_0, \\ (a * b)_1 &= a_0 b_1 + a_1 b_0, \\ (a * b)_2 &= a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0, \\ &\dots\end{aligned}$$

Il prodotto è evidentemente commutativo e bilineare. Vale inoltre il seguente teorema.

2.11 Teorema (Cauchy). Siano $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ e $B(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ le somme di due serie di potenze con raggio di convergenza ρ_a e ρ_b positivi. Allora la serie di potenze dei prodotti di convoluzione $\{c_n\}$,

$$c_n = (a * b)_n, \quad \forall n \geq 0$$

converge per $|z| < \min(\rho_a, \rho_b)$ e

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = A(z)B(z) \quad \forall z, |z| < \min(\rho_a, \rho_b).$$

Segue

$$[A(z)B(z)]_n = \sum_{i+j=n} a_i b_j \quad \forall n \geq 0. \quad (2.6)$$

2.12 Corollario. Se $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n}{n!} z^n$ e $G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g_n}{n!} z^n$ sono le somme di due serie di potenze con raggio di convergenza positivi, allora

$$[F(z)G(z)]_n = \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} f_j g_{n-j}. \quad (2.7)$$

2.e Prodotti iterati

Se $a = \{a_n\}$, $b = \{b_n\}$ e $c = \{c_n\}$ sono tre successioni, allora

$$\begin{aligned}((a * b) * c)_n &= \sum_{h+k=n} (a * b)_h c_k = \sum_{h+k=n} \sum_{i+j=h} a_i b_j c_k = \sum_{i+j+k=n} a_i b_j c_k, \\ (a * (b * c))_n &= \sum_{i+h=n} a_i (b * c)_h = \sum_{i+h=n} \sum_{j+k=h} a_i b_j c_k = \sum_{i+j+k=n} a_i b_j c_k,\end{aligned}$$

i.e., il prodotto di convoluzione è *associativo*, $a * (b * c) = (a * b) * c$. Il prodotto di convoluzione delle successioni a, b e c è allora definito come la successione $\{(a * b * c)_n\}$ definita da

$$(a * b * c)_n := ((a * b) * c)_n = \sum_{i+j+k=n} a_i b_j c_k,$$

dove l'ultima somma è estesa a tutte le terne (i, j, k) di interi nonnegativi tali che $i + j + k = n$. I primi termini di $a * b * c$ sono

$$\begin{aligned} (a * b * c)_0 &= a_0 b_0 c_0, \\ (a * b * c)_1 &= a_1 b_0 c_0 + a_0 b_1 c_0 + a_0 b_0 c_1, \\ (a * b * c)_2 &= a_2 b_0 c_0 + a_1 b_1 c_0 + a_0 b_2 c_0 + a_1 b_0 c_1 + a_0 b_1 c_1 + a_0 b_0 c_2, \\ &\dots \end{aligned}$$

Applicando due volte il Teorema 2.11 si conclude che

2.13 Proposizione. Siano $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $B(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ e $C(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ le somme di tre serie di potenze con raggio di convergenza positivo. Allora

$$[A(z)B(z)C(z)]_n = (a * b * c)_n = \sum_{i+j+k=n} a_i b_j c_k \quad \forall n \geq 0.$$

Procedendo per induzione, si definisce il *prodotto di convoluzione di q successioni* $a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(q)}$ come la successione indicata con $a^{(1)} * a^{(2)} * \dots * a^{(q)}$ e definita per $n = 0, 1, \dots$ da

$$(a^{(1)} * a^{(2)} * \dots * a^{(q)})_n := \sum_{i_1+i_2+\dots+i_q=n} a_{i_1}^{(1)} a_{i_2}^{(2)} \dots a_{i_q}^{(q)}; \quad (2.8)$$

la somma si intende estesa a tutte le q -uple di interi (i_1, i_2, \dots, i_q) non negativi con somma n . Applicando il Teorema 2.11 $(q - 1)$ -volte, si ottiene il seguente teorema.

2.14 Teorema. Siano $A_j(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(j)} z^n$, $j = 1, 2, \dots, q$ le somme di q serie di potenze con raggi di convergenza positivi. Allora per ogni $n \geq 0$

$$\begin{aligned} [A_1(z) A_2(z) \dots A_q(z)]_n &= (a^{(1)} * a^{(2)} * \dots * a^{(q)})_n \\ &= \sum_{i_1+i_2+\dots+i_q=n} a_{i_1}^{(1)} a_{i_2}^{(2)} \dots a_{i_q}^{(q)}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Un caso particolare è quello delle potenze: se $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ in un intorno dell'origine, allora

$$\begin{aligned} [A^2(z)]_n &= (a * a)_n = \sum_{i+j=n} a_i a_j, \\ [A^3(z)]_n &= (a * a * a)_n = \sum_{i+j+k=n} a_i a_j a_k, \\ &\dots \\ [A^q(z)]_n &= (\underbrace{a * a * \dots * a}_{q \text{ volte}})_n = \sum_{i_1+i_2+\dots+i_q=n} a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_q}, \\ &\dots \end{aligned} \quad (2.10)$$

2.f Composizione

2.15 Teorema. Siano $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$, e $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n z^n$ definite in un intorno di zero e sia $f(0) = f_0 = 0$. Allora $g(f(z))$ è olomorfa in un intorno di zero e $g(f(z)) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n z^n$ dove per ogni $n \geq 1$

$$h_n = [g(f(z))]_n = \sum_{k=1}^n g_k \left(\sum_{i_1 + \dots + i_k = n} f_{i_1} f_{i_2} \dots f_{i_k} \right)$$

Dimostrazione. Per ogni intero $k \geq 1$ la funzione $f^k(z)$ ha uno zero di ordine k in zero, i.e., $[f^k(z)]_j = 0 \forall j < k$. Si ha allora

$$\begin{aligned} g(f(z)) &= \sum_{k=0}^{\infty} g_k f^k(z) = g_0 + \sum_{k=1}^{\infty} g_k \left(\sum_{n=k}^{\infty} [f^k(z)]_n z^n \right) \\ &= g_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^n g_k [f^k(z)]_n \right) z^n \end{aligned}$$

e pertanto $h_0 = g_0 = G(0)$ e, dalla (2.10)

$$h_n = \sum_{k=1}^n [g(z)]_k [f^k]_n = \sum_{k=1}^n g_k \left(\sum_{i_1 + \dots + i_k = n} f_{i_1} f_{i_2} \dots f_{i_k} \right)$$

per ogni $n \geq 1$. □

Conviene mettere in evidenza la seguente variante.

2.16 Corollario. Siano $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$ e $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} z^n$ definite in un intorno di zero. Allora $g(f(z) - f(0))$ è olomorfa in un intorno di zero e $g(f(z) - f(0)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} z^n$ dove $c_0 = b_0$ e per ogni $n \geq 1$

$$c_n = \sum_{k=1}^n \frac{b_k}{k!} \sum_{i_1 + \dots + i_k = n} \binom{n}{i_1 \ i_2 \ \dots \ i_k} a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k}.$$

Dimostrazione. Basta scegliere $f_n = b_n/n!$, $g_n = b_n/n!$, $h_n = c_n/n!$ applicare il Teorema 2.15 moltiplicando e dividendo la somma a destra per $n!$. □

I numeri

$$\binom{n}{i_1 \ i_2 \ \dots \ i_k} := \frac{n!}{i_1! i_2! \dots i_k!}, \quad i_1 + \dots + i_k = n \quad (2.11)$$

si chiamano *coefficienti multinomiali*. Vedremo il loro significato combinatorio nel Paragrafo 7.1. Notare che il coefficiente multinomiale di grado due è il coefficiente binomiale

$$\binom{n}{k \ n-k} = \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

e che non c'è incompatibilità fra le due notazioni essendoci un unico coefficiente multinomiale di grado 1, $\binom{n}{n} = 1$.

2.g Strutture combinatorie e funzioni generatrici

Una *struttura combinatoria* \mathcal{A} produce per ogni intero $n \geq 0$ un certo numero a_n di configurazioni distinte. Ad esempio per la struttura combinatoria “estrazione da una popolazione” a_n è in numero di estrazioni possibili di n dalla popolazione.

2.17 Definizione. Se $\{a_n\}$ è la successione prodotta da una struttura combinatoria \mathcal{A} , si chiamano

- (i) funzione generatrice (o generatore) della struttura \mathcal{A} la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, i.e., la successione dei polinomi

$$P_n(z) := \sum_{k=0}^n a_k z^k, \quad n = 0, 1, \dots$$

- (ii) funzione generatrice esponenziale (o generatore esponenziale) della struttura la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$, i.e., la successione dei polinomi

$$P_n(z) := \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k!} z^k, \quad n = 0, 1, \dots$$

Sebbene la nozione di serie sia sufficiente per gli scopi del calcolo combinatorio, perché molti calcoli si possono fare per induzione, le serie che compaiono in queste note convergono tutte in un intorno di zero. Conviene allora utilizzare anche la teoria delle funzioni olomorfe. Qui, come del resto in molta letteratura, si intende per *funzione generatrice* della struttura \mathcal{A} una delle seguenti

- la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$,
- la funzione somma $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $|z| < \rho$,
- l'estensione massimale olomorfa \hat{A} di A .

Ovviamente, non c'è equivoco, giacché ognuna delle tre definizioni determina univocamente le altre. Analogamente, si intende per *funzione generatrice esponenziale* della struttura \mathcal{A} una delle seguenti

- la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$,
- la funzione somma $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$, $|z| < \rho$,
- l'estensione massimale olomorfa \hat{A} di A .

2.h Esercizi

2.18 Esercizio. Dimostrare la formula del binomio di Newton a partire da partire dalla identità $e^{t(x+y)} = e^{tx} e^{ty}$.

2.19 Esercizio. Sia $\{a_n\}$ una successione di numeri complessi a crescita al più esponenziale e $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $|z| < \rho$ la somma della sua funzione generatrice. Calcolare la funzione generatrice delle seguenti successioni

- $\{\alpha a_0, \alpha a_1, \alpha a_2, \alpha a_3, \dots\}$, $\alpha \in \mathbb{C}$,
- $\{a_0, 0, a_1, 0, a_2, 0, \dots\}$,
- $\{a_0, 0, a_2, 0, a_4, 0, \dots\}$,
- $\{a_1, 0, a_3, 0, a_5, 0, \dots\}$,

- $\{0, 0, 0, a_0, a_1, a_2, a_3, \dots\}$,
- $\{a_3, a_4, a_5, a_6, \dots\}$,
- $\{a_0, 2a_1, 3a_2, 4a_3, 5a_4, \dots\}$,
- $\{a_0, a_1/2, a_2/3, a_3/4, a_4/5, \dots\}$,
- $\{a_0, a_0 + a_1, a_1 + a_2, a_2 + a_3, \dots\}$,
- $\{a_0 + a_1, a_1 + a_2, a_2 + a_3, a_3 + a_4, \dots\}$,
- $\{a_0, a_0 + a_1, a_0 + a_1 + a_2, a_0 + a_1 + a_2 + a_3, \dots\}$.

3. Coefficienti binomiali

3.a Coefficienti binomiali

I coefficienti binomiali sono definiti da

$$\binom{n}{k} := \begin{cases} 1 & \text{se } k = 0, \\ 0 & k > n, \\ \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} & \text{se } n \geq 1 \text{ e } 1 \leq k \leq n. \end{cases}$$

È d'uso raggruppare i coefficienti binomiali in una tabella infinita data da

$$\mathbf{C} := (\mathbf{C}_k^n), \quad \mathbf{C}_k^n := \binom{n}{k}$$

detta *triangolo di Tartaglia* o di *Pascal* per la disposizione a triangolo dei suoi elementi non nulli. Si osservi, cfr. la Figura 3.1, che le righe della tabella sono tutte definitivamente nulle.

Ricordiamo la formula del *binomio di Newton*

$$(1+z)^n := \binom{n}{0} + \binom{n}{1}z + \dots + \binom{n}{n}z^n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k}z^k$$

che si dimostra in molti modi, ad esempio per induzione diretta su n , o utilizzando la formula di Taylor. In altre parole, $E(z) := (1+z)^n$ è la *funzione generatrice della successione* $\{\binom{n}{k}\}$, i.e.,

$$[(1+z)^n]_k = \binom{n}{k}.$$

3.b Alcune formule sui coefficienti binomiali

Le formule note sui coefficienti binomiali sono moltissime. La proposizione seguente ne raccoglie alcune tra le più semplici ed utili.

3.1 Proposizione. *Si ha*

$$(i) \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \forall 0 \leq k \leq n,$$

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$n = 0$	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$n = 1$	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
$n = 2$	1	2	1	0	0	0	0	0	0	0
$n = 3$	1	3	3	1	0	0	0	0	0	0
$n = 4$	1	4	6	4	1	0	0	0	0	0
$n = 5$	1	5	10	10	5	1	0	0	0	0
$n = 6$	1	6	15	20	15	6	1	0	0	0
$n = 7$	1	7	21	35	35	21	7	1	0	0
$n = 8$	1	8	28	56	70	56	28	8	1	0
$n = 9$	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1

Figura 3.1. Il triangolo di Tartaglia.

- (ii) $\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1} \quad \forall n \geq k \geq 1,$
- (iii) [Stifel] $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \quad \forall n \geq k \geq 1,$
- (iv) $\binom{n}{j} \binom{j}{k} = \binom{n}{k} \binom{n-k}{j-k} \quad \forall n \geq j \geq k \geq 0,$
- (v) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad \forall k, 0 \leq k \leq n,$
- (vi) $k \rightarrow \binom{n}{k}$ ha un massimo per $k = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor,$
- (vii) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n,$
- (viii) $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = \delta_{0,n} = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \\ 0 & \text{se } n \neq 0 \end{cases} .,$
- (ix) $\binom{n}{k} \leq 2^n.$

Dimostrazione. (i), (ii), (iii), (iv) e (v) seguono direttamente dalla definizione. (vi) segue dalla definizione se $2k \geq n$ e quindi dalla (v) se $2k < n$. (vii) e (viii) sono casi particolari della formula del binomio di Newton $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^k = (1+z)^n$ per $z = 1$ e $z = -1$. Infine (ix) segue da (vii). \square

La stima (ix) può essere migliorata. Utilizzando la formula asintotica di Stirling per il fattoriale

$$\frac{n!}{n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}} \rightarrow 1 \quad \text{per } n \rightarrow \infty,$$

è facile verificare che

$$\frac{\binom{2n}{n}}{\frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}} \rightarrow 1 \quad \text{per } n \rightarrow \infty.$$

La stima precedente è “accurata” già per $n = 4$ poiché $\binom{8}{4} = 70$ e $4^4 \frac{1}{\sqrt{\pi 4}} \simeq 72.2$.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$n = 0$	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$n = 1$	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
$n = 2$	1	-2	1	0	0	0	0	0	0	0
$n = 3$	-1	3	-3	1	0	0	0	0	0	0
$n = 4$	1	-4	6	-4	1	0	0	0	0	0
$n = 5$	-1	5	-10	10	-5	1	0	0	0	0
$n = 6$	1	-6	15	-20	15	-6	1	0	0	0
$n = 7$	-1	7	-21	35	-35	21	-7	1	0	0
$n = 8$	1	-8	28	-56	70	-56	28	-8	1	0
$n = 9$	-1	9	-36	84	-126	126	-84	36	-9	1

Figura 3.2. La tabella inversa dei coefficienti binomiali.

3.c Formule di inversione

Si noti che $\binom{n}{n} = 1 \forall n \geq 0$. Dunque per ogni intero $N \geq 1$, la matrice $\mathbf{C}_N := (\mathbf{C}_k^n)$, $n, k = 0, \dots, N$, è triangolare inferiore, a elementi interi e con autovalori tutti 1. \mathbf{C}_N è dunque invertibile, triangolare inferiore con inversa triangolare inferiore a elementi interi ed elementi sulla diagonale uguali a 1. Si ha

3.2 Teorema. Per ogni $n, k = 0, \dots, N$ si ha $(\mathbf{C}_N^{-1})_n^k = (-1)^{n+k} \binom{n}{k}$.

Dimostrazione. Infatti, se $\mathbf{B} := (\mathbf{B}_n^k)$, $\mathbf{B}_n^k = (-1)^{n+k} \binom{n}{k}$, allora $\mathbf{C}_N \mathbf{B}$ è triangolare inferiore e per $n \geq k$

$$\begin{aligned} (\mathbf{C}_N \mathbf{B})_n^k &= \sum_{j=1}^N \binom{n}{j} (-1)^{j+k} \binom{j}{k} = \sum_{j=k}^n (-1)^{j+k} \binom{n}{j} \binom{j}{k} \\ &= \binom{n}{k} \sum_{j=k}^n (-1)^{j+k} \binom{n-k}{j-k} = \binom{n}{k} \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i \binom{n-k}{i} \\ &= \binom{n}{k} \delta_{0, n-k} = \delta_{n, k}. \end{aligned}$$

cfr. le (iv) e (viii), Proposizione 3.1. □

Si hanno dunque le seguenti *formule di inversione*.

3.3 Corollario. Due successioni $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ verificano le relazioni

$$y_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x_k, \quad \forall n \geq 0. \tag{3.1}$$

se e solo se

$$x_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n+k} \binom{n}{k} y_k, \quad \forall n \geq 0. \tag{3.2}$$

e analogamente

3.4 Corollario. Due N -uple $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ di numeri verificano le relazioni

$$y_n = \sum_{k=n}^N \binom{k}{n} x_k, \quad \forall n, 0 \leq n \leq N, \quad (3.3)$$

se e solo se

$$x_n = \sum_{k=n}^N (-1)^{n+k} \binom{k}{n} y_k, \quad \forall n, 0 \leq n \leq N. \quad (3.4)$$

3.d Coefficienti binomiali generalizzati e serie binomiale

Se $\alpha \in \mathbb{R}$ si definisce la sequenza dei *coefficienti binomiali generalizzati* $\binom{\alpha}{n}$ con

$$\binom{\alpha}{n} := \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0, \\ \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} & \text{se } n \geq 1. \end{cases}$$

Si osservi che $\{\binom{\alpha}{k}\}_k$ è definitivamente nulla se e solo se α è un intero positivo. La funzione generatrice corrispondente, detta anche *serie binomiale*,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n \quad (3.5)$$

si calcola esplicitamente. Si ha

3.5 Proposizione (Serie binomiale). Si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n = (1+z)^\alpha \quad \forall z, |z| < 1.$$

Dimostrazione. Poiché

$$\frac{\left| \binom{\alpha}{n+1} \right|}{\left| \binom{\alpha}{n} \right|} = \frac{|\alpha - n|}{|n+1|} \rightarrow 1 \quad \text{per } n \rightarrow \infty,$$

segue per un noto criterio che anche $\sqrt[n]{|a_n|} \rightarrow 1$; pertanto la serie in (3.5) ha raggio di convergenza 1.

Basta ora osservare che per ogni n intero si ha $D^n(1+z)^\alpha = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+z)^{\alpha-n}$, e quindi la serie (3.5) è la serie di Taylor di $(1+z)^\alpha$ centrata in 0. Alternativamente, sia $S(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n$, $|z| < 1$ la somma della serie binomiale. Derivando termine a termine, si trova

$$(1+z)S'(z) = \alpha S(z), \quad |z| < 1,$$

quindi

$$\left(\frac{S(z)}{(1+z)^\alpha} \right)' = \frac{(1+z)S'(z) - \alpha S(z)}{(1+z)^{\alpha+1}} = 0.$$

Pertanto $S(z) = c(1+z)^\alpha$ se $|z| < 1$, c essendo una costante; infine da $S(0) = 1$ segue $c = 1$. \square

3.6 Esempio (Arcoseno). Sostituendo z con $-x^2$ e scegliendo $\alpha = -1/2$, si ottiene

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} (-1)^n x^{2n}, \quad |x| < 1$$

e integrando,

$$\begin{aligned} \arcsin x &= \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{-1/2}{n} t^{2n} dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{-1/2}{n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \end{aligned} \quad (3.6)$$

per $|x| < 1$, e la serie in (3.6) ha raggio di convergenza 1. La serie in (3.6) in realtà converge assolutamente in z quando $|z| = 1$.

3.7 Proposizione. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Si ha

- (i) $\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha}{k} \binom{\alpha-1}{k-1} \quad \forall k \geq 1.$
- (ii) $\binom{\alpha}{k} = \binom{\alpha-1}{k} + \binom{\alpha-1}{k-1} \quad \forall k \geq 1,$
- (iii) $\binom{-\alpha}{k} = (-1)^k \binom{\alpha+k-1}{k} \quad \forall k \geq 0.$

Dimostrazione. Proviamo la (iii) e lasciamo la verifica delle altre al lettore. Si ha

$$\begin{aligned} \binom{-\alpha}{k} &= \frac{-\alpha(-\alpha-1)\cdots(-\alpha-k+1)}{k!} = (-1)^k \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1)}{k!} \\ &= (-1)^k \binom{\alpha+k-1}{k}. \end{aligned}$$

□

3.8 Esercizio. Per ogni intero $n \geq 0$ definiamo le funzioni

$$\begin{aligned} x^{\overline{n}} &:= x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1), \\ x^{\underline{n}} &:= x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1) \end{aligned}$$

Mostrare che

$$x^{\overline{n}} = (-1)^n (-x)^{\underline{n}}. \quad (3.7)$$

[Sugg. Utilizzare la (iii) della Proposizione 3.7.]

3.e Numeri di Fibonacci e coefficienti binomiali

La successione dei numeri di Fibonacci fu messa in evidenza da Leonardo Pisano, detto Fibonacci (1170–1250) discutendo la crescita nel tempo del numero di conigli in un allevamento supponendo di partire con un'unica coppia di giovani conigli, supponendo che ciascuna coppia generi un'altra coppia ogni mese ad esclusione del primo mese dopo la nascita e trascurando la mortalità.

È chiaro che ogni mese i conigli dell'allevamento sono quelli del mese precedente con l'aggiunta dei figli dei conigli presenti due mesi prima. In formula, se f_n indica il numero delle coppie al mese n , allora

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$n = 0$	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$n = 1$	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
$n = 2$	1	-2	3	-4	5	-6	7	-8	9	-10
$n = 3$	1	-3	6	-10	15	-21	28	-36	45	-55
$n = 4$	1	-4	10	-20	35	-56	84	-120	165	-220
$n = 5$	1	-5	15	-35	70	-126	210	-330	495	-715
$n = 6$	1	-6	21	-56	126	-252	462	-792	1287	-2002
$n = 7$	1	-7	28	-84	210	-462	924	-1716	3003	-5005
$n = 8$	1	-8	36	-120	330	-792	1716	-3432	6435	-11440
$n = 9$	1	-9	45	-165	495	-1287	3003	-6435	12870	-24310

Figura 3.3. I numeri $\binom{-n}{k}$.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
f_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

Figura 3.4. Numeri di Fibonacci f_n all'aumentare di n partendo da f_0 .

$$\begin{cases} f_{n+2} = f_{n+1} + f_n, & n \geq 0, \\ f_0 = 0, \\ f_1 = 1. \end{cases} \tag{3.8}$$

La successione dei numeri definiti da (3.8) è la successione dei *numeri di Fibonacci*.

Si dimostra, cfr. i corsi di base, che

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right) \quad \forall n \geq 0,$$

formula che lega i numeri di Fibonacci al *rapporto aureo* $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ della matematica greca.

Moltiplicando la ricorrenza in (3.8) per z^n , sommando con n da 0 all'infinito e ricordando che $f_0 = 0$ e $f_1 = 1$, si trova che la funzione generatrice dei numeri di Fibonacci $\sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$ soddisfa l'equazione

$$\frac{1}{z^2}(F(z) - z) = \frac{1}{z}F(z) + F(z)$$

da cui

$$F(z) = \frac{z}{1 - z - z^2}. \tag{3.9}$$

I numeri di Fibonacci posseggono un buon numero di proprietà, cfr. il paragrafo degli esercizi. Qui proviamo che i numeri di Fibonacci sono legati ai coefficienti binomiali.

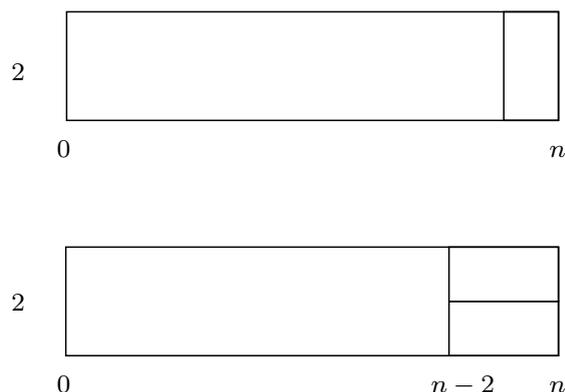


Figura 3.5. Pavimentazioni di un viottolo.

3.9 Proposizione. Si ha

$$\sum_{k=0}^n \binom{n-k}{k} = f_{n+1}.$$

Dimostrazione. Per ogni intero n sia $x_n := \sum_{k=0}^n \binom{n-k}{k}$. Osserviamo che $\binom{n-k}{k} = 0$ se $2k > n$. Per comodità di scrittura poniamo $\binom{h}{k} = 0$ se $h < 0$. Allora

$$\begin{aligned} x_{n+2} &= \sum_{k=0}^{n+2} \binom{n+2-k}{k} = 1 + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1-k}{k} + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1-k}{k-1} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1-k}{k} + \sum_{k=0}^n \binom{n-k}{k} = x_{n+1} + x_n. \end{aligned}$$

e

$$x_0 = 1, \quad x_1 = \binom{1}{0} + \binom{0}{1} = 1 + 0 = 1.$$

Pertanto abbiamo provato che

$$\begin{cases} x_{n+2} = x_{n+1} + x_n, \\ x_0 = 1, \\ x_1 = 1 \end{cases}$$

che, confrontata con la (3.8) dà $x_n = f_{n+1}$ per ogni intero n . □

Altra dimostrazione della Proposizione 3.9. Calcoliamo la funzione generatrice della successione $\{x_n\}$ dove $x_n := \sum_{k=0}^n \binom{n-k}{k}$. Si ha, tenendo conto della (3.9)

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n-k}{k} \right) z^n = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n-k}{k} z^n = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \binom{j}{k} z^j z^k \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} z^j \left(\sum_{k=0}^{\infty} \binom{j}{k} z^k \right) = \sum_{j=0}^{\infty} z^j (1+z)^j = \frac{1}{1-z(1+z)} \\ &= \frac{1}{z} \frac{z}{1-z-z^2} = \sum_{n=1}^{\infty} f_n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} f_{n+1} z^n. \end{aligned}$$

□

3.10 Esercizio (Pavimentazione di un viottolo). Si vuole pavimentare un vialetto rettangolare $2 \times n$ con mattoni 1×2 . In quanti modi è possibile farlo?

Soluzione. Sia c_n il numero di modi cercati per un vialetto lungo n . Ovviamente $c_1 = 1$, $c_2 = 2$, $c_3 = 3$, ma $c_4 = 5$. Disponiamo il vialetto $2 \times n$ in orizzontale, si veda la Figura 3.5. Le pavimentazioni che finiscono con un mattone verticale, sono tante quante le pavimentazioni possibili di un vialetto lungo $n-1$ e cioè c_{n-1} . Le pavimentazioni che finiscono con due mattoni affiancati orizzontali, sono invece tante quante le pavimentazioni possibili di un vialetto di lunghezza $n-2$ e dunque c_{n-2} . Pertanto

$$c_n = c_{n-1} + c_{n-2} \quad \forall n \geq 2,$$

ricorrenza che, assieme alle $c_1 = 1$ e $c_2 = 2$, permette di concludere che la successione in oggetto è la successione di Fibonacci, $c_n = f_{n+1} \forall n \geq 1$.

3.f Esercizi

3.11 Esercizio. Dimostrare la formula del binomio di Newton

- (i) direttamente, per induzione su n ;
- (ii) utilizzando la formula di Taylor;
- (iii) a partire dalla formula $D((1+z)^n) = n(1+z)^{n-1}$.

3.12 Esercizio. Provare alcune delle seguenti identità

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} 2^j \binom{n}{j} &= 3^n, \\ \sum_{j=0}^{\infty} \binom{n}{j}^2 &= \binom{2n}{n}, \\ \sum_{j=0}^n \binom{n}{2j} &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{2j+1} = 2^{n-1}, \\ \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{n}{j}^2 &= \begin{cases} (-1)^{n/2} \binom{n}{n/2} & \text{se } n \text{ è pari,} \\ 0 & \text{se } n \text{ è dispari,} \end{cases} \\ \sum_{j=a}^n \binom{j}{a} &= \binom{n+1}{a+1}, \\ \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{n}{j} &= (-1)^k \binom{n-1}{k}, \\ \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\alpha+j}{j} x^j &= \frac{1}{(1+x)^{\alpha+1}}, \\ \binom{2n}{n} &= (-4)^n \binom{-1/2}{n}. \end{aligned}$$

3.13 Esercizio. Provare che

$$\sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} \binom{n+m-j}{k-j} = \begin{cases} \binom{n}{k} & \text{se } m \geq k, \\ 0 & \text{se } m < k. \end{cases}$$

3.14 Esercizio. Provare che $\sum_{j=k}^p \binom{j}{k} = \binom{p+1}{k+1}$.

Soluzione. Facciamo prima una dimostrazione per induzione a scendere ricordando che $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \forall k \geq 1$. Si ha

$$\begin{aligned} \binom{p+1}{k+1} &= \binom{p}{k} + \binom{p}{k+1} = \binom{p}{k} + \binom{p-1}{k} + \binom{p-1}{k+1} \\ &\dots = \binom{p}{k} + \binom{p-1}{k} + \dots + \binom{k+1}{k} + \binom{k+1}{k+1} \\ &= \binom{p}{k} + \binom{p-1}{k} + \dots + \binom{k+1}{k} + \binom{k}{k}. \end{aligned}$$

Una dimostrazione al “buio” può essere fatta usando le funzioni generatrici. Sia $a_k := \sum_{j=k}^p \binom{j}{k} = \sum_{j=0}^p \binom{j}{k}$. Si ha

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^p \binom{j}{k} z^k = \sum_{j=0}^p (1+z)^j = \frac{(1+z)^{p+1} - 1}{z} = \frac{1}{z} \sum_{j=1}^{p+1} \binom{p+1}{j} z^j \\ &= \sum_{k=0}^p \binom{p+1}{k+1} z^k. \end{aligned}$$

e dunque la tesi, per il principio di identità dei polinomi.

3.15 Esercizio. Calcolare $\sum_{j=0}^p (-1)^j \binom{n}{j}$.

Soluzione. $\sum_{j=0}^p (-1)^j \binom{n}{j} = (-1)^p \binom{n-1}{p}$.

Facciamo una dimostrazione diretta. Ricordando che $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \forall k \geq 1$, si ha

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^p (-1)^j \binom{n}{j} &= 1 - n + \sum_{j=2}^p (-1)^j \binom{n-1}{j} + \sum_{j=1}^{p-1} (-1)^{j+1} \binom{n-1}{j} \\ &= 1 - n + \sum_{j=2}^{p-1} (-1)^j \left(\binom{n-1}{j} - \binom{n-1}{j} \right) + \binom{n-1}{1} + (-1)^p \binom{n-1}{p-1} \\ &= 1 - n + 0 + (n-1) + (-1)^p \binom{n-1}{p} = (-1)^p \binom{n-1}{p}. \end{aligned}$$

Si può fare una dimostrazione con le funzioni generatrici, anche questa semplicissima. Si ha

$$\begin{aligned} \sum_{p=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^p (-1)^{p-j} \binom{n}{j} \right) x^p &= \left(\sum_{j=0}^{\infty} (-x)^j \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} \binom{n}{j} x^j \right) \\ &= \frac{1}{1+x} (1+x)^n = (1+x)^{n-1} = \sum_{p=0}^{n-1} \binom{n-1}{p} x^p \end{aligned}$$

e quindi la tesi per il principio di identità dei polinomi.

3.16 Esercizio. Provare la *formula di Vandermode*

$$\sum_{j=0}^k \binom{p}{j} \binom{q}{k-j} = \binom{p+q}{k}.$$

per ogni $p, q, k \geq 0$.

Soluzione. Si può procedere con l’uso delle funzioni generatrici. Dal teorema di Cauchy sul prodotto di serie

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^k \binom{p}{j} \binom{q}{k-j} \right) z^k &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \binom{p}{k} z^k \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \binom{q}{k} z^k \right) \\ &= (1+z)^{p+q} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{p+q}{k} z^k \end{aligned}$$

da cui la tesi.

3.17 Esercizio. Mostrare che $\sum_{j=0}^{\infty} \binom{p}{j} \binom{q}{j-1} = \binom{p+q}{p-1}$.

Soluzione. Dalla formula di Vandermonde segue

$$\sum_{j=0}^{\infty} \binom{p}{j} \binom{q}{j-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{p}{j} \binom{q}{q-j+1} = \binom{p+q}{q+1} = \binom{p+q}{p-1}.$$

3.18 Esercizio. Provare che $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

Soluzione. Dalla formula di Vandermonde segue

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{n-k} = \binom{2n}{n}.$$

3.19 Esercizio. Calcolare $\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{n}{j}^2$.

Soluzione. Procediamo come per la formula di Vandermonde. Sia $p \geq 0$. Si ha

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{p}{j} \binom{p}{k-j} \right) z^k &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \binom{p}{k} z^k \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \binom{p}{k} (-z)^k \right) \\ &= (1+z)^p (1-z)^p = (1-z^2)^p = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{p}{k} z^{2k}. \end{aligned}$$

Segue

$$\sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{p}{j} \binom{p}{k-j} = \begin{cases} (-1)^s \binom{p}{s} & \text{se } k = 2s, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

e in particolare la tesi scegliendo $p = k = n$.

3.20 Esercizio. Calcolare se possibile $\sum_{j=0}^k (-1)^j j \binom{p}{j} \binom{q}{k-j}$.

Soluzione. . Procediamo con l'uso delle funzioni generatrici. Si ha

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^k j \binom{p}{j} \binom{q}{k-j} \right) z^k &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} k \binom{p}{k} z^k \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \binom{q}{k} z^k \right) \\ &= zD((1+z)^p)(1+z)^q = pz(1+z)^{p+q-1} \\ &= p \sum_{k=0}^{\infty} \binom{p+q-1}{k} z^{k+1}. \end{aligned}$$

Segue dal principio di identità che

$$\sum_{j=0}^k (-1)^j j \binom{p}{j} \binom{q}{k-j} = p \binom{p+q-1}{k-1}.$$

3.21 Esercizio. Mostrare che

$$\sum_{j=1}^n \binom{n}{j} \frac{x^j}{j} = \sum_{j=1}^n \frac{(1+x)^j - 1}{j}.$$

In particolare per $x = -1$

$$\sum_{j=1}^n \frac{(-1)^{j-1}}{j} \binom{n}{j} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}.$$

[Sugg. Posto $h_n(x) := \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} \frac{x^j}{j}$, mostrare che

$$h_n(x) - h_{n-1}(x) = \int_0^x (1+t)^{n-1} dt = \frac{(1+x)^n - 1}{n}$$

integrando la formula del binomio di Newton.]

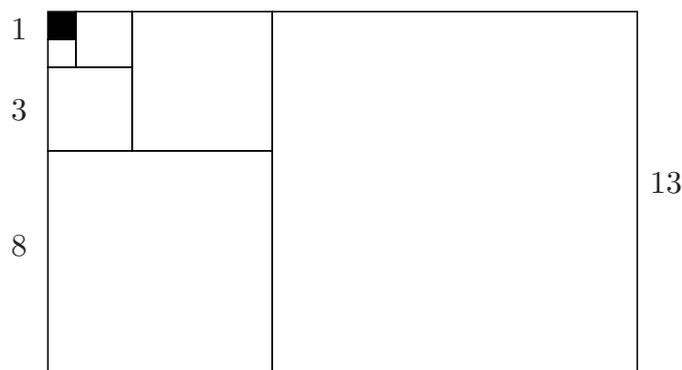


Figura 3.6. Illustrazione della formula nell'Esercizio 3.25.

3.22 Esercizio. Provare che

$$\sum_{j=0}^k \binom{j}{a} \binom{k-j}{b} = \binom{k+1}{a+b+1}.$$

[Sugg. Sia $c_{a,b} := \sum_{j=0}^k \binom{j}{a} \binom{k-j}{b}$. Provare considerando la serie $\sum_{a,b=0}^{\infty} c_{a,b} x^a y^b$ che $c_{a-1,b} = c_{a,b-1}$. Segue che $c_{a,b}$ dipende solo da $a+b$, in particolare $c_{a,b} = c_{a+b,0}$.]

3.23 Esercizio. Sia $\{f_n\}$ la successione dei numeri di Fibonacci. Provare che $\frac{f_{n+1}}{f_n} \rightarrow \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

3.24 Esercizio. Sia $\{f_n\}$ la successione dei numeri di Fibonacci. Provare che $\sum_{j=0}^n f_j = f_{n+2} - 1 \forall n \geq 0$.

3.25 Esercizio. Sia $\{f_n\}$ la successione dei numeri di Fibonacci. Provare per induzione che

$$\sum_{j=1}^n f_j^2 = f_n f_{n+1} \quad \forall n \geq 0$$

formula ben rappresentata dalla Figura 3.6.

3.26 Esercizio (Identità di Cassini). Sia $\{f_n\}$ la successione dei numeri di Fibonacci. Provare per induzione che

$$f_{n-1} f_{n+1} - f_n^2 = (-1)^n \quad \forall n \geq 1.$$

3.27 Esercizio (Cesaro). Sia $\{f_n\}$ la successione dei numeri di Fibonacci. Provare che

$$\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} f_j = f_{2n} \quad \forall n \geq 0.$$

3.28 Esercizio (Lucas). Sia $\{f_n\}$ la successione dei numeri di Fibonacci. Provare che

$$\text{m.c.d.}(f_p, f_q) = f_{\text{m.c.d.}(p,q)}.$$

3.29 Esercizio. Provare che per ogni $n \geq 1$ i numeri $f_n^2 + f_{n+1}^2$ e $f_{n+1}^2 - f_{n-1}^2$ sono numeri di Fibonacci.

3.30 Esercizio. Sia $\{f_n\}$ la successione dei numeri di Fibonacci. Provare che

$$\sum_{j=1}^{2n-1} f_j f_{j+1} = f_{2n}^2.$$

3.31 Esercizio. Sia $\{f_n\}$ la successione dei numeri di Fibonacci e sia $\tau = (1 + \sqrt{5})/2$. Provare che

$$\tau^n = \tau f_n + f_{n-1} \quad \forall n \geq 1.$$

3.32 Esercizio. Sia $\{f_n\}$ la successione dei numeri di Fibonacci. Provare che

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{f_j f_{j+1}} = 1.$$

3.33 Esercizio. Sia $\{f_n\}$ la successione dei numeri di Fibonacci e $\tau := (1 + \sqrt{5})/2$. Provare che

$$\sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1} \frac{1}{f_j f_{j+1}} = \tau^{-2}.$$

4. Permutazioni

Sia N un insieme finito. Una *permutazione* di N è una applicazione iniettiva (e quindi bigettiva) $\sigma : N \rightarrow N$. Poiché la composizione di mappe bigettive di mappe da N in sé è ancora una mappa bigettiva da N in N , l'insieme delle permutazioni su N ha una struttura di *gruppo* rispetto al prodotto di composizione, con elemento unità dato dalla mappa identità: è il *gruppo delle permutazioni di N* o *gruppo simmetrico* e lo si indica con $S(N)$. Se N ha n elementi, non è restrittivo supporre che N sia $N = \{1, 2, \dots, n\}$. Per questo il gruppo delle permutazioni di n elementi si indica con S_n o anche con \mathcal{P}_n . Si osservi che S_n non è un gruppo commutativo se $n \geq 3$.

Al pari delle funzioni, ogni permutazione $\sigma \in S(N)$ è caratterizzata dalla sua *parola immagine* o *lista immagine* $\sigma(1) \dots \sigma(n)$. Ad esempio, si indica brevemente la permutazione

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

con $\sigma = 231465$.

Se $\sigma \in S(N)$, un punto $x \in N$ tale che $\sigma(x) = x$ si dice un *punto fisso* per la permutazione σ .

4.a Segno di una permutazione

Sia $\sigma \in S(N)$. Due elementi $x, y \in N$ si dicono *trasposti* o *invertiti* da σ se $x < y$ e $\sigma(x) > \sigma(y)$. Un modo per rappresentare una permutazione è quello di scrivere su due righe due copie di N ordinate nello stesso modo e di legare quindi con un arco l'elemento x nella prima riga con l'elemento $\sigma(x)$ nella seconda riga, cfr. Figura 4.1. Ad esempio la permutazione $\sigma = 312465$ ha tre trasposizioni

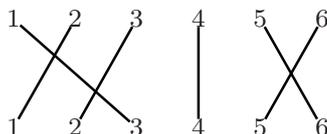


Figura 4.1.

È evidente come il numero di elementi invertiti da σ è il numero di incroci che si formano tra gli archi.

Una quantità importante è la parità o disparità del numero di inversioni di una permutazione σ , i.e., il numero di inversioni modulo 2, denotata con $\text{inv}(\sigma)$. È facile convincersi, ad esempio utilizzando la rappresentazione in Figura 4.1, che

la mappa $\text{inv} : S(N) \rightarrow \mathcal{Z}_2$ è un *omomorfismo di gruppi* (l'operazione di gruppo su \mathcal{Z}_2 è l'addizione modulo due indicata con $+$ (mod 2)),

$$\text{inv}(\tau\sigma) = \text{inv}(\tau) + \text{inv}(\sigma) \pmod{2}.$$

Il numero $(-1)^{\text{inv}(\sigma)}$ si chiama il *segno* della permutazione σ .

4.b Rappresentazione ciclica

Una permutazione di N ha anche una seconda rappresentazione detta *rappresentazione ciclica*. Per ogni $x \in N$, i punti $x, \sigma(x), \sigma^2(x), \dots$ sono un insieme finito e quindi esiste un primo intero $k \in \mathbb{N}$, $k \leq |N|$ tale che $\sigma^k(x) = x$.

La lista $(x, \sigma(x), \sigma^2(x), \dots, \sigma^{k-1}(x))$ si chiama *ciclo* della permutazione generato da x e k è il suo *ordine*. Gli elementi del ciclo generato da x formano un sottoinsieme di N detto l'*orbita* di x . Ovviamente punti distinti di una stessa orbita generano cicli differenti.

Fissata $s \in S(N)$, si determina il ciclo di un elemento $x_1 \in N$; quindi il ciclo di un elemento $x_2 \in N$ non appartenente all'orbita di x_1 e procedendo iterativamente, dopo un numero finito di passi si ottiene una *decomposizione ciclica* di σ , $\sigma := \sigma_1\sigma_2 \cdots \sigma_q$. Ad esempio, la permutazione $\sigma = 35146827$ ha come rappresentazione ciclica $\sigma = (13)(25687)(4)$. Ovviamente la rappresentazione ciclica non è unica essendo determinata dai primi elementi scelti ad ogni passo. Ad esempio per la permutazione $\sigma = 35146827$ ha come altra rappresentazione ciclica $\sigma = (56872)(4)(31)$. Si osserva tuttavia che l'ambiguità può essere evitata fissando un ordine su N e scegliendo come primo elemento di ogni ciclo il primo non ancora inserito nei cicli già costruiti. In ogni caso, il numero di cicli della decomposizione e l'ordine di ciascun ciclo dipendono da σ e non dalla particolare decomposizione ciclica effettuata.

Ogni ciclo è una permutazione dei suoi elementi. Lo si può anche vedere come una permutazione di tutto N che lascia fissi gli elementi che non fanno parte del ciclo. Perciò ogni permutazione è il prodotto di composizione di permutazioni ciascuna delle quali è ciclica sugli elementi che non sono punti fissi. Se $\sigma = \sigma_1\sigma_2 \cdots \sigma_q$ è una rappresentazione ciclica di σ , si ha

$$\text{inv}(\sigma) = \sum_{i=1}^q \text{inv}(\sigma_i) \pmod{2}$$

perché $\text{inv} : S_N \rightarrow \mathcal{Z}_2$ un omomorfismo di gruppi e quindi

$$(-1)^\sigma = (-1)^{\sigma_1}(-1)^{\sigma_2} \cdots (-1)^{\sigma_q} \tag{4.1}$$

D'altra parte è facile convincersi che il segno di una permutazione ciclica su k elementi è $(-1)^{k-1}$ e che la permutazione su $n \geq k$ elementi che permuta k elementi e lascia fissi gli altri ha ancora segno $(-1)^{k-1}$. La formula (4.1) permette quindi di calcolare il segno di una permutazione a partire dall'ordine dei cicli di una sua rappresentazione ciclica. Ad esempio il segno della permutazione $\sigma = (13)(25687)(4)$ è $(-1)^1(-1)^4(-1)^0 = -1$.

4.c Permutazioni libere

L'insieme delle permutazioni di n elementi è $n!$,

$$|S_n| = n!.$$

Infatti, ci sono n modi di scegliere l'immagine del primo elemento, $n - 1$ modi di scegliere l'immagine del secondo ecc. e dunque

$$|S_n| = n(n - 1)(n - 2) \cdots 3 \cdot 2 \cdots 1 = n!$$

Il generatore esponenziale delle permutazioni è

$$E_{\mathcal{P}} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|S_n|}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1 - z}.$$

4.d Permutazioni cicliche

Il numero di permutazioni cicliche su n elementi è $(n - 1)!$. Infatti, ci sono $n - 1$ modi di scegliere il successore di 1, $(n - 2)$ modi di scegliere il successore del successore di 1, ecc. e quindi

$$(n - 1)(n - 2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 = (n - 1)!$$

La relativa funzione generatrice è

$$E_{cicl}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n - 1)!}{n!} z^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n = -\log(1 - z).$$

4.e Permutazioni senza punti fissi

Una permutazione $\pi \in S_n$ si dice una *permutazione senza punti fissi* se $\pi(i) \neq i \forall i = 1, \dots, n$. Sia $\mathcal{D}_n \subset S_n$ l'insieme delle permutazioni senza punti fissi. e $d_n := |\mathcal{D}_n|$.

4.1 Proposizione. *Si ha*

$$d_n := |\mathcal{D}_n| = n! \sum_{j=0}^n (-1)^j \frac{1}{j!} \quad \forall n \geq 1.$$

Dimostrazione. Ovviamente $\mathcal{D}_1 = \emptyset$ e $\mathcal{D}_2 = \{(2, 1)\}$. Per $n \geq 3$ procuriamoci una formula induttiva. Sia $\pi \in \mathcal{D}_n$ e sia $i \in \{1, \dots, n\}$ tale che $\pi(n) = i$. Ci sono due casi.

- $\pi(i) = n$, i.e., π scambia i con n . In questo caso π ristretta a $\{1, \dots, i - 1, i + 1, \dots, n - 1\}$ è una permutazione senza punti fissi di $n - 2$ elementi che completamente caratterizza π .
- $\pi(i) \neq n$. In questo caso esiste $j \neq i, n$ tale che $\pi(j) = n$ e la permutazione π' su $\{1, \dots, n - 1\}$ definita da

$$\pi'(k) = \begin{cases} \pi(k) & \text{se } k \neq j, \\ i & \text{se } k = j \end{cases}$$

è una permutazione senza punti fissi che completamente caratterizza π .

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
d_n	0	0	1	2	9	44	265	1854	14833	133496	1334961	14684570

Figura 4.2. Permutazioni senza punti fissi d_n all'aumentare di n partendo da d_0 .

Dividiamo dunque le permutazioni senza punti fissi in due classi disgiunte $\mathcal{D}_n = \mathcal{A}_n \cup \mathcal{B}_n$ dove \mathcal{A}_n è l'insieme delle permutazioni che scambiano n con un altro elemento (che può essere uno degli altri $n-1$ elementi) e \mathcal{B}_n è l'insieme delle permutazioni che mandano n in un elemento che non viene scambiato con n (e che può essere uno qualunque dei restanti $n-1$ elementi). Dalle considerazioni precedenti,

$$|\mathcal{A}_n| = (n-1)d_{n-2}, \quad |\mathcal{B}_n| = (n-1)d_{n-1}$$

da cui la ricorrenza

$$\begin{cases} d_n = (n-1)(d_{n-1} + d_{n-2}), & n \geq 3, \\ d_1 = 0, \\ d_2 = 1. \end{cases} \quad (4.2)$$

Se si pone $s_n := d_n - nd_{n-1}$, si ha

$$\begin{cases} s_n = -s_{n-1}, & n \geq 2, \\ s_2 = 1 \end{cases}$$

i.e., $s_n = (-1)^n$. In definitiva

$$d_n = nd_{n-1} + (-1)^n \quad \forall n \geq 2,$$

o, equivalentemente,

$$\frac{d_n}{n!} = \frac{d_{n-1}}{(n-1)!} + \frac{(-1)^n}{n!} \quad \forall n \geq 2,$$

formula che, assieme a $d_1 = 0$ dá

$$\frac{d_n}{n!} = \sum_{j=2}^n \frac{(-1)^j}{j!} = \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^j}{j!}.$$

□

Altra dimostrazione della Proposizione 4.1. Ogni permutazione di n elementi è caratterizzata dai suoi j punti fissi, $0 \leq j \leq n$, e dalla permutazione degli $n-j$ elementi restanti sui quali la permutazione agisce come una permutazione senza punti fissi. Perciò, ponendo $d_0 = 1$,

$$n! = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} d_{n-j} \quad \forall n \geq 0, \quad (4.3)$$

o, equivalentemente, cfr. la formula di inversione dei coefficienti binomiali,

$$d_n = \sum_{j=0}^n (-1)^{(n+j)} \binom{n}{j} j! = n! \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^j}{j!} \quad \forall n \geq 0.$$

□

4.2 Corollario. Il numero d_n di permutazioni senza ripetizioni di n elementi è l'intero più vicino a $n!/e$.

Dimostrazione. Dalla stima di errore tra l'esponenziale e il suo polinomio di Taylor,

$$\left| e^x - \sum_{j=0}^n \frac{x^j}{j!} \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}, \quad \forall x \leq 0,$$

per $x = -1$ si ottiene che

$$\left| \frac{1}{e} - \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^j}{j!} \right| \leq \frac{1}{(n+1)!}$$

conseguentemente dalla Proposizione 4.1

$$\left| d_n - \frac{n!}{e} \right| = n! \left| \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^j}{j!} - \frac{1}{e} \right| \leq \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{3}$$

per ogni $n \geq 2$. □

4.3 Proposizione. *Il generatore esponenziale delle permutazioni senza punti fissi è*

$$E_{\mathcal{D}}(z) = \frac{e^{-z}}{1-z}.$$

Dimostrazione. La (4.3) ha la forma di un prodotto di convoluzione, cfr. (2.7). Pertanto, denotando con $E_{\mathcal{P}}$ la funzione generatrice esponenziale delle permutazioni,

$$\frac{1}{1-z} = E_{\mathcal{P}} = e^z E_{\mathcal{D}}(z).$$

□

4.f Esercizi

4.4 Esercizio. Calcolare il numero di permutazioni con esattamente $n - k$ punti fissi.

4.5 Esercizio. Mostrare che il numero delle permutazioni di n di segno positivo e quelle di segno negativo sono uguali ($n \geq 2$).

4.6 Esercizio. Calcolare il numero medio di punti fissi nell'insieme delle permutazioni. Il numero medio di punti fissi è il rapporto tra il numero totale di punti fissi presenti in tutte le permutazioni e il numero di permutazioni.

Soluzione. Per ogni intero $j = 0, \dots, n$, ci sono $\binom{n}{j} d_{n-j}$ permutazioni con j punti fissi; pertanto il numero medio di punti fissi è

$$\frac{1}{n!} \sum_{j=0}^n j \binom{n}{j} d_{n-j}$$

e si calcola

$$\begin{aligned} \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^n j \binom{n}{j} d_{n-j} &= \frac{1}{n!} n \sum_{j=1}^n \binom{n-1}{j-1} d_{n-j} = \frac{1}{n!} n \sum_{j=1}^n \binom{n-1}{n-j} d_{n-j} \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} d_j = \frac{(n-1)!}{(n-1)!} = 1. \end{aligned}$$

Il numero medio di punti fissi nell'insieme delle permutazioni è 1.

4.7 Esercizio. Una permutazione σ si dice una *involutione* se $\sigma^2 = \text{Id}$. Dare una descrizione della decomposizione ciclica di una involuzione. Mostrare che il numero di involuzioni su in insieme di n elementi verifica la ricorrenza

$$i_0 = 1, \quad i_{n+1} = i_n + n i_{n-1}.$$

Infine, quante sono le involuzioni senza punti fissi?

5. Insiemi, Multiinsiemi, Liste, Funzioni

5.a Insiemi

Un *insieme finito* A è una collezione di oggetti tra loro *distinti*. Ad esempio la collezione $1, 2, 3$ è un insieme e si scrive $A = \{1, 2, 3\}$; la collezione $1, 2, 2, 3$ non è un insieme. Un insieme finito di n elementi è sempre in corrispondenza biunivoca con il sottoinsieme degli interi $\{1, 2, \dots, n\}$. Con altre parole, si possono sempre usare gli interi da 1 ad n per etichettare i punti di A . Infine, la *cardinalità* di un insieme A è il numero dei suoi elementi; la si indica con $|A|$ o con $\#A$.

5.1 Proposizione. *Sia A un insieme a n elementi, $n \geq 1$. Il numero di suoi sottoinsiemi con k elementi è $\binom{n}{k}$.*

Ci si può convincere della cosa in molti modi. Uno di essi è ad esempio il seguente.

Dimostrazione. Sia $d_{n,k}$ il numero cercato. Supponiamo di dover formare una squadra di k giocatori da un insieme di n giocatori ed il suo capitano. Si può procedere in due modi: un primo modo consiste nello scegliere prima la squadra e questo può essere fatto in $d_{n,k}$ modi. Successivamente all'interno della squadra si sceglie il capitano, cosa che si può fare in k modi. I modi di formare una squadra con capitano sono dunque $kd_{n,k}$. Un altro modo di procedere è anche quello di scegliere prima il capitano dal pool di giocatori, e lo si può fare in n modi e quindi selezionare i restanti $k-1$ giocatori dall'insieme dei giocatori restanti, cosa che si può fare in $d_{n-1,k-1}$ modi. Si trova così l'identità

$$d_{n,k} = \frac{n}{k} d_{n-1,k-1}$$

che per induzione dà

$$d_{n,k} = \frac{n}{k} \frac{n-1}{k-1} \dots \frac{n-k+1}{1} d_{n-k,0} = \binom{n}{k}.$$

pur di ammettere che $d_{n,0} = 1$ per ogni intero n . □

5.b Liste

Dato un insieme, una *lista* di k oggetti presi da un insieme A , o k -parola con simboli scelti in A è una k -upla ordinata di oggetti. Ad esempio, se $A = \{1, 2, 3\}$, le k -uple $(1, 2, 3, 3, 2, 1)$ e $(3, 2, 1, 3, 2, 1)$ sono due 6-liste distinte di oggetti in A . Nelle liste sono ammesse ripetizioni e l'ordine degli elementi è rilevante.

Poiché le scelte degli elementi della lista sono tutte tra loro indipendenti e ci sono n scelte possibili in ciascuna delle posizioni della lista, si ottiene che

5.2 Proposizione. *Il numero di k -liste su A è n^k .*

5.c Multinsiemi

Un terzo oggetto interessante sono le k -liste da un insieme A in cui l'ordine degli elementi non è rilevante. Questi oggetti sono caratterizzati dall'insieme A degli elementi distinti presenti e dal numero di ciascuno di essi. E' quello che si chiama un *multiinsieme* su A . Da un punto di vista formale un *multiinsieme su un insieme A* è una coppia (A, a) dove A è un insieme e $a : A \rightarrow \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ è la funzione detta *molteplicità*, che definisce quante volte ogni elemento di A appartiene al multiinsieme. Ovviamente, ogni insieme è un multiinsieme con elementi tutti di molteplicità 1. Si usa anche la notazione $\{a^2, b^2, c^5\}$ per indicare il multiinsieme $\{a, b, c\}$ con molteplicità di a, b e c rispettivamente 2, 2 e 5. Infine la *cardinalità* di (A, a) è il numero di elementi del multiinsieme; lo si indica con $|(A, a)|$ o con $\#(A, a)$. Ovviamente $|(A, a)| = \sum_{x \in A} a(x)$.

Ogni sottoinsieme B di A è un multiinsieme (A, a) con $a(x) = 1$ se $x \in B$ e $a(x) = 0$ se $x \notin B$. Inoltre, si dice che (B, b) è contenuto in (A, a) se $B \subset A$ e $b(x) \leq a(x) \forall x \in B$. Infine, osserviamo che (B, b) coincide con il multiinsieme (A, \widehat{b}) dove

$$\widehat{b}(x) = \begin{cases} b(x) & \text{se } x \in B, \\ 0 & \text{se } x \notin B. \end{cases}$$

5.3 Proposizione. *Sia (A, a) un multiinsieme e $k \leq a(x) \forall x \in A$. Il numero di multiinsiemi contenuti in (A, a) con k elementi è*

$$\binom{n+k-1}{k}.$$

Dimostrazione. Ordiniamo una volta per tutte gli elementi di A . Un multiinsieme S di cardinalità k contenuto in (A, a) conterrà il primo elemento di A x_1 volte, il secondo elemento di A x_2 volte, ecc., con il vincolo che $x_1 + x_2 + \dots + x_n = k$. Inoltre è facile convincersi che la n -upla di numeri interi nonnegativi (x_1, x_2, \dots, x_n) caratterizza univocamente il sottoinsieme S . Poiché l'ordine degli elementi è irrilevante, possiamo ora associare alla n -upla (x_1, x_2, \dots, x_n) , e quindi al multiinsieme S , la successione binaria

$$\underbrace{00\dots0}_{x_1} 1 \underbrace{00\dots0}_{x_2} 1 \dots 1 \underbrace{00\dots0}_{x_{n-1}} 1 \underbrace{00\dots0}_{x_n} \tag{5.1}$$

dove il simbolo 1 indica il cambio di elemento di A . Si tratta di una parola binaria di $n+k-1$ caratteri con k zeri.

Ora è facile convincersi che la corrispondenza descritta è in effetti una corrispondenza biunivoca tra i multiinsiemi di cardinalità k contenuti in (A, a) e le stringhe di lunghezza $n+k-1$ contenenti k zeri. Poiché ci sono esattamente tante stringhe binarie del tipo (5.1) quante le scelte delle posizioni in cui mettere gli zeri, i.e.,

$$\binom{n+k-1}{k},$$

la tesi è dimostrata. □

5.d Funzioni

Una funzione $f : X \rightarrow A$ è ovviamente individuata univocamente dai valori che assume su ciascun elemento. Se $f : \{1, \dots, k\} \rightarrow A$, si costruisce la k -lista dei valori o *parola immagine* di f definita da $(f(1), f(2), \dots, f(k))$. Dunque ad ogni

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$n = 0$	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$n = 1$	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
$n = 2$	1	2	2	0	0	0	0	0	0	0
$n = 3$	1	3	6	6	0	0	0	0	0	0
$n = 4$	1	4	12	24	24	0	0	0	0	0
$n = 5$	1	5	20	60	120	120	0	0	0	0
$n = 6$	1	6	30	120	360	720	720	0	0	0
$n = 7$	1	7	42	210	840	2520	5040	5040	0	0
$n = 8$	1	8	56	336	1680	6720	20160	40320	40320	0
$n = 9$	1	9	72	504	3024	15120	60480	181440	362880	362880

Figura 5.1. Funzioni iniettive.

funzione $f : \{1, \dots, k\} \rightarrow A$ corrisponde una ed una sola k -parola con caratteri scelti in A e viceversa. Questa corrispondenza biunivoca verrà da ora in poi tacitamente utilizzata.

Sia \mathcal{F}_n^k la classe delle funzioni $f : \{1, \dots, k\} \rightarrow A, |A| = n$. Il numero di funzioni in \mathcal{F}_n^k è uguale al numero di k -parole con caratteri scelti in A . Poiché ci sono n modi di scegliere ciascun carattere e le scelte sono tra loro indipendenti, si conclude che

$$F_n^k := |\mathcal{F}_n^k| = n^k.$$

Il generatore esponenziale delle funzioni a valori in $A, |A| = n$, è allora

$$Exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^k}{k!} z^k = e^{nz}.$$

5.e Funzioni iniettive

Indichiamo con \mathcal{I}_n^k la classe delle funzioni *iniettive* $f : \{1, \dots, k\} \rightarrow A, |A| = n$. La parola immagine di una funzione iniettiva in \mathcal{I}_n^k è una k -parola con caratteri scelti in A tra loro a due a due distinti. Poiché ci sono n modi di scegliere il primo carattere, $(n - 1)$ modi di scegliere il secondo, $\dots, n - k + 1$ modi di scegliere il k -esimo carattere e le scelte sono tra loro indipendenti, si conclude che

$$I_n^k := |\mathcal{I}_n^k| = n(n - 1) \cdot \dots \cdot (n - k + 1).$$

Il generatore esponenziale delle funzioni iniettive a valori in $A, |A| = n$, è allora

$$Exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n(n - 1) \cdot \dots \cdot (n - k + 1)}{k!} z^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^k = (1 + z)^n.$$

5.f Funzioni crescenti

Indichiamo con \mathcal{C}_n^k la classe delle funzioni *strettamente crescenti* $f : \{1, \dots, k\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$. La parola immagine di una funzione strettamente crescente in \mathcal{C}_n^k è una k -upla di numeri ordinati in modo strettamente crescente, quindi distinti, e scelti in $\{1, \dots, n\}$. Questa k -upla è individuata univocamente dall'insieme dei numeri che vi compaiono. Pertanto si conclude che

$$\mathcal{C}_n^k := |\mathcal{C}_n^k| = \binom{n}{k} = \mathbf{C}_k^n;$$

attenzione alla trasposizione. Il generatore delle funzioni strettamente crescenti a valori in $\{1, \dots, n\}$ è allora

$$E(z) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^k = (1+z)^n.$$

5.g Funzioni non decrescenti

Indichiamo con \mathcal{D}_n^k la classe delle funzioni *non decrescenti* $f : \{1, \dots, k\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$. La parola immagine di una funzione non decrescente in \mathcal{D}_n^k è una k -upla di numeri ordinati in modo non decrescente, quindi eventualmente ripetuti. Le funzioni non decrescenti in \mathcal{D}_n^k sono pertanto tante quanti i multiinsiemi con k elementi contenuti nel multiinsieme $\{1, \dots, n\}$ con elementi tutti di molteplicità almeno k . Il loro numero è già stato calcolato, pertanto

$$D_n^k := |\mathcal{D}_n^k| = |\mathcal{C}_{n+k-1}^k| = \binom{n+k-1}{k}.$$

Un altro modo di procedere è il seguente. Consideriamo la mappa $\phi : \mathcal{D}_n^k \rightarrow \mathcal{F}_{n+k-1}^k$ che ad ogni funzione $f \in \mathcal{D}_n^k$ associa la funzione $\phi(f)$ definita da $\phi(f)(i) := f(i) + i - 1$. Evidentemente $\phi(f)$ è strettamente crescente, $\phi(f) \in \mathcal{C}_{n+k-1}^k$, se $f \in \mathcal{D}_n^k$. Inoltre è facile convincersi che ϕ è iniettiva e surgettiva su \mathcal{C}_{n+k-1}^k . Pertanto

$$D_n^k = |\mathcal{D}_n^k| = |\mathcal{C}_{n+k-1}^k| = \binom{n+k-1}{k}.$$

5.4 Proposizione. *Il generatore delle classi di funzioni non decrescenti a valori su $\{1, \dots, n\}$ o, equivalentemente, il generatore dei multiinsiemi con molteplicità infinita su $\{1, \dots, n\}$ è*

$$E(z) = \frac{1}{(1-z)^n}.$$

Dimostrazione. Infatti, per ogni coppia (n, k) di interi positivi, si ha

$$\binom{n+k-1}{k} = (-1)^k \binom{-n}{k}$$

e quindi

$$E(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n}{k} (-1)^k z^k = (1-z)^{-n}.$$

□

Un'altra dimostrazione della Proposizione 5.3. Volendo si può mettere in corrispondenza biunivoca la classe dei multiinsiemi di cardinalità k contenuti in (A, a) direttamente con la classe \mathcal{D}_k^n .

Introduciamo un ordine arbitrario in A , ad esempio identificando A con $\{1, \dots, n\}$ e sia S un multiinsieme in (A, a) con lunghezza k . Per ogni $x \in A$ sia $n_S(x)$ il numero di volte in cui il carattere x compare in S . Infine consideriamo la funzione $f_S : A \rightarrow \{0, \dots, k\}$ che ad ogni x associa il numero di caratteri con indice inferiore o uguale a x che compaiono in S ,

$$f_S(x) = \sum_{y \leq x} n(y).$$

Ovviamente f_S è non decrescente e $f_S(n) = k$. Inoltre è facile convincersi che la mappa

$$S \rightarrow f_S$$

è una bigezione tra l'insieme delle estrazioni con ripetizioni da (A, a) e la classe delle funzioni non decrescenti da $\{1, \dots, n\}$ su $\{0, \dots, k\}$ con il vincolo $f(k) = n$. A sua volta questa classe è in corrispondenza biunivoca con la classe delle funzioni non decrescenti da $\{1, \dots, n-1\}$ su $\{0, \dots, k\}$. che, come abbiamo visto, è

$$\binom{k+1+(n-1)-1}{n-1} = \binom{n+k-1}{k}.$$

□

5.h Funzioni surgettive

Il calcolo del numero di funzioni surgettive è più complesso. Indichiamo con \mathcal{S}_n^k la classe delle funzioni da $\{1, \dots, k\}$ surgettive su $\{1, \dots, n\}$ e definiamo

$$S_n^k = \begin{cases} 0 & \text{se } n = 0, \\ |\mathcal{S}_n^k| & \text{se } n \geq 1. \end{cases}$$

Ovviamente $S_n^k = 0$ se $k < n$. Se $k = n$, essendo $f : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ surgettiva se e solo se f è iniettiva, si ha $S_n^n = I_n^n = n!$.

Calcoliamo ora S_n^k quando $k > n$. Osserviamo che ogni funzione è surgettiva sulla sua immagine. Dunque, se $n \geq 1$ e se per $j = 1, \dots, n$, indichiamo con A_j l'insieme di tutte le funzioni $f : \{1, \dots, k\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ la cui immagine ha j elementi, deve risultare

$$n^k = |\mathcal{F}_n^k| = \sum_{j=1}^n |A_j|$$

D'altra parte ci sono $\binom{n}{j}$ modi di scegliere in $\{1, \dots, n\}$ un insieme S a j elementi e ci sono S_j^k funzioni da $\{1, \dots, k\}$ surgettive su S . Pertanto $|A_j| = \binom{n}{j} S_j^k$ e si ha

$$n^k = \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} S_j^k \quad \forall n \geq 1,$$

e, avendo posto $S_0^k = 0$, concludiamo che

$$n^k = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} S_j^k \quad \forall n \geq 0. \tag{5.2}$$

Dalla formula di inversione, Corollario 3.3, si ottiene

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$n = 0$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$n = 1$	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$n = 2$	0	0	2	6	14	30	62	126	254	510
$n = 3$	0	0	0	6	36	150	540	1806	5796	18150
$n = 4$	0	0	0	0	24	240	1560	8400	40824	186480
$n = 5$	0	0	0	0	0	120	1800	16800	126000	834120
$n = 6$	0	0	0	0	0	0	720	15120	191520	1905120
$n = 7$	0	0	0	0	0	0	0	5040	141120	2328480
$n = 8$	0	0	0	0	0	0	0	0	40320	1451520
$n = 9$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	362880

Figura 5.2. Funzioni surgettive.

5.5 Proposizione. Il numero S_n^k di funzioni surgettive da $\{1, \dots, k\}$ su $\{1, \dots, n\}$ è

$$S_n^k = \sum_{j=0}^n (-1)^{n+j} \binom{n}{j} j^k = \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} (n-j)^k.$$

Poiché $S_n^k = \emptyset$ se $k < n$ e $S_n^n = \mathcal{I}_n^n$, si ha

$$S_n^n = I_n^n = n!$$

i.e.,

$$\frac{1}{n!} \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} (n-j)^k = \begin{cases} 1 & \text{se } k = n, \\ 0 & \text{se } k < n. \end{cases}$$

È utile avere una formula induttiva per S_n^k . Sappiamo già che $S_n^n = n! \forall n \geq 0$ e che $S_n^k = 0$ se $k < n$.

5.6 Proposizione. Si ha

$$\begin{cases} S_n^k = n(S_n^{k-1} + S_{n-1}^{k-1}) & \text{se } k \geq 1, n \geq 0, \\ S_n^n = n!, \\ S_0^k = 0 & \text{se } k \geq 1, \end{cases} \tag{5.3}$$

La formula (5.3) permette di calcolare per ogni intero N gli elementi della matrice $S = (S_n^k)$, $0 \leq n, k \leq N$, diagonale dopo diagonale, da sinistra verso destra.

Dimostrazione. Supponiamo ora $n \geq 1$ e $k \geq 1$. Sia $f : \{1, \dots, k\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ surgettiva. Ci sono due possibili casi. O $f : \{1, \dots, k-1\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ è anch'essa surgettiva oppure no. Le mappe del primo tipo sono in numero di nS_n^{k-1} perché ci sono S_n^{k-1} mappe surgettive da $\{1, \dots, k-1\}$ su $\{1, \dots, n\}$ e n modi di assegnare il valore $f(k)$. Ogni mappa del secondo tipo f ha una immagine a $(n-1)$ elementi e dunque le mappe del secondo tipo sono in numero di nS_{n-1}^{k-1} perché ci sono $\binom{n}{n-1} = n$ modi di scegliere un sottoinsieme di $n-1$ elementi in $\{1, \dots, n\}$ e S_{n-1}^{k-1} mappe surgettive da $\{1, \dots, k-1\}$ su $\{1, \dots, n-1\}$. Essendo i due casi tra loro alternativi, si ottiene in definitiva la formula induttiva (5.3). \square

5.7 Proposizione. *L'enumeratore esponenziale delle mappe surgettive su un insieme A a n elementi è*

$$\text{Exp}(z) = (e^z - 1)^n.$$

Dimostrazione. Infatti

$$\begin{aligned} \text{Exp}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^n (-1)^{n+j} \binom{n}{j} j^k \right) \frac{z^k}{k!} = \sum_{j=0}^n (-1)^{n+j} \binom{n}{j} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{j^k z^k}{k!} \\ &= \sum_{j=0}^n (-1)^{n+j} \binom{n}{j} e^{jz} = (-1)^n (1 - e^z)^n = (e^z - 1)^n. \end{aligned}$$

□

5.i Esercizi

5.8 Esercizio. Sia A un insieme, $|A| = k$. Qual'è il numero medio di punti contenuti nei sottoinsiemi di A ?

Soluzione. Il numero medio di punti contenuto nei sottoinsiemi di A è per definizione

$$\frac{1}{|\mathcal{P}(A)|} \sum_{S \subset \mathcal{P}(A)} |S|.$$

Per ogni $j \in \{1, \dots, k\}$, ci sono $\binom{k}{j}$ sottoinsiemi con j elementi. Pertanto

$$\frac{1}{|\mathcal{P}(A)|} \sum_{S \subset \mathcal{P}(A)} |S| = \frac{1}{2^k} \sum_{j=0}^k j \binom{k}{j} = \frac{1}{2^k} \sum_{j=1}^k k \binom{k-1}{j-1} = \frac{k 2^{k-1}}{2^k} = \frac{k}{2}.$$

6. Estrazioni

Una *estrazione* di k oggetti da una popolazione di n oggetti è la scelta di k fra essi. Si vuole calcolare il numero delle possibili estrazioni. Ovviamente non c'è una unica risposta univoca: occorre specificare la composizione della popolazione da cui estrarre e le regole di estrazione: ad esempio, va specificato quanti oggetti estrarre e in che modo, se l'ordine di estrazione è rilevante o no, ecc. Consideriamo qui alcuni casi.

- La popolazione è costituita da oggetti tra loro distinti, come ad esempio nel gioco del lotto: la popolazione è insomma un insieme. Più in generale si può considerare il caso in cui la popolazione sia un multiinsieme (A, a) . In questo caso si parla di *estrazioni da A con ripetizioni*.
- Nel contare le sequenze estratte, si può tener conto dell'ordine della sequenza estratta oppure no. Nel secondo caso si parla di *estrazioni* (semplici) e nel primo di *estrazioni ordinate*.

Alcune politiche di estrazione successive si riconducono ovviamente a uno di questi casi.

- Nel gioco del lotto, i numeri vengono estratti in tempi successivi e non si tiene conto dell'ordine delle estrazioni. Tuttavia le estrazioni del lotto sono equivalenti ad estrazioni simultanee di 5 elementi da $\{1, \dots, 90\}$.
- Le estrazioni ordinate poi sono più propriamente estrazioni successive in cui conta l'ordine di estrazione.
- Ogni estrazione con reimbussolamento, cioè ogni estrazione in cui ogni elemento estratto viene reintrodotta nella popolazione prima dell'estrazione dell'elemento successivo, è equivalente ad una estrazione simultanea da un multiinsieme con elementi di molteplicità infinita.

Fissate la popolazione e le regole di estrazione, e detto $\{a_k\}$ il numero di possibili estrazioni di k elementi per $k = 0, \dots$, si definiscono *funzione generatrice delle estrazioni* e *funzione generatrice delle estrazioni ordinate* rispettivamente le funzioni

$$E(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \quad Exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{z^k}{k!}.$$

6.a Estrazioni ordinate

Le estrazioni ordinate di k oggetti da una popolazione costituita da un multiinsieme (A, a) sono k -parole con caratteri presi da A . Pertanto

6.1 (Estrazioni ordinate da un insieme). Ogni estrazione ordinata di k elementi da un insieme A è una k -parola con lettere scelte in A , quindi avente tutte lettere diverse. Pertanto, il numero di estrazioni ordinate possibili di k elementi da A è il numero di k -parole con caratteri tutti distinti scelti in A . Se $|A| = n$ si ha

$$n(n-1)\dots(n-k+1);$$

ci sono infatti n scelte possibili per il primo carattere, $n-1$ per il secondo, etc.

La funzione generatrice esponenziale delle estrazioni ordinate dall'insieme \mathcal{A} è quindi

$$\text{Exp}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1) \frac{z^k}{k!} = (1+z)^n.$$

6.2 (Estrazioni ordinate da un multiinsieme). Sia (A, a) un multiinsieme con $|A| = n$ e sia k un intero minore o uguale alla molteplicità di tutti gli elementi di A . Ogni estrazione ordinata di k elementi da (A, a) è una k -parola con lettere scelte in A , eventualmente ripetute. Come sappiamo, il loro numero è

$$n^k$$

essendoci n scelte possibili per il primo carattere, ancora n scelte possibili per il secondo carattere, ecc.

Se $a(x) = +\infty \forall x \in A$, allora il loro numero è n^k per ogni intero k e quindi la funzione generatrice esponenziale delle estrazioni ordinate da (\mathcal{A}, a) è

$$\text{Exp}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} n^k \frac{z^k}{k!} = e^{nz}.$$

In entrambi i casi 6.1 and 6.2, il numero di elementi distinti della popolazione n compare ad esponente nella funzione generatrice esponenziale. Ciò non è casuale. Si ha infatti la seguente *proprietà moltiplicativa*.

6.3 Teorema. Siano $\text{Exp}_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{z^k}{k!}$ e $\text{Exp}_2(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \frac{z^k}{k!}$ le funzioni generatrici esponenziali delle estrazioni ordinate rispettivamente da multiinsiemi (A, a) e (B, b) effettuate con politiche P_1 e P_2 . Se A e B sono disgiunti, allora le estrazioni ordinate di k elementi dalla popolazione unione seguendo la politica P_1 per gli elementi di (A, a) e la politica P_2 per gli elementi di (B, b) sono

$$c_k := \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} a_j b_{k-j}.$$

e per la corrispondente funzione generatrice esponenziale vale la proprietà moltiplicativa

$$\text{Exp}(z) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{z^k}{k!} = \text{Exp}_1(z) \text{Exp}_2(z).$$

Dimostrazione. Una estrazione di k elementi dalla popolazione unione contiene j elementi di (A, a) e $k - j$ elementi di (B, b) per un opportuno $j \in \{0, \dots, k\}$. j estratti di (A, a) si possono scegliere in a_j modi, $k - j$ estratti di (B, b) si possono scegliere in b_{k-j} modi e ci sono $\binom{k}{j}$ modi di scegliere le posizioni occupate dagli elementi di (A, a) . Essendo le tre scelte indipendenti, si conclude che

$$c_k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} a_j b_{k-j}.$$

L'uguaglianza delle funzioni generatrici segue ora dal teorema sul prodotto di due serie di potenze, cfr. (2.7). \square

6.b Estrazioni semplici

6.4 (Estrazioni da un insieme). La popolazione qui è costituita da un insieme A . Estrarre k oggetti da A è selezionare un suo sottoinsieme di k elementi. Pertanto se $|A| = n$, il numero delle possibili estrazioni di k da A è $\binom{n}{k}$ e la funzione generatrice delle estrazioni da A vale

$$E(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} z^k = (1+z)^n.$$

6.5 (Estrazioni da un multiinsieme). Sia (A, a) un multiinsieme con $|A| = n$ e sia k un intero minore o uguale alla molteplicità di tutti gli elementi di A . Ogni sequenza estratta S è una sequenza di simboli in A eventualmente ripetuti come ad esempio

$$FABADABDF$$

in cui l'ordine non conta, i.e., è un multiinsieme di k elementi contenuto in A . Il loro numero è, come sappiamo,

$$\binom{n+k-1}{k}.$$

Nel caso in cui gli elementi di (A, a) hanno tutti molteplicità infinita, allora le estrazioni di k con ripetizioni sono $\binom{n+k-1}{k}$ per ogni intero k ; la funzione generatrice delle estrazioni con ripetizioni è allora

$$E(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-n}{k} z^k = \frac{1}{(1-z)^n}.$$

In entrambi i casi 6.4 and 6.5, il numero n di elementi distinti della popolazione compare ad esponente nella formula della funzione generatrice. Anche qui non si tratta di una coincidenza. Si ha la seguente *formula moltiplicativa*.

6.6 Teorema. Siano $E_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ e $E_2(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$ le funzioni generatrici di estrazioni semplici rispettivamente dai multiinsiemi (A, a) e (B, b) effettuate con politiche rispettivamente P_1 e P_2 . Se A e B sono disgiunti, allora il numero di estrazioni semplici di k elementi dalla popolazione unione seguendo la politica P_1 per le estrazioni degli elementi di (A, a) e la politica P_2 per gli elementi di (B, b) è

$$c_k := \sum_{j=0}^k a_j b_{k-j}$$

e quindi

$$E_{1+2}(z) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k = E_1(z) E_2(z).$$

Dimostrazione. Una estrazione di k elementi dall'unione delle popolazioni contiene j elementi di (A, a) e $k - j$ elementi di (B, b) per un opportuno $j \in \{0, \dots, k\}$. j estratti di (A, a) possono essere scelti in a_j modi e $k - j$ estratti di (B, b) possono essere scelti in b_{k-j} modi. Essendo le due scelte indipendenti.

$$c_k = \sum_{j=0}^k a_j b_{k-j}.$$

La seconda parte segue facilmente dal teorema di Cauchy sui prodotti di serie, Teorema 2.11. \square

6.7 Esempio. Supponiamo che la popolazione sia costituita da p elementi indistinguibili (ad esempio p palle bianche), ovvero che la popolazione sia $(\{P\}, n)$. Evidentemente c'è un solo modo di estrarre $0, 1, 2, \dots, p$ oggetti e zero modi di estrarne più di p . La funzione generatrice è in questo caso

$$E(z) = 1 + z + \dots + z^p = \frac{1 - z^{p+1}}{1 - z}.$$

Se la popolazione è il multiinsieme $(\{P\}, \infty)$, allora per ogni $k \in \mathbb{N}$ c'è un solo modo di estrarre k oggetti, pertanto in questo caso

$$E(z) = 1 + z + \dots + z^n + \dots = \frac{1}{1 - z}.$$

6.8 Esempio. Dato il multiinsieme $A := \{a^3, b^2, c^2\}$. Calcolare il numero di possibili estrazioni di 2 oggetti da A . [Sugg. per ogni punto $p \in A$, la funzione generatrice di $\{p^k\}$ è

$$1 + z + z^2 + \dots + z^k.$$

La funzione generatrice di A è pertanto, cfr. il Teorema 6.3

$$E(z) = (1 + z + z^2 + z^3)(1 + z + z^2)(1 + z + z^2)$$

Il numero x di possibili estrazioni di 2 oggetti è il coefficiente del termine z^2 . In questo caso $x = 6$.]

6.9 Esempio. Ritrovare con l'uso della proprietà moltiplicativa la funzione generatrice delle estrazioni dal multiinsieme (A, ∞) . [Sugg. Per ogni elemento $x \in A$ la funzione generatrice delle estrazioni da $(\{x\}, \infty)$ è, cfr. Esempio 6.7, $1/(1 - z)$. Pertanto, se $|A| = n$, la funzione generatrice da (A, ∞) è

$$E(z) = \frac{1}{1 - z} \frac{1}{1 - z} \dots \frac{1}{1 - z} = \frac{1}{(1 - z)^n}.]$$

Le formule moltiplicative, Teoremi 6.3 and 6.6 sono evidentemente utili nel contare estrazioni con vari vincoli sulla molteplicità degli elementi della popolazione e sulle regole di estrazioni.

6.10 Esempio. Dato il multiinsieme $A = \{a^3, b^2, c^5\}$. Calcolare il numero di estrazioni di quattro elementi da A che contengano almeno due c e non più di un b . La funzione generatrice delle estrazioni da $\{a^3\}$, $\{b^2\}$ e $\{c^5\}$ con le regole fissate sono rispettivamente

$$\begin{aligned}
 &1 + z + z^2 + z^3, \\
 &1 + z, \\
 &z^2 + z^3 + z^4 + z^5.
 \end{aligned}$$

La funzione generatrice delle estrazioni da $\{a^3, b^2, c^5\}$ con le regole date è allora il prodotto di queste, i.e. il polinomio

$$(1 + z + z^2 + z^3)(1 + z)(z^2 + z^3 + z^4 + z^5)$$

Il numero cercato è il coefficiente di z^4 , i.e. 5.

6.c Esercizi

6.11 Esercizio. Si deve scegliere un comitato di 7 persone scegliendo i componenti tra 11 donne e 8 uomini. In quanti modi lo si può fare in ognuno dei casi seguenti

- Non ci sono ulteriori vincoli.
- Devono esserci almeno due donne e un uomo.
- Le donne debbono essere più degli uomini.
- Devono esserci almeno due donne e non più di tre uomini.

6.12 Esercizio. Qual'è la probabilità di fare terno, quaterna e cinquina al lotto giocando rispettivamente tre, quattro o cinque numeri?

6.13 Esercizio. Giocando cinque numeri al lotto, qual'è la probabilità di fare un terno? Qual'è la probabilità di fare almeno un terno?

7. Collocazioni di oggetti distinti

Una presentazione di alcuni problemi classici di enumerazione è in termini di problemi di collocazione: in quanti modi posso collocare k oggetti in gruppi? Ovviamente la domanda non ha risposta univoca: occorre specificare la composizione della popolazione da collocare, e le regole del collocamento: ad esempio, vanno specificati il numero delle “scatole” in cui gli oggetti vanno collocati, se le scatole sono distinguibili o no, se va conteggiato o meno l’ordine degli oggetti all’interno delle scatole e gli eventuali vincoli ulteriori.

Qui ci occupiamo delle collocazioni in gruppi di *oggetti distinti*. Se per $k = 0, 1, 2, \dots$, a_k è il numero di collocazioni di k oggetti permesso dalla politica di collocamento, la funzione generatrice esponenziale delle collocazioni relative è la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{z^k}{k!}.$$

Collocazioni in scatole distinte

7.a Oggetti distinti in scatole distinte

Collocare k oggetti distinti in n scatole distinte vuol dire decidere in quale scatola va ciascun oggetto.

Non è restrittivo supporre che gli oggetti siano etichettati con $1, \dots, k$ e che le scatole siano etichettate con $1, \dots, n$. Ad ogni collocazione corrisponde quindi la funzione, detta *funzione di collocamento*, $f : \{1, \dots, k\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ che assegna appunto ad ogni $j \in \{1, \dots, k\}$ il numero $f(j)$ della scatola in cui j viene collocato.

In termini di insiemi una collocazione degli elementi (distinti) di un insieme X di k elementi in n scatole produce una *lista ordinata* di n sottoinsiemi di X formati dagli elementi presenti nella prima scatola, nella seconda, ecc.

7.1 (Nessun vincolo ulteriore). In questo caso la relazione collocazione-funzione di collocamento è una relazione biunivoca tra la classe delle possibili collocazioni e la classe \mathcal{F}_n^k di tutte le funzioni $f : \{1, \dots, k\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$. Pertanto le collocazioni di k oggetti distinti in n scatole distinte sono

$$n^k$$

e il corrispondente generatore esponenziale è

$$\text{Exp}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} n^k \frac{z^k}{k!} = e^{nz}.$$

Un altro modo di procedere è il seguente. Supponiamo che nelle scatole $1, 2, \dots, n$ vengano collocati rispettivamente i_1, i_2, \dots, i_n oggetti in modo che $i_1 + \dots + i_n = k$. Vi sono $\binom{k}{i_1}$ modi di scegliere gli elementi da collocare nella prima scatola, $\binom{k-i_1}{i_2}$ modi di scegliere gli elementi da collocare nella seconda scatola e

$$\binom{k - i_1 - \dots - i_{n-1}}{i_n}$$

modi di scegliere gli elementi da collocare nella n -esima scatola. Pertanto il numero di collocazioni possibili con i_1, i_2, \dots, i_n elementi nelle scatole $1, 2, \dots, n$ è

$$\begin{aligned} & \binom{k}{i_1} \binom{k-i_1}{i_2} \dots \binom{k-i_1-\dots-i_{n-1}}{i_n} \\ &= \frac{k!}{i_1!(k-i_1)!} \frac{(k-i_1)!}{i_2!(k-i_1-i_2)!} \dots = \frac{k!}{i_1!i_2! \dots i_n!}. \end{aligned} \tag{7.1}$$

L'ultima espressione è un *coefficiente multinomiale*, cfr. (2.11) e si indica anche con

$$\binom{k}{i_1 \ i_2 \ \dots \ i_n}.$$

Le collocazioni di k oggetti distinti in n scatole distinte con i_1 elementi nella prima scatola, i_2 elementi nella seconda, ecc., sono pertanto

$$\sum_{i_1+\dots+i_n=k} \binom{k}{i_1 \ i_2 \ \dots \ i_n}$$

dove la somma è estesa a tutte le n -uple di interi non negativi con $i_1 + \dots + i_n = k$.

Che questa somma debba fare n^k è già stato provato enumerando la stessa struttura, le collocazioni di k distinti in n scatole distinte, in due modi diversi. Una dimostrazione analitica è invece compito del prodotto di convoluzione. Infatti, applicando il Teorema 2.14 a $A(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n = e^z$, si ottiene

$$\frac{n^k}{k!} = [e^{nz}]_k = \sum_{i_1+\dots+i_n=k} \frac{1}{i_1!} \frac{1}{i_2!} \dots \frac{1}{i_n!},$$

i.e., moltiplicando per $k!$

$$n^k = \sum_{i_1+\dots+i_n=k} \binom{k}{i_1 \ i_2 \ \dots \ i_n}.$$

7.2 (Almeno uno per scatola). Si vuole contare le collocazioni di k oggetti in n scatole che collocano almeno un oggetto in ogni scatola. In questo caso la relazione collocazione-funzione di collocamento è evidentemente biunivoca tra la classe delle possibili collocazioni e la classe \mathcal{S}_n^k delle funzioni surgettive $f : \{1, \dots, k\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$. Pertanto il numero di collocazioni è in questo caso

$$|\mathcal{S}_n^k| = \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} (n-j)^k$$

e il corrispondente generatore esponenziale delle collocazioni in n scatole distinte nessuna vuota è

$$\text{Exp}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} |\mathcal{S}_n^k| \frac{z^k}{k!} = (e^z - 1)^n, \quad (7.2)$$

cfr. la Proposizione 5.7.

Si può anche ragionare in un altro modo. Supponiamo che nelle scatole $1, 2, \dots, n$ vengano collocati rispettivamente i_1, i_2, \dots, i_n oggetti in modo che $i_1 + \dots + i_n = k$ e $i_1, \dots, i_n \geq 1$. Come abbiamo visto, cfr. (7.1), il numero di collocazioni possibili di k in n scatole con i_1, i_2, \dots, i_n elementi nelle scatole $1, 2, \dots, n$ è

$$\binom{k}{i_1 \ i_2 \ \dots \ i_n}. \quad (7.3)$$

Segue che il numero delle collocazioni di k oggetti distinti in n scatole distinte nessuna vuota è il coefficiente multinomiale

$$\sum_{\substack{i_1 + \dots + i_n = k \\ i_1, \dots, i_n \geq 1}} \binom{k}{i_1 \ i_2 \ \dots \ i_n}$$

dove la somma è estesa a tutte le n -uple di interi *positivi* con $i_1 + \dots + i_n = k$ da cui l'identità

$$S_n^k = \sum_{\substack{i_1 + \dots + i_n = k \\ i_1, \dots, i_n \geq 1}} \binom{k}{i_1 \ i_2 \ \dots \ i_n}. \quad (7.4)$$

7.3 (Al più uno per scatola). Si vuole contare le collocazioni di k oggetti in n scatole che collocano al più un oggetto in ogni scatola. In questo caso la relazione collocazione-funzione di collocamento è evidentemente biunivoca tra la classe delle possibili collocazioni e la classe \mathcal{I}_n^k delle funzioni iniettive $f : \{1, \dots, k\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$. Pertanto il numero delle collocazioni è in questo caso

$$|\mathcal{I}_n^k| = n(n-1) \cdots (n-k+1)$$

e il corrispondente generatore esponenziale è

$$\text{Exp}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} |\mathcal{I}_n^k| \frac{z^k}{k!} = (1+z)^n.$$

7.4 (Collocamenti ordinati). Supponiamo di avere k oggetti distinti da collocare in n scatole distinte e questa volta vogliamo calcolare il numero di collocazioni possibili, considerando il contenuto di ciascuna scatola come una lista ordinata piuttosto che come un insieme. Si può procedere nel modo seguente.

Ci sono evidentemente n modi di collocare il primo oggetto. Ci sono poi $n+1$ modi di collocare il secondo oggetto. Infatti lo si può mettere o in una delle $n-1$ scatole ancora vuote oppure lo si può collocare nella scatola occupata dal primo oggetto e questo o prima o dopo del primo. In totale abbiamo $n-1+2 = n+1$

modi di procedere. Ci sono poi $n + 2$ modi di collocare il terzo oggetto. Infatti, se i primi due oggetti occupano due scatole distinte, si può collocare il terzo oggetto o in una delle $n - 2$ scatole rimaste o in due modi differenti in ciascuna delle scatole occupate; ci sono dunque in questo caso $n - 2 + 2 + 2 = n + 2$ modi di procedere. Se invece i primi due oggetti sono nella stessa scatola, si può collocare il terzo oggetto in una delle $n - 1$ scatole libere oppure in tre modi diversi nella scatola occupata dai primi due; anche in questo caso ci sono $n - 1 + 3 = n + 2$ modi di procedere.

Procedendo poi per induzione, il numero delle possibili collocazioni ordinate del k -esimo oggetto è $n + k - 1$ e quindi il numero delle possibili collocazioni di k oggetti è

$$n(n + 1)(n + 2) \dots (n + k - 1).$$

Il corrispondente generatore esponenziale vale allora

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n + k - 1}{k} z^k = \frac{1}{(1 - z)^n}.$$

7.b Proprietà moltiplicativa

In tutti i casi precedenti il numero n delle scatole in cui collocare compare ad esponente. Ciò non è casuale. Per il collocamento di oggetti *distinti* si ha

7.5 Teorema. *Siano $Exp_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{z^k}{k!}$ e $Exp_2(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \frac{z^k}{k!}$ le funzioni generatrici esponenziali delle collocazioni di oggetti distinti in due insiemi di scatole S_1 e S_2 con politiche P_1 e P_2 . Se $S_1 \cap S_2 = \emptyset$, allora le collocazioni di k elementi in $S_1 \cup S_2$ seguendo la politica P_1 per i collocamenti nelle scatole in S_1 e la politica P_2 per i collocamenti nelle scatole in S_2 è*

$$c_k := \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} a_j b_{k-j}.$$

La corrispondente funzione generatrice esponenziale è perciò

$$Exp_{1+2}(z) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{z^k}{k!} = Exp_1(z) Exp_2(z).$$

Dimostrazione. Se ho k elementi da collocare, j vengono collocati nelle scatole in S_1 e $k - j$ vengono collocati nelle scatole in S_2 per un opportuno j , $0 \leq j \leq k$. Il collocamento di j elementi in scatole del tipo S_1 si può fare in a_j modi, e il collocamento di $k - j$ elementi in scatole della lista S_2 si può fare in b_{k-j} modi. Ci sono poi $\binom{k}{j}$ modi di scegliere gli elementi che finiscono nelle scatole in S_1 . Si conclude perciò che

$$c_k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} a_j b_{k-j} \quad \forall k \geq 0.$$

La seconda parte della tesi segue dal teorema sulle serie prodotto. □

Collocazioni in scatole indistinte

7.c Oggetti distinti in scatole indistinte

7.6 (Almeno uno per scatola). Occupiamoci di contare il numero di collocazioni di oggetti distinti in scatole indistinte con almeno un oggetto per scatola.

Osserviamo che, le scatole, pur essendo indistinte, si distinguono per il loro contenuto una volta che gli oggetti siano stati collocati essendo tutte non vuote. Si può perciò pensare di numerare le n scatole, di calcolare le collocazioni di k oggetti in n scatole distinte con almeno un elemento per scatola (numero che abbiamo denotato con S_n^k e che abbiamo già calcolato) e di dividere il risultato per il numero di permutazioni $n!$ delle scatole. Si conclude così che le collocazioni di k distinti in n scatole indistinte, nessuna vuota, sono in numero di

$$S(k, n) = \frac{1}{n!} S_n^k = \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} (n-j)^k \quad (7.5)$$

e quindi la corrispondente generatrice esponenziale è

$$\text{Exp}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} S(k, n) \frac{z^k}{k!} = \frac{1}{n!} (e^z - 1)^n. \quad (7.6)$$

I numeri $\{S(k, n)\}_{k,n}$ si chiamano *numeri di Stirling di seconda specie*.

Ricordando la (5.3), la sequenza $S(k, n)$ dei numeri di Stirling di seconda specie è la soluzione della ricorrenza

$$\begin{cases} S(k, n) = S(k-1, n-1) + nS(k-1, n) & \text{se } k \geq 1, n \geq 0, \\ S(n, n) = 1, \\ S(k, 0) = 0 & \text{se } k \geq 1, \end{cases} \quad (7.7)$$

ricorrenza che permette di calcolare riga per riga da sinistra a destra la matrice $S(k, n)$.

7.7 (Nessun vincolo ulteriore). Ovviamente le collocazioni di k distinti in n scatole indistinte senza vincoli ulteriori è, ricordando la (7.5),

$$S(k, 0) + S(k, 1) + \cdots + S(k, n)$$

Il numero di tutte le collocazioni di k distinti in scatole indistinte, senza vincolo sul loro numero, è allora

$$B_k := S(k, 0) + S(k, 1) + \cdots + S(k, k) = \sum_{j=0}^k S(k, j) = \sum_{j=0}^{\infty} S(k, j)$$

essendo $S(k, j) = 0 \forall j > k$, Il numero B_k si chiama il k -esimo *numero di Bell*. Evidentemente $B_1 = 1$, $B_2 = 2$, $B_3 = 5$ e per convenienza si pone $B_0 = 1$.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$n = 0$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$n = 1$	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$n = 2$	0	0	1	3	7	15	31	63	127	255	511
$n = 3$	0	0	0	1	6	25	90	301	966	3025	9330
$n = 4$	0	0	0	0	1	10	65	350	1701	7770	34105
$n = 5$	0	0	0	0	0	1	15	140	1050	6951	42525
$n = 6$	0	0	0	0	0	0	1	21	266	2646	22827
$n = 7$	0	0	0	0	0	0	0	1	28	462	5880
$n = 8$	0	0	0	0	0	0	0	0	1	36	750
$n = 9$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	45
$n = 10$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Figura 7.1. Numeri di Stirling di seconda specie.

Proposizione. Si ha per $k = 0, 1, \dots$

$$B_k = \frac{1}{e} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{j^k}{j!} \tag{7.8}$$

e la funzione generatrice esponenziale dei numeri di Bell è

$$\sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{z^k}{k!} = \exp(e^z - 1). \tag{7.9}$$

Dimostrazione. Infatti

$$\begin{aligned} B_k &= \sum_{n=0}^{\infty} S(k, n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} (n-j)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^j}{j!} \frac{(n-j)^k}{(n-j)!} \\ &= \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{j^k}{j!} \right) = \frac{1}{e} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{j^k}{j!}. \end{aligned}$$

Inoltre, cfr. la (7.6)

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{z^k}{k!} &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} S(k, n) \right) \frac{z^k}{k!} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} S(k, n) \frac{z^k}{k!} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(e^z - 1)^n}{n!} = \exp(e^z - 1). \end{aligned}$$

□

Infine vediamo una formula ricorsiva

Proposizione. I numeri di Bell $\{B_k\}$ sono la soluzione della ricorrenza

$$B_0 = 1, \quad B_{k+1} = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} B_j, \quad \forall k \geq 0. \tag{7.10}$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B_n	1	1	2	5	15	52	203	877	4140	21147	115975

Figura 7.2. Numeri di Bell.

Dimostrazione. Siano A un insieme a $k+1$ elementi, $k \geq 0$, $x_0 \in A$ e consideriamo una collocazione degli elementi di A in scatole indistinte. x_0 viene inserito in una scatola che etichettiamo con 0 e sia S_0 l'insieme degli elementi di A che finiscono nella stessa scatola. La collocazione in esame è evidentemente determinata dalla scelta degli elementi che compongono $S' := S_0 \setminus \{x_0\}$ e dalla collocazione degli elementi di $A \setminus S_0$. Se $|S_0| = j+1$, S' è un arbitrario sottoinsieme di $A \setminus \{x_0\}$ e dunque lo si può scegliere in $\binom{k}{j}$ modi. D'altra parte $A \setminus S_0$ ha $k-j$ elementi che si possono collocare in B_{k-j} modi ($B_0 = 1$). Pertanto

$$B_{k+1} = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} B_{k-j} = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} B_j.$$

□

7.d Partizioni di insiemi

Sia A un insieme. Una *partizione* di A è un sottoinsieme delle parti di $\mathcal{P}(A)$, i.e., una lista di sottoinsiemi distinti di A in cui l'ordine non conta: non conta né l'ordine degli elementi di A all'interno di ciascun elemento della partizione e non conta l'ordine degli elementi della partizione. Ad esempio, tutte le partizioni di $A = \{1, 2, 3\}$ sono

$$\begin{aligned} & \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\} \\ & \{\{1\}, \{2, 3\}\} \\ & \{\{2\}, \{1, 3\}\} \\ & \{\{3\}, \{1, 2\}\} \\ & \{\{1, 2, 3\}\} \end{aligned}$$

e

$$\{\{1\}, \{2, 3\}\} \quad \text{e} \quad \{\{2, 3\}, \{1\}\}$$

indicano la stessa partizione di $A := \{1, 2, 3\}$. Si noti poi che ogni elemento di ogni partizione è non vuoto. Partizionare un insieme A con k elementi in parti è equivalente a collocare k oggetti distinti in scatole indistinte, nessuna vuota. Pertanto

7.8 Proposizione. *Sia A con $|A| = k$. Il numero di partizioni di A in n parti è il numero di Stirling di seconda specie $S(k, n)$.*

La cardinalità dell'insieme di tutte le partizioni di A è il numero di Bell $B_k = \sum_{n=0}^k S(k, n)$.

7.e Partizioni e liste di sottoinsiemi

Un insieme di collocazioni di k oggetti distinti in n scatole distinte produce un insieme X di liste di n sottoinsiemi di $\{1, \dots, k\}$. Le partizioni soggiacenti sono invece classi di equivalenza di liste di X . Questa corrispondenza va analizzata se si vuole calcolare il numero di partizioni soggiacenti. Ecco alcuni esempi.

Abbiamo visto che il numero di collocazioni di k oggetti in n scatole nessuna vuota è

$$S_n^k = \sum_{\substack{i_1+i_2+\dots+i_n=k \\ i_1, i_2, \dots, i_n \geq 1}} \binom{k}{i_1 \ i_2 \ \dots \ i_n}$$

In altri termini S_n^k è cardinalità dell'insieme X di tutte le liste di n sottoinsiemi non vuoti di $\{1, \dots, k\}$. Le partizioni soggiacenti sono invece le partizioni di $\{1, \dots, k\}$ in n sottoinsiemi nonvuoti. È chiaro che ogni partizione produce $n!$ liste in X permutando gli elementi. Segue, cfr. la Proposizione 7.8, che il numero di partizioni di $\{1, \dots, k\}$ in n parti è

$$S(k, n) = \frac{1}{n!} S_n^k = \frac{1}{n!} \sum_{\substack{i_1+i_2+\dots+i_n=k \\ i_j \geq 1 \ \forall j}} \binom{k}{i_1 \ i_2 \ \dots \ i_n}.$$

7.9 Esercizio (Coefficienti multinomiali, I). Siano $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ numeri *distinti*. Quante sono le partizioni di $\{1, \dots, k\}$ in n sottoinsiemi di $\{1, \dots, k\}$ con α_1 elementi in un sottoinsieme, α_2 in un altro, \dots , α_n nell'ultimo?

Soluzione. Sia X l'insieme delle liste di n sottoinsiemi di $\{1, \dots, k\}$. Si ha

$$|X| = \frac{k!}{\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!} = \binom{k}{\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_n}.$$

D'altra parte ogni partizione soggiacente produce un'unica lista in X essendo $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ distinti. Segue che le partizioni di $\{1, \dots, k\}$ in n sottoinsiemi di rispettivamente $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ elementi è

$$\frac{k!}{\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!} = \binom{k}{\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_n}.$$

7.10 Esercizio (Coefficiente multinomiale, II). Siano $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ positivi e distinti tra loro. Quante sono le partizioni di $\{1, \dots, k\}$ fatte con α_1 parti con 1 elemento, α_2 parti con 2 elementi, \dots , α_p parti con p elementi? Naturalmente

$$\sum_{j=0}^p \alpha_j = n, \quad \sum_{j=0}^p j \alpha_j = k.$$

Soluzione. Sia X l'insieme delle liste di n sottoinsiemi di $\{1, \dots, k\}$ con α_1 sottoinsiemi con 1 elemento, α_2 sottoinsiemi con due elementi, \dots , α_p sottoinsiemi con p elementi. Ovviamente

$$|X| = \binom{k!}{\underbrace{1 \ \dots \ 1}_{\alpha_1} \ \underbrace{2 \ \dots \ 2}_{\alpha_2} \ \dots \ \underbrace{p \ \dots \ p}_{\alpha_p}} = \frac{k!}{(1!)^{\alpha_1} (2!)^{\alpha_2} \dots (p!)^{\alpha_p}}$$

D'altra parte ogni partizione soggiacente puo' produrre più liste permutando tra loro gli elementi della lista di uguale lunghezza. Pertanto il numero cercato è

$$\frac{1}{\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_p!} \frac{k!}{(1!)^{\alpha_1} (2!)^{\alpha_2} \dots (p!)^{\alpha_p}}.$$

7.f Esercizi

7.11 Esercizio. Dare una dimostrazione analitica della (7.4) partendo dalla (7.2).

Soluzione. Si ha $e^z - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$. Dal teorema sul prodotto di convoluzione iterato, cfr. (2.10),

$$\frac{S_n^k}{k!} = \left[(e^z - 1)^n \right]_k = \sum_{\substack{i_1+i_2+\dots+i_n=k \\ i_1, \dots, i_n \geq 1}} \frac{1}{i_1!} \frac{1}{i_2!} \dots \frac{1}{i_n!};$$

moltiplicando per $k!$ si ottiene la tesi.

7.12 Esercizio. Dare una dimostrazione analitica della (7.10) a partire dalla (7.9).

Soluzione. Dal teorema sul prodotto di convoluzione

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} B_j &= \sum_{j=0}^k \frac{1^{k-j}}{(k-j)!} \frac{B_j}{j!} = k! [\exp(e^z - 1) e^z]_k = k! [D(\exp(e^z - 1))]_k \\ &= (k+1)! [\exp(e^z - 1)]_{k+1} = (k+1)! \frac{B_{k+1}}{(k+1)!} = B_{k+1}. \end{aligned}$$

7.13 Esercizio. La funzione

$$(x)_j := x(x-1)(x-2)\dots(x-j+1), \quad x \in \mathbb{R}$$

è un polinomio di grado j . Se $\{S(k, n)\}$ è la matrice dei numeri di Stirling di seconda specie, provare che

$$x^k = \sum_{j=0}^k S(k, j) (x)_j \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

[Sugg. Usare la (5.2).]

7.14 Esercizio. La funzione

$$(x)_k := x(x-1)(x-2)\dots(x-k+1)$$

è un polinomio di grado k , e dunque $(x)_k = \sum_{j=0}^k s(j, k) x^j$. La matrice triangolare superiore $\{s(j, k)\}$ si chiama la matrice dei *numeri di Stirling di prima specie*. Mostrare che le matrici dei numeri di Stirling di prima e di seconda specie sono l'una l'inversa dell'altra.

7.15 Esercizio (Permutazioni con k cicli). Calcolare il numero $p_{n,k}$ di permutazioni di n elementi con esattamente k cicli.

Soluzione. Ovviamente

$$p_{n,k} = \begin{cases} 0 & \text{se } n > 0, k > n, \\ 1 & \text{se } n > 0, k = n \\ (n-1)! & \text{se } n > 0, k = 1, \end{cases}$$

e si pone $p_{0,0} = 1, p_{n,0} = 0$ se $n > 0$ e $p_{0,k} = 0$ se $k > 0$. Per $n \geq 1$ e $1 \leq k \leq n$, dividiamo le permutazioni di n con k cicli in due classi disgiunte: quelle che hanno 1 come punto fisso e le altre. Ogni permutazione che ha 1 come punto fisso, ha un ciclo (1) e il resto è una permutazione di $(n-1)$ elementi con $(k-1)$ cicli. Pertanto queste permutazioni sono in numero di $p_{n-1,k-1}$. Le altre sono in numero di $(n-1)p_{n-1,k}$ perché ci sono $(n-1)$ posti dove infilare l'uno nei k cicli prodotti da $\{2, \dots, n\}$. Pertanto si ha la ricorrenza

$$p_{n,k} = p_{n-1,k-1} + (n-1)p_{n-1,k} \quad \forall n \geq 1, k \geq 1. \tag{7.11}$$

Se ora $a_n(x) := \sum_{k=0}^n p(n,k) x^k$, si trova la formula ricorsiva

$$a_n(x) = x a_{n-1}(x) + (n-1) a_{n-1}(x), \quad a_0 = 1.$$

D'altra parte si osserva che le funzioni $(x)^n := x(x+1)\cdots(x+n-1)$ verificano la stessa formula ricorsiva

$$(x)^n = x(x)^{n-1} + (n-1)(x)^{n-1}, \quad (x)^0 = 1, \quad (7.12)$$

e quindi

$$\sum_{k=0}^n p_{n,k} x^k = (x)^n \quad \forall n, \forall x. \quad (7.13)$$

Segue allora dalla (3.7) che

$$\sum_{k=0}^n p_{n,k} x^k = (x)^n = (-1)^n (x)_n = \sum_{n=0}^n (-1)^{n-k} s_{k,n} x^k$$

dove $s_{k,n}$ è la tabella triangolare superiore dei numeri di Stirling di prima specie; si conclude quindi che

$$p_{n,k} = (-1)^{n-k} s_{k,n} \quad \forall k, n. \quad (7.14)$$

7.16 Esercizio. Sia k intero positivo. Calcolare il numero di n -uple (x_1, x_2, \dots, x_n) a componenti nonnegative tali che $\sum_{j=1}^n x_j = k$. [*Sugg.* Risposta $\binom{n+k-1}{k}$.]

7.17 Esercizio. Sia k intero positivo. Calcolare il numero di n -uple a componenti positive tali che $\sum_{j=1}^n x_j = k$. [*Sugg.* Risposta $\binom{k-1}{n-1}$.]

7.18 Esercizio. Trovare il numero di k -parole costruite sull'alfabeto $\{1, \dots, n\}$ che non contengono due interi successivi. [*Sugg.* Risposta: $\binom{n-k+1}{k}$.]

8. Collocazioni di oggetti indistinti

In questo capitolo ci occupiamo della collocazione di *oggetti indistinguibili*. Se per $k = 0, 1, 2, \dots$, a_k è il numero di collocazioni di k oggetti permesso dalla politica di collocamento, la funzione generatrice delle collocazioni relative è la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k.$$

8.a Oggetti indistinti in scatole distinte

8.1 (Nessun vincolo ulteriore). Si vuole calcolare il numero di possibili collocazioni di k oggetti indistinti in un insieme S di n scatole distinte. Qui il parametro che caratterizza ciascuna collocazione, è il numero di oggetti che finiscono in ogni scatola, i.e. la funzione *occupazione* $x : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{0, \dots, k\}$ che restituisce il numero di oggetti contenuti in ciascuna scatola. Ovviamente $\sum_{s \in S} x(s) = k$. Se gli oggetti sono ad esempio dei caratteri 0, ad ogni collocazione posso associare la stringa binaria

$$\underbrace{00 \dots 0}_x 1 \underbrace{00 \dots 0}_x 1 \dots 1 \underbrace{00 \dots 0}_x 1 \underbrace{00 \dots 0}_x \quad (8.1)$$

dove il simbolo 1 indica il cambio di scatola. È facile convincersi che le collocazioni ammissibili sono in corrispondenza biunivoca con l'insieme di tali stringhe, di cui, come abbiamo visto, conosciamo il numero. Pertanto si conclude che il numero di collocazioni di k indistinti in n scatole distinte è

$$\binom{n+k-1}{k}$$

e che la corrispondente funzione generatrice è

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} z^k = \frac{1}{(1-z)^n}.$$

8.2 (Almeno uno per scatola). Si vuole contare le collocazioni di k oggetti uguali in n scatole che collochino almeno un oggetto in ogni scatola. In questo caso la posizione di n degli oggetti è definita (uno per scatola) e resta da collocare $k-n$ oggetti senza ulteriori vincoli. Pertanto il numero di collocazioni è pari alle collocazioni di $k-n$ oggetti senza ulteriori vincoli, i.e.,

$$\binom{n + (k - n) - 1}{k - n} = \binom{k - 1}{k - n} = \binom{k - 1}{n - 1}.$$

Il corrispondente generatore è

$$\sum_{k=n}^{\infty} \binom{k - 1}{k - n} z^k = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{n + j - 1}{j} z^{n+j} = \left(\frac{z}{1 - z} \right)^n.$$

8.3 (Al più uno per scatola). Si vuole contare le collocazioni di k oggetti uguali in n scatole che collocano al più un oggetto per scatola. In questo caso il parametro rilevante in ogni collocazione è l'insieme delle scatole che vengono riempite, e che si possono scegliere in $\binom{n}{k}$ modi. Pertanto il numero di collocazioni possibili è in questo caso

$$\binom{n}{k}.$$

e il generatore è $(1 + z)^n$.

8.b Proprietà moltiplicativa

Anche le funzioni generatrici delle collocazioni di oggetti *indistinti* hanno la proprietà moltiplicativa.

8.4 Teorema. Siano $E_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ e $E_2(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$ le funzioni generatrici delle collocazioni di oggetti indistinti in due insiemi di scatole S_1 e S_2 con politiche P_1 e P_2 . Se $S_1 \cap S_2 = \emptyset$, allora le collocazioni di k elementi in $S_1 \cup S_2$ seguendo la politica P_1 per i collocamenti nelle scatole in S_1 e la politica P_2 per i collocamenti nelle scatole in S_2 è

$$c_k := \sum_{j=0}^k a_j b_{k-j}.$$

Perciò la corrispondente funzione generatrice vale

$$E_{1+2}(z) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k = E_1(z) E_2(z).$$

Dimostrazione. Se ho k elementi da collocare, j verranno collocati nelle scatole della lista S_1 e $k - j$ verranno collocati nella lista S_2 per un opportuno j , $0 \leq j \leq n$. Il collocamento di j elementi in scatole del tipo S_1 si può fare in a_j modi, e il collocamento di $k - j$ elementi in scatole della lista S_2 si può fare in b_{k-j} modi. Essendo la popolazione costituita da oggetti indistinti, si conclude che

$$c_k = \sum_{j=0}^k a_j b_{k-j} \quad \forall k \geq 0.$$

La seconda parte della tesi segue dal teorema sulle serie prodotto. □

8.c Oggetti indistinti in scatole indistinte

Passiamo a calcolare il numero $p(k)$ di modi in cui si possono collocare k oggetti indistinti, che possiamo supporre costituire il multiinsieme $\{1^k\}$, in *scatole indistinguibili*. Ad esempio le collocazioni di $\{1^4\}$ in scatole indistinte sono

$$\begin{aligned} & \{\{1^4\}\}, \\ & \{\{1^3\}, \{1\}\}, \\ & \{\{1^2\}, \{1^2\}\}, \\ & \{\{1^2\}, \{1\}, \{1\}\}, \\ & \{\{1\}, \{1\}, \{1\}, \{1\}\} \end{aligned} \tag{8.2}$$

Come abbiamo osservato più volte, quando si collocano oggetti indistinguibili quel che si osserva è il numero di elementi presenti in ciascuna scatola. Se le scatole non sono distinguibili, allora ogni collocazione è individuata dai soli numeri di scatole che contengono $1, 2, 3, \dots$, elementi. Siano dunque T_1, T_2, T_3, \dots scatole distinte. Fissiamo una collocazione di oggetti indistinti in scatole indistinte. Raccogliamo gli oggetti collocati nelle scatole contenenti un elemento e collochiamoli in T_1 : T_1 può contenere un numero arbitrario di elementi. Raccogliamo quindi gli oggetti collocati nelle scatole contenenti due elementi e collochiamoli in T_2 : T_2 può contenere un numero pari di elementi. Raccogliamo quindi gli oggetti collocati nelle scatole contenenti tre elementi e collochiamoli in T_3 : T_3 può contenere un numero di elementi multiplo di tre. Procedendo in questo modo, definiamo in effetti una corrispondenza biunivoca tra le collocazioni di k oggetti indistinti in scatole indistinte e le collocazioni di k oggetti indistinti in scatole *distinte* vincolate nel seguente modo: non ci sono restrizioni per la scatola T_1 , gli oggetti in T_2 debbono essere in numero pari, gli oggetti in T_3 debbono essere un multiplo di 3, e così via. Ora le funzioni generatrici delle collocazioni nelle scatole T_1, T_2, \dots sono rispettivamente

$$\begin{aligned} 1 + z + z^2 + z^3 + \dots &= \frac{1}{1-z} \\ 1 + z^2 + z^4 + z^6 + \dots &= \frac{1}{1-z^2} \\ 1 + z^3 + z^6 + z^9 + \dots &= \frac{1}{1-z^3} \\ &\dots \end{aligned} \tag{8.3}$$

e quindi il numero $p(k)$ delle collocazioni di oggetti indistinti in scatole indistinte è il coefficiente k -esimo dello sviluppo in serie di potenze di

$$\frac{1}{1-z} \frac{1}{1-z^2} \cdots \frac{1}{1-z^{k-1}} (1+z^k)$$

o, equivalentemente, di

$$P_k(z) := \frac{1}{1-z} \frac{1}{1-z^2} \cdots \frac{1}{1-z^{k-1}} \frac{1}{1-z^k}.$$

Vediamo ora di essere più precisi.

8.5 (n scatole, nessuna vuota). Cominciamo con il considerare il problema di collocare k oggetti in n scatole, nessuna vuota. Indichiamo con $\text{Coll}(k; n)$ l'insieme di queste collocazioni e con $p(k; n) := |\text{Coll}(k; n)|$. Si pone $p(0; 0) = 1$ e, evidentemente, $p(k; k) = 1 \forall k$ e $p(k; n) = 0$ se $n > k$. Indichiamo poi con $\text{Coll}(k; \leq n)$ l'insieme delle collocazioni di k in n scatole (alcune possono restare vuote) e sia $p(k; \leq n) := |\text{Coll}(k; \leq n)|$. Ovviamente

$$p(k; \leq n) = \sum_{j=0}^n p(k; j). \quad (8.4)$$

Una collocazione di k oggetti indistinti in n scatole indistinte è individuata dal numero di elementi $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ contenuti in ciascuna scatola. Essendo la numerazione delle scatole arbitraria, possiamo supporre che $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 1$.

La funzione $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \rightarrow (\lambda_1 - 1, \lambda_2 - 1, \dots, \lambda_n - 1)$, che consiste nel togliere un oggetto in ogni scatola, è una bigezione di $\text{Coll}(k; n)$ su $\text{Coll}(k - n; \leq n)$, perché se $k = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$, allora $k - n = (\lambda_1 - 1) + \dots + (\lambda_n - 1)$ e $\lambda_i - 1 = 0$ tutte le volte che $\lambda_i = 1$. Pertanto

$$p(k; n) = p(k - n; \leq n), \quad (8.5)$$

e, dalla (8.4),

$$p(k; n) = p(k - n; \leq n) = \sum_{j=0}^n p(k - n; j) \quad k \geq 1, \quad 1 \leq n \leq k.$$

Scrivendo la stessa formula con $k - 1$ e $n - 1$ al posto rispettivamente di k e n , e sottraendo le due formule, si ottiene

$$p(k; n) = p(k - 1; n - 1) + p(k - n; n) \quad (8.6)$$

e quindi la ricorrenza

$$\begin{cases} p(k; n) = 0 & \forall n > k, \\ p(k; k) = 1 & \forall k \geq 1, \\ p(0; 0) = 1, \\ p(k; 0) = 0 & \forall k \geq 1, \\ p(k; n) = p(k - 1; n - 1) + p(k - n; n) & \forall k \geq 1, \forall n, 1 \leq n \leq k. \end{cases}$$

che permette di calcolare $\{p(k; n)\}$ riga dopo riga. Non si conosce una formula esplicita per $p(k; n)$.

Proposizione. La funzione generatrice $P(z; n) := \sum_{k=0}^{\infty} p(k; n)z^k$ delle collocazioni di oggetti indistinti in n scatole, nessuna vuota, è

$$P(z; n) := \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0, \\ \frac{z^n}{(1 - z)(1 - z^2) \dots (1 - z^n)} & \text{se } n \geq 1. \end{cases} \quad (8.7)$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	0	1						
2	0	1	1					
3	0	1	1	1				
4	0	1	2	1	1			
5	0	1	2	2	1	1		
6	0	1	3	3	2	1	1	
7	0	1	3	4	3	2	1	1

Figura 8.1. Collocazioni di k oggetti indistinti in n scatole indistinte, nessuna vuota.

Dimostrazione. Dalla (8.6) segue che

$$P(z; n) = zP(z; n-1) + z^n P(z; n) \quad \forall n \geq 1$$

da cui

$$P(z; n) = \frac{z}{1-z^n} P(z; n-1) \quad \forall n \geq 1$$

e, per induzione

$$P(z; n) = \frac{z}{1-z^n} \frac{z}{1-z^{n-1}} \cdots \frac{z}{1-z} P(z; 0).$$

□

8.6 (n scatole, nessun vincolo ulteriore).

Proposizione. Il numero di collocazioni di k oggetti indistinti in n scatole indistinte è

$$p(k; \leq n) := \sum_{j=0}^n p(k; j) \quad (8.8)$$

essendo $\{p(k; j)\}$ dato dalla formula (8.6). Inoltre, la relativa funzione generatrice $P_n(z) := \sum_{k=0}^{\infty} p(k; \leq n) z^k$ ha raggio di convergenza 1 e

$$P_n(z) = \frac{1}{1-z} \frac{1}{1-z^2} \frac{1}{1-z^3} \cdots \frac{1}{1-z^n} = \prod_{j=1}^n \frac{1}{1-z^j}. \quad (8.9)$$

se $n \geq 1$ e $P_n(z) = 1$ se $n = 0$.

Dimostrazione. La (8.8) è ovvia. Poi, dalla definizione di $P_n(z)$ e dalla (8.7)

$$P_n(z) = \sum_{j=0}^n \frac{z^j}{(1-z)(1-z^2) \cdots (1-z^j)} \quad \forall n \geq 1$$

e $P_0(z) = 1$. $P_n(z)$ è perciò manifestamente olomorfa sul disco $|z| < 1$. Dimostriamo ora per induzione su n la (8.9). Si ha evidentemente $P_0(z) = 1$. Inoltre supposto che

$$P_{n-1}(z) = \frac{1}{(1-z) \cdots (1-z^{n-1})},$$

si ha

k	0	1	2	3	4	5	6	7
$p(k)$	1	1	2	3	5	7	11	15

Figura 8.2. Collocazioni di k indistinti in scatole indistinte.

$$\begin{aligned}
 P_n(z) &= \sum_{j=0}^n \frac{z^j}{(1-z)(1-z^2)\cdots(1-z^j)} = P_{n-1}(z) + \frac{1}{(1-z)\cdots(1-z^{n-1})} \frac{z^n}{(1-z^n)} \\
 &= \frac{1}{(1-z)\cdots(1-z^{n-1})} \left(1 + \frac{z^n}{1-z^n}\right) = \frac{1}{(1-z)\cdots(1-z^n)}.
 \end{aligned}$$

□

8.7 (Nessun vincolo).

Proposizione. Il numero di collocazioni di k oggetti indistinti in scatole indistinte è

$$p(k) = p(k; \leq k) \quad (8.10)$$

e la corrispondente funzione generatrice $\sum_{k=0}^{\infty} p(k)z^k$ ha raggio di convergenza 1 e

$$\begin{aligned}
 P(z) &= (1+z+z^2+\cdots)(1+z^2+z^4+\cdots)(1+z^3+z^6+\cdots)\cdots \\
 &= \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{1-z^j}.
 \end{aligned} \quad (8.11)$$

Premettiamo il lemma seguente.

Lemma. La successione di funzioni olomorfe $P_n(z) := \prod_{j=1}^n \frac{1}{1-z^j}$ converge uniformemente sui compatti di $B(0,1)$ alla funzione olomorfa $P(z) := \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{1-z^j}$.

Dimostrazione. Proviamo anzitutto che $P_n(z)$ converge uniformemente sui compatti di $B(0,1)$. Per questo, se proviamo che la serie

$$\sum_{j=1}^n \log\left(\frac{1}{1-z^j}\right) \quad (8.12)$$

converge totalmente sui cerchi di raggi ρ , $\rho < 1$ e quindi uniformemente sui compatti di $B(0,1)$ ad una funzione $S(z)$, allora

$$P_n(z) = \exp\left(\sum_{j=1}^n \log\left(\frac{1}{1-z^j}\right)\right)$$

converge uniformemente sui compatti in $B(0,1)$ a $P(z) := \exp(S(z))$, che è appunto la definizione di $\prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{1-z^j}$.

Fissiamo ora $\rho < 1$ e proviamo la convergenza uniforme di (8.12) sul cerchio $|z| \leq \rho$ a $P(z)$. Basterà provare la convergenza totale del prodotto. Si osserva che, se γ denota la curva $\gamma(t) := 1 - ts$, $0 < t < 1$, si ha per $|s| < 1$

$$\left|\log\frac{1}{1-s}\right| = |\log(1-s)| = |\log(1-s) - \log 1| = \left|\int_{\gamma} \frac{1}{w} dw\right| \leq \frac{|s|}{1-|s|}$$

da cui si ottiene per ogni z con $|z| \leq \rho < 1$,

$$\left| \log \frac{1}{1-z^j} \right| \leq \frac{|z|^j}{1-|z|^j} \leq \frac{|z|^j}{1-|z|} \leq \frac{\rho^j}{1-\rho}$$

e in conclusione

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left\| \log \frac{1}{1-z^j} \right\|_{\infty, B(0, \rho)} \leq \frac{1}{1-\rho} \sum_{j=1}^{\infty} \rho^j = \frac{\rho}{(1-\rho)^2} < +\infty.$$

Infine, $P(z)$ è olomorfa perché il limite uniforme di funzioni olomorfe è olomorfo. □

Dimostrazione del Teorema precedente. Abbiamo già osservato all'inizio della sezione che $p(k)$ è il coefficiente k -esimo dello sviluppo di $p_k(z)$, i.e., $p_k(z) = p(k; \leq k)$, Resta da provare la (8.11).

Sia $P_n(z) = \sum_{j=0}^{\infty} p(j; \leq n)z^j$ la funzione generatrice delle collocazioni in n scatole data dalla (8.9) e sia

$$P(z) := \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{1-z^j}.$$

Il Lemma precedente assicura che $P(z)$ è olomorfa in $B(0, 1)$, e dunque $P(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^j$ se $|z| < 1$; inoltre, il Lemma precedente assicura che $P_n(z)$ converge a $P(z)$ per $n \rightarrow \infty$ uniformemente sui compatti di $B(0, 1)$. Pertanto dalla (2.1) $p(j; \leq n) \rightarrow c_j$ per $n \rightarrow \infty$. D'altra parte è ovvio che $p(j; \leq j) = p(j; \leq n)$ per ogni $n \geq j$ e quindi $c_j = p(j; \leq j)$ per ogni j . La tesi è così dimostrata. □

8.8 (In scatole contenenti al più n oggetti). Come si è detto ogni collocazione di oggetti indistinti in scatole indistinte si può vedere come una collocazione degli stessi oggetti in scatole distinte T_1, T_2, T_3, \dots , contenenti rispettivamente multipli di $1, 2, 3, \dots$ elementi. Pertanto, la proprietà moltiplicativa delle collocazioni in scatole distinte implica che la funzione generatrice relativa delle collocazioni in scatole contenenti al più n oggetti è il prodotto di

$$\begin{aligned} 1 + z + z^2 + z^3 + \dots &= \frac{1}{1-z}, \\ 1 + z^2 + z^4 + z^6 + \dots &= \frac{1}{1-z^2}, \\ 1 + z^3 + z^6 + z^9 + \dots &= \frac{1}{1-z^3}, \\ &\dots \\ 1 + z^n + z^{2n} + \dots &= \frac{1}{1-z^n}, \\ &1, \\ &1, \\ &\dots \end{aligned}$$

i.e.,

$$P_n(z) = \frac{1}{(1-z)(1-z^2)\dots(1-z^n)}. \tag{8.13}$$

Confrontando le (8.9) e (8.13) si conclude sorprendentemente che

Proposizione. *Il numero di collocazioni di k oggetti*

o in al più n scatole, $p(k; \leq n)$,

◦ *in scatole contenenti al più n oggetti*

è lo stesso.

Una dimostrazione diretta ed elementare del risultato precedente utilizza lo strumento dei *diagrammi di Ferrer*. Supponiamo di avere una collocazione di k oggetti in n scatole, tutte non vuote, contenenti rispettivamente $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ oggetti. Non è restrittivo ordinare le scatole in modo che $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 1$. Il diagramma di Ferrer di questa collocazione riporta sul primo rigo λ_1 punti, sul secondo λ_2 punti, ecc.. Ad esempio il diagramma di Ferrer per la collocazione di $(5, 4, 3)$ di 12 oggetti in tre scatole, è



Il diagramma trasposto è il seguente



e corrisponde alla collocazione $(3, 3, 3, 2, 1)$, che è una collocazione in cui ogni scatola ha al più tre elementi e una scatola almeno ne contiene tre. Denotiamo con λ^* la collocazione il cui diagramma di Ferrer è il trasposto di quello della collocazione λ . La mappa $\lambda \mapsto \lambda^*$ è una bigezione tra le collocazioni in n scatole, nessuna vuota, e le collocazioni in scatole contenenti non più di n oggetti con almeno una scatola che ne contiene n . Ed è anche una bigezione tra le collocazioni in n scatole, il cui numero è $p(k; \leq n)$, e le collocazioni in scatole con non più di n per scatola. Perciò $p(k; \leq n)$ è anche il numero delle collocazioni di k indistinti in scatole indistinte con non più di n per scatola, i.e., la tesi del Corollario precedente.

8.d Decomposizioni o partizioni di interi

Dato un intero k in quanti modi lo si può decomporre come somma di n interi (maggiori o uguali a 1)? Abbiamo già calcolato il numero delle *liste* (i_1, i_2, \dots, i_n) tali che $i_1 + \dots + i_n = k$, cfr. (7.1). Qui si considera le decomposizioni a meno dell'ordine. Ad esempio le uniche decomposizioni possibili per 4 sono

$$\begin{aligned} 4 &= 4, \\ 4 &= 3 + 1, \\ 4 &= 2 + 2, \\ 4 &= 2 + 1 + 1, \\ 4 &= 1 + 1 + 1 + 1. \end{aligned}$$

Se si identifica l'intero k con il multiinsieme $\{1^k\}$, decomporre un intero k è equivalente a collocare k uni in scatole indistinte (gli slots contenenti le parti di k). Pertanto dalla (8.5) e dalla Proposizione in 8.8 si conclude che

8.9 Proposizione. *Il numero di decomposizioni*

- (i) di k in al più n parti,
- (ii) di $n + k$ in esattamente n parti,
- (iii) di k in parti non superiori ad n

sono $p(k; \leq n)$. La loro funzione generatrice $P_n(z) := \sum_{k=0}^{\infty} p(k; \leq n)z^k$ è olomorfa sul disco $|z| < 1$ e vale

$$P_n(z) = \prod_{j=1}^n \frac{1}{1 - z^j}.$$

Inoltre, il numero di decomposizioni di k è il numero $p(k)$ definito in (8.10) e la corrispondente funzione generatrice $\sum_{k=0}^{\infty} p(k)z^k$ è olomorfa su $|z| < 1$ e vale

$$P(z) = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{1 - z^j}.$$

Con un ragionamento analogo a quello fatto nel paragrafo 8.8, si trovano le seguenti funzioni generatrici per

- la decomposizione di interi in soli pari

$$p(z) = \frac{1}{1 - z^2} \frac{1}{1 - z^4} \cdots = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - z^{2k}}, \quad |z| < 1;$$

- la decomposizione di interi in soli dispari

$$d(z) = \frac{1}{1 - z} \frac{1}{1 - z^3} \cdots = \prod_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1 - z^{2k+1}}, \quad |z| < 1;$$

- la decomposizione di interi in numeri tutti diversi

$$u(z) = (1 + z)(1 + z^2)(1 + z^3) \cdots = \prod_{k=1}^{\infty} (1 + z^k), \quad |z| < 1.$$

In mancanza di formule esplicite, ci si accontenta di qualche relazione tra le varie funzioni generatrici.

8.10 Proposizione. *Si ha $u(z) = d(z)$, i.e., il numero di scomposizioni di interi in interi distinti e in interi dispari sono uguali.*

Dimostrazione. Siano

$$u_n(z) = (1+z)(1+z^2)\dots(1+z^{2^{n-1}}), \quad d_n(z) = \frac{1}{(1-z)(1-z^3)\dots(1-z^{2^n-1})}.$$

Si ha $u_n(z) \rightarrow u(z)$, $d_n(z) \rightarrow d(z)$ applicando il Lemma in 8.7. Inoltre, usando l'identità $(1-z^k)(1+z^k) = 1-z^{2k} \forall k$ si prova per induzione su n che

$$\frac{u_n(z)}{d_n(z)} = (1-z^{2^n})(1-z^{2^{n+2}})\dots(1-z^{4n-2})$$

in particolare, per $z \in \mathbb{R}$ $0 \leq z \leq 1$,

$$\left| \frac{u_n(z)}{d_n(z)} \right| \leq |1-z^{2^n}| \rightarrow 1 \quad \text{per } n \rightarrow \infty,$$

da cui $u(z) = d(z)$ se $z \in \mathbb{R}$, $0 < z < 1$ e quindi per ogni z per l'unicità del prolungamento olomorfo. \square

8.e Collocazioni in Fisica Statistica

In fisica statistica, ogni “particella” può stare in un certo “stato” a cui corrisponde un “livello energetico”. L'energia totale di un sistema di particelle dipende dunque da quante particelle si trovano nei vari stati disponibili e il valor medio dell'energia dipende dalle probabilità che una particella si trovi negli stati possibili. Va dunque valutato il numero di possibili collocazioni delle particelle nei vari stati.

8.11 (Statistica di Maxwell–Boltzmann). Qui le particelle sono distinte e non ci sono limiti alla loro distribuzione nei vari stati. È il caso della fisica statistica classica. Qui, il numero di collocazioni possibili di k particelle in n stati è il numero di collocamenti di k elementi distinti in n scatole distinte, i.e., n^k .

8.12 (Statistica di Bose–Einstein). Qui le particelle sono indistinte e non ci sono limiti alla loro distribuzione nei vari stati. Particelle che hanno questo comportamento si dicono *bosoni*. In questo caso il numero di collocazioni possibili di k particelle in n stati è quello delle collocazioni di k oggetti indistinti in n scatole distinte, i.e.,

$$\binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}.$$

8.13 (Statistica di Fermi–Dirac). Qui le particelle sono indistinte e ci può essere al più una particella in ogni stato (principio di esclusione di Pauli). Particelle che hanno questo comportamento si dicono *fermioni*. In questo caso il numero di collocazioni possibili di k particelle in n stati è il numero di scelte possibili per gli stati che verranno occupati, i.e.,

$$\binom{n}{k}.$$

k oggetti n scatole	Senza vincoli	Al più uno per scatola	Almeno uno per scatola
k oggetti distinti n scatole distinte	n^k	$n! \binom{k}{n}$	$n! S(k, n)$
k oggetti indistinti n scatole distinte	$\binom{k+n-1}{k}$	$\binom{k}{n}$	$\binom{k-1}{n-1}$
k oggetti distinti n scatole indistinte	$\sum_{j=0}^n S(k, j)$	0 o 1	$S(k, n)$
k oggetti indistinti n scatole distinte	$\sum_{j=0}^n p(k, j)$	0 o 1	$p(k; n)$

Figura 8.3. Tabella riassuntiva del conteggio delle collocazioni.

8.f Esercizi

8.14 Esercizio. Calcolare il numero $f_{n,k}$ dei sottoinsiemi $A \subset \{1, \dots, n\}$ di k interi che non contengono due interi successivi. [Sugg. $f_{n,k} = \binom{n-k+1}{k}$.]

8.15 Esercizio. In quanti modi si può cambiare 2 euro in pezzi da 20 e 50 centesimi? [Sugg. Se 10 centesimi è l'unità di base, la funzione generatrice dei cambi in pezzi da 20 e da 50 centesimi sono rispettivamente

$$p_2(z) = 1 + z^2 + z^4 + z^6 + \dots + z^{20},$$

$$p_5(z) = 1 + z^5 + z^{10} + z^{15} + z^{20},$$

e quindi la risposta è il coefficiente di z^{20} nello sviluppo del polinomio $p_2(z)p_5(z)$, i.e., 3. In effetti, i possibili cambi sono i seguenti

$$2 = 10 \times 0.2,$$

$$2 = 5 \times 0.2 + 2 \times 0.5,$$

$$2 = 4 \times 0.5.]$$

8.16 Esercizio. Un sistema fisico consiste di particelle identiche. L'energia totale del sistema è $4E_0$ essendo E_0 una costante positiva. Ogni particella ha un livello energetico pari a $k E_0$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$, e una particella di energia $k E_0$ può occupare uno dei $k^2 + 1$ stati che corrispondono al suo livello energetico. Quante configurazioni il sistema può assumere? Rispondere alla stessa questione nei seguenti due casi (a) al livello energetico $k E_0$ corrispondono $2(k^2 + 1)$ stati, (b) due particelle non possono stare nello stesso stato.

9. Cammini, alberi, parentesi

Cammini su reticoli

9.a Cammini

Consideriamo la griglia dei punti del piano a coordinate intere nonnegative. Se x e y sono interi nonnegativi, un *cammino non decrescente* da $(0,0)$ a (x,y) è una curva che congiunge $(0,0)$ a (x,y) fatta come unione di vettori $D = (1,0)$ e $A = (0,1)$. Ogni cammino non decrescente è descritto dalla lista ordinata ($DAADDA\dots$) dei segmenti che la compongono. La classe dei cammini non decrescenti è perciò in corrispondenza biunivoca con l'insieme delle parole di $x+y$ caratteri presi da un alfabeto binario $\{D, A\}$ con x simboli D e y simboli A , i.e., con le posizioni occupate dai simboli D (o A). Concludiamo

9.1 Proposizione. *I cammini non decrescenti da $(0,0)$ a (x,y) sono in numero di*

$$\binom{x+y}{x}.$$

9.b Cammini di Catalan

Consideriamo la griglia dei punti del piano a coordinate intere non negative e la classe dei cammini non decrescenti da $(0,0)$ a (n,n) contenuti in $\{(x,y) \mid 0 \leq y \leq x\}$. cfr. Figura 9.1. Se ne vuole calcolare la cardinalità C_n . Ovviamente $C_1 = 1$ e, per convenienza, si pone $C_0 = 1$. Sia r un cammino non decrescente contenuto in $\{(x,y) \mid 0 \leq y \leq x\}$. Vi è un *penultimo punto* (k,k) , $0 \leq k \leq n-1$, nel quale r tocca la diagonale (l'ultimo è (n,n)). Il pezzo di cammino precedente (k,k) è un cammino non decrescente r_1 contenuto in $\{(x,y) \mid 0 \leq y \leq x\}$ da $(0,0)$ a (k,k) . Questi cammini sono per definizione in numero di C_k . Il pezzo successivo inizia con un percorso obbligato da (k,k) a $(k+1,k)$ e termina con un altro percorso obbligato da $(n,n-1)$ a (n,n) . Il percorso intermedio r_2 non tocca la diagonale e quindi è contenuto in $\{(x,y) \mid 0 \leq y \leq x-1\}$. È la traslazione di un cammino non decrescente contenuto in $\{(x,y) \mid 0 \leq y \leq x\}$ da $(0,0)$ a $(n-k-1, n-k-1)$. Questi cammini sono in numero di C_{n-1-k} . Poiché k e i due pezzi r_1 e r_2 caratterizzano il cammino r e sono indipendenti, e r è arbitrario, deve essere per ogni $n \geq 1$

$$C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-k-1} = \sum_{i+j=n-1} C_i C_j \quad C_0 = 1, \quad (9.1)$$

formule che permettono di calcolare per induzione $\{C_n\}$.

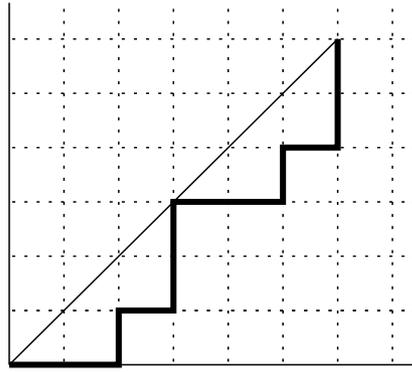


Figura 9.1. Cammini di Catalan.

9.c Numeri di Catalan

La successione $\{C_n\}$ definita dalle formule (9.1) è la cosiddetta successione dei numeri di Catalan, dal cognome del matematico belga E. C. Catalan (1814–1894). Essa interviene nel conteggio di numerose strutture combinatorie. In [8], vol.II, Esercizio 6.19, se ne enumerano 66!

Si conosce sia una formula esplicita che una formula ricorsiva più semplice della (9.1) per $\{C_n\}$. Il secondo membro della (9.1) ricorda il prodotto di convoluzione, cfr. (2.6). Calcoliamo allora la funzione generatrice

$$C(z) := \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$$

di $\{C_n\}$. Si ha

$$\begin{aligned} C_n &= [C(z)]_n \\ \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-1-k} &= [C^2(z)]_{n-1} = [zC^2(z)]_n, \quad n \geq 1 \end{aligned}$$

Le (9.1) si riscrivono come

$$[C(z) - zC^2(z)]_n = 0 \quad \forall n \geq 1$$

da cui

$$C(z) - zC^2(z) = 1$$

essendo $[C(z)]_0 = C_0 = 1$. Risolvendo l'equazione di secondo grado in $C(z)$ e ricordando che $C(z)$ è continua in zero,

$$C(z) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4z}}{2z}.$$

9.2 Proposizione. *Si ha*

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} \quad \forall n \geq 0 \tag{9.2}$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
c_n	1	1	2	5	14	42	132	429	1430	4862	16796	58786	208012

Figura 9.2. Numeri di Catalan c_n all'aumentare di n partendo da $n = 0$.

Dimostrazione. Dalla formula della serie binomiale generalizzata, $\sqrt{1+w} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{1/2}{k} w^k$, segue

$$\frac{1 - \sqrt{1-4z}}{2z} = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \binom{1/2}{k} (-1)^k 4^k z^{k-1} = -\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{1/2}{k+1} (-1)^{k+1} 4^{k+1} z^k$$

e quindi la tesi essendo

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \binom{1/2}{k+1} (-1)^{k+1} 4^{k+1} &= -\frac{1}{2} (-1)^{k+1} 4^{k+1} \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\cdots(\frac{1}{2}-k)}{(k+1)!} \\ &= -\frac{1}{2} (-1)^{k+1} 4^{k+1} \frac{1}{2^{k+1}} \frac{1(-3)(-5)\cdots(1-2k)}{(k+1)!} \\ &= 2^k \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{(k+1)!} = 2^k \frac{(2k)!}{(k+1)! 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2k} \\ &= \frac{(2k)!}{(k+1)!k!} = \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k}. \end{aligned}$$

La formula chiusa per $\{C_n\}$ è così dimostrata. □

Altra dimostrazione della Proposizione 9.2. Tronchiamo C_n calcolando il numero dei cammini nondecrecenti *non contenuti* in $\{(x, y), 0 \leq y \leq x\}$. Se r è uno di questi, c'è un primo punto (k, k) , $0 \leq k \leq n$, in cui la retta $y = x$ viene attraversata. A questo punto il segmento successivo termina in $(k, k+1)$. Siano r_1 e r_2 i due pezzi del cammino r prima e dopo $(k, k+1)$. Il cammino formato dall'unione del simmetrico di r_1 rispetto alla retta $y = x + 1$ e di r_2 è un cammino nondecrecente arbitrario da $(-1, 1)$ a (n, n) , univocamente individuato da r . D'altra parte ogni cammino nondecrecente t da $(-1, 1)$ a (n, n) interseca necessariamente la linea $y = x + 1$ in un punto $(k, k + 1)$ e, se t_1 e t_2 sono i due pezzi del cammino t prima e dopo $(k, k + 1)$, il simmetrico di t_1 rispetto a $y = x + 1$ unito a t_2 è un cammino da $(0, 0)$ a (n, n) non contenuto in $\{(x, y) | 0 \leq y \leq x\}$. Pertanto i cammini nondecrecenti non contenuti in $\{(x, y) | 0 \leq y \leq x\}$ sono tanti quanti i cammini nondecrecenti da $(-1, 1)$ a (n, n) , i.e.,

$$\binom{n+1+n-1}{n+1} = \binom{2n}{n+1}$$

Si conclude quindi che

$$C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \binom{2n}{n} \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}.$$

□

9.3 Proposizione. *I numeri di Catalan $\{C_n\}$ verificano la seguente ricorsione*

$$C_0 = 1, \quad (n+1)C_n = (4n-2)C_{n-1} \quad \forall n \geq 1. \tag{9.3}$$

Dimostrazione. Come abbiamo visto, la funzione generatrice dei numeri di Catalan $C(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$ è

$$C(z) = \frac{1 - \sqrt{1-4z}}{2z}$$

i.e.,

$$2zC(z) - 1 = -\sqrt{1-4z}$$

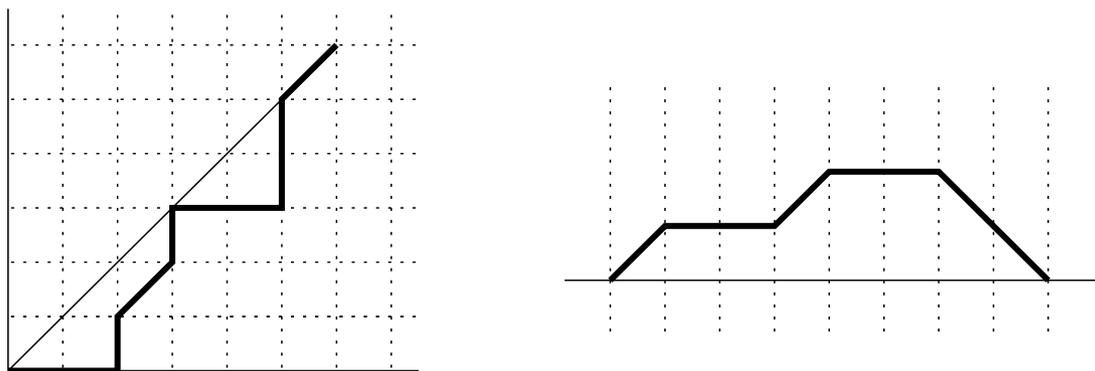


Figura 9.3. Cammini di Schröder.

e derivando

$$(2zC(z) - 1)' = -\frac{-4}{2\sqrt{1-4z}} = \frac{2}{\sqrt{1-4z}} = \frac{2\sqrt{1-4z}}{1-4z} = \frac{2(1-2zC(z))}{1-4z}$$

e cioè $C(z)$ verifica l'equazione lineare del primo ordine (a coefficienti variabili)

$$(1-4z)zC'(z) = (2z-1)C(z) + 1. \quad (9.4)$$

Ora per ogni $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} [C(z)]_n &= C_n, \\ [C'(z)]_n &= (n+1)C_{n+1}, \\ [zC'(z)]_n &= [C'(z)]_{n-1} = nC_n, \\ [z^2C'(z)]_n &= [C'(z)]_{n-2} = (n-1)C_{n-1}, \\ [zC(z)]_n &= [C(z)]_{n-1} = C_{n-1}, \\ [1]_n &= 0, \end{aligned}$$

e dalla (9.4) segue che

$$nC_n - 4(n-1)C_{n-1} = 2C_{n-1} - C_n$$

i.e., la (9.3). □

9.4 Esercizio. Quanti sono i cammini crescenti da $(0,0)$ a (n,n) contenuti in $\{(x,y) \mid 0 \leq y \leq x\}$ che toccano la diagonale $y=x$ solamente in $(0,0)$ e (n,n) ?

Soluzione. Sono tanti quanti i cammini crescenti da $(1,0)$ a $(n,n-1)$ che non passano mai oltre $y=x-1$, i.e., tanti quanti i cammini crescenti da $(0,0)$ a $(n-1,n-1)$ contenuti in $\{(x,y) \mid 0 \leq y \leq x\}$, i.e., C_{n-1} .

9.d Cammini di Schröder

Un *cammino di Schröder* (E. Schröder (1841–1902)) è un cammino sulla griglia dei punti del piano a coordinate intere da $(0,0)$ a (n,n) contenuti in $\{(x,y) \mid 0 \leq y \leq x\}$ unione di vettori $(1,0)$, $(0,1)$ e $(1,1)$, cfr. Figura 9.3.

Per ogni $n \geq 0$ sia S_n il numero di questi cammini. Evidentemente $S_1 = 2$, $S_2 = 5$ e, per comodità, poniamo $S_0 = 1$. Dividiamo la classe A dei cammini di Schröder da $(0,0)$ a (n,n) in due insiemi disgiunti A_1 e $A_2 = A \setminus A_1$ dove A_1 è il sottoinsieme dei cammini di Schröder da $(0,0)$ a (n,n) il cui ultimo tratto va da $(n-1,n-1)$ a (n,n) : i cammini in A_1 sono completamente individuati dal tratto

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
S_n	1	2	6	22	90	394	1806	8558	41586	206098	1037718	5293446 ...

Figura 9.4. Numeri di Schröder S_n all'aumentare di n partendo da $n = 0$.

da $(0, 0)$ a $(n - 1, n - 1)$: è un cammino alla Schröder da $(0, 0)$ a $(n - 1, n - 1)$ e quindi $|A_1| = S_{n-1}$. I cammini in A_2 passano necessariamente per $(n, n - 1)$. Se r è uno di questi, sia (k, k) il penultimo punto in cui r tocca la diagonale $y = x$ (l'ultimo è (n, n)). Deve essere $0 \leq k \leq n - 1$. Siano r_1 e r_2 i due pezzi di r prima e dopo (k, k) . r_1 è un cammino alla Schröder da $(0, 0)$ a (k, k) e questi sono in numero di S_k . Il cammino r quindi prosegue in maniera obbligata da (k, k) a $(k + 1, k)$ e quindi prosegue fino a $(n, n - 1)$ restando sempre sotto la linea $y = x - 1$. Il secondo tratto da $(k + 1, k)$ a $(n, n - 1)$ è dunque equivalente ad un cammino alla Schröder da $(0, 0)$ a $(n - k - 1, 0)$, e questi sono in numero di S_{n-k-1} . Pertanto $|A_2| = \sum_{j=0}^{n-1} S_j S_{n-1-j}$ e in conclusione $\{S_n\}$ verifica la ricorrenza

$$\begin{cases} S_0 = 1, S_1 = 2, \\ S_n = S_{n-1} + \sum_{j=0}^{n-1} S_j S_{n-1-j} \quad \forall n \geq 1. \end{cases} \tag{9.5}$$

Se $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} S_n z^n$, si ha

$$\begin{aligned} S_n &= [S(z)]_n, \\ S_{n-1} &= [S(z)]_{n-1} = [zS(z)]_n, \\ \sum_{j=0}^{n-1} S_j S_{n-1-j} &= [S^2(z)]_{n-1} = [zS^2(z)]_n \end{aligned}$$

per ogni $n \geq 1$ e quindi ricordando che $S_0 = 1$, la (9.5) diventa

$$[S(z)]_n = [zS(z)]_n + [zS^2(z)]_n \quad \forall n \geq 1$$

da cui

$$zS^2(z) + (z - 1)S(z) + 1 = 0,$$

i.e.,

$$S(z) = \frac{1 - z - \sqrt{1 - 6z + z^2}}{2z} \tag{9.6}$$

Infine, procedendo quindi come nella dimostrazione della Proposizione 9.3, si dimostra che

$$z(1 - 6z + z^2)S'(z) = (3z - 1)S(z) + z + 1$$

e dunque per la successione $\{S_n\}$ la ricorrenza

$$\begin{cases} S_0 = 1, S_1 = 2, \\ (n + 1)S_n = 3(2n - 1)S_{n-1} - (n - 2)S_{n-2} \quad \forall n \geq 2. \end{cases} \tag{9.7}$$

9.5 Esercizio. Sulla griglia a coordinate intere, Calcolare il numero E_n di cammini da $(0, 0)$ a $(n, 0)$ unione di segmenti $(1, 1)$, $(1, -1)$ e $(2, 0)$, cfr. Figura 9.3.

9.e Altri esempi

9.6 (Decomposizioni in triangoli). Il seguente problema è stato studiato da Eulero. Si vuole calcolare in quanti *modi* si può dividere un poligono convesso a $n + 2$ lati in triangoli tirando $n - 1$ diagonali che non si intersecano.

Sia t_n il numero di modi cercato. Ovviamente $t_1 = 1$ e $t_2 = 2$. Poniamo $t_0 = 1$. Per $n \geq 2$, siano v_1, \dots, v_{n+2} i vertici del poligono. Fissiamo un lato, ad esempio v_1v_2 . Ogni partizione in triangoli è allora individuata dal terzo vertice v_i del triangolo di estremi v_1v_2 (che può essere uno qualunque tra v_3, \dots, v_{n+2}), dalla partizione del $(i - 1)$ -poligono convesso di vertici v_2, v_3, \dots, v_i (che si può partizionare in t_{i-3} modi (anche se $i = 3$ avendo posto $t_0 = 1$)) e dalla partizione del $(n + 2 + 2 - i)$ -poligono convesso (che si può partizionare in t_{n+2-i} modi (anche se $i = n + 2$ avendo posto $t_0 = 0$)). Pertanto si ha la formula ricorsiva

$$t_n = \sum_{i=3}^{n+2} t_{i-3}t_{n+2-i} = \sum_{\substack{i+j=n-1 \\ i,j \geq 0}} t_i t_j \quad \forall n \geq 2,$$

che, assieme alla $t_0 = 1$ permette di concludere che t_n è l' n -esimo numero di Catalan, $t_n = C_n \forall n \geq 0$.

9.7 (Cammini di Dyck e sistemi regolari di parentesi). Consideriamo la griglia a coordinate intere e la classe \mathcal{D}_n dei cammini da $(0, 0)$ a $(n, 0)$ unione di segmenti $(1, 1)$ e $(1, -1)$. Calcoliamo $D_n := |\mathcal{D}_n|$.

Evidentemente $D_n = 0$ se n è dispari, in quanto i cammini in questione hanno un numero uguale di vettori $(1, 1)$ e $(1, -1)$. Resta da calcolare $\{D_n\}$ quando n è pari, $n = 2p$. La rotazione del piano di 45 gradi intorno all'origine in senso antiorario composta con una omotetia di $1/\sqrt{2}$ trasforma ogni cammino in questione da $(0, 0)$ a $(2p, 0)$ in un cammino da $(0, 0)$ a (p, p) non decrescente e contenuto in $\{(x, y) \mid y \geq x\}$. Pertanto $D_{2p} = C_p$ e in conclusione

$$D_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ è dispari,} \\ C_{n/2} & \text{se } n \text{ è pari.} \end{cases}$$

Se si associa ad ogni vettore $(1, 1)$ la parentesi di apertura “(” e ai vettori $(1, -1)$ la parentesi di chiusura “)”, cfr. Figura 9.5, si ottiene una struttura regolare di n coppie di parentesi, i.e., una parola di $2n$ caratteri costruita con il vocabolario a due simboli $\{(,)\}$ con lo stesso numero n di parentesi aperte e chiuse e per ogni intero $k \leq n$, nella sottostringa dei primi k caratteri compaiono più parentesi aperte che chiuse.

9.8 (Cammini di Catalan e linguaggio di Dyck). La corrispondenza diretta tra cammini di Catalan e strutture di parentesi regolari è ancor più evidente se si osserva che ad ogni cammino crescente da $(0, 0)$ a (n, n) corrisponde una ed una sola parola di $2n$ lettere prese da un alfabeto binario $\{(,)\}$ contenenti n “(” e n “)”. Le parole corrispondenti ai cammini contenuti in $\{(x, y) \mid 0 \leq y \leq x\}$ sono perciò le $2n$ -parole formate da n simboli “(” e n simboli “)” tali che per ogni k la sottoparola formata dai primi k caratteri contine un numero di “(” maggiore del numero di “)”, i.e., una formano una struttura regolare di n coppie di parentesi.

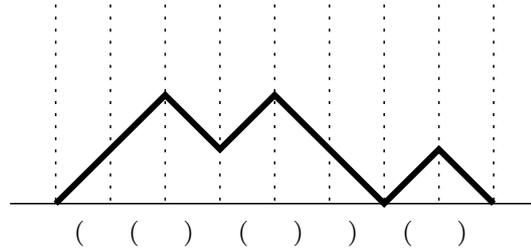


Figura 9.5. Cammini di Dyck.

L'insieme di queste parole è il cosiddetto linguaggio di Dyck. Incidentalmente si osservi che il linguaggio è generato dalle seguenti due regole di produzione

$$\begin{cases} r \longrightarrow \lambda, \\ r \longrightarrow (r)r. \end{cases}$$

Esistono interessanti risultati che legano le regole di produzione e la funzione generatrice delle parole di alcune classi di linguaggi, cfr. [5].

9.9 (Il problema di Ipparco). Scrive Plutarco nel *De Stoicorum repugnantiis*

Dice Crisippo che il numero di proposizioni composte prodotte partendo da 10 proposizioni semplici supera il milione anche se non ha avuto modo di studiare l'argomento a fondo o di parlarne con esperti. Gli aritmetici lo confutano decisamente e in particolare Ipparco (190–127 a.C.) dimostra come Crisippo sia in errore perchè ci sono 103049 proposizioni composte e quelle composte negate non superano 310952.

Ovviamente Crisippo e Ipparco non intendono la stessa cosa per “proposizione composta”.

Nel 1870 H. Schröder pose, e risolse, il problema di calcolare il numero $h(n)$ di modi di rachiudere fra coppie di parentesi una sequenza di n caratteri. È solo nel 1997 che i due problemi vengono accostati e ancora più sorprendentemente, si scopre che il calcolo di Ipparco era esatto, $h(10) = 103049!$

Supponiamo di avere una n -upla di proposizioni (o di caratteri) a_1, \dots, a_n . Quante proposizioni “composte” si possono ottenere raccogliendole tra parentesi in tutti i possibili modi (con al più $n - 2$ coppie di parentesi)? Indichiamo il loro numero con $h(n)$. Naturalmente c'è una sola proposizione composta per $n = 1$ e $n = 2$, i.e., $h(1) = 1$ e $h(2) = 1$. Se $n = 3$, ci sono tre possibili proposizioni composte

$$(abc), ((ab)c), (a(bc)),$$

i.e., $h(3) = 3$ e per $n = 4$ ci sono 11 proposizioni composte,

$$\begin{aligned} &(abcd), \\ &((abc)d), \quad (((ab)c)d), \quad ((a(bc))d) \\ &(a(bcd)), \quad (a((bc)d)), \quad (a(b(cd))), \\ &((ab)(cd)), \\ &((ab)cd), \quad (a(bc)d), \\ &(ab(cd)). \end{aligned}$$

i.e, $h(4) = 11$. Abbiamo evitato di racchiudere tra parentesi le proposizioni elementari. Evidentemente il metodo per la produzione di tutte le proposizioni possibili è iterativo e “ad albero”. Per capire di più come procedere, conviene eliminare le parentesi esterne, comuni a tutti i casi, e reintrodurre le parentesi attorno alle proposizioni elementari ottenendo così per $n = 4$ la seguente tabella

$$\begin{aligned}
 &(a)(b)(c)(d), \\
 &(ab)(c)(d), \\
 &(a)((b)(c))(d), \\
 &(a)(b)((c)(d)), \\
 &((a)(b)(c))(d), \quad (((a)(b))(c))(d), \quad ((a)((b)(c)))(d), \\
 &(a)((b)(c)(d)), \quad (a)((b)(c))(d), \quad (a)((b)((c)(d))), \\
 &((a)(b))((c)(d)),
 \end{aligned} \tag{9.8}$$

Se si guarda a come è stata fatta l’enumerazione delle configurazioni, gli elementi sono divisi in quattro, tre, e due blocchi utilizzando le parentesi (colonna uno della tabella (9.8)), quindi all’interno di ciascun blocco si procede con lo stesso metodo alla suddivisione in blocchi più piccoli. allo stesso modo (colonne successive della tabella (9.8)). Il lettore nota certamente come le configurazioni possibili sono ordinate esattamente come un’albero piano (rami ordinati) con radice e 4 nodi.

Ritornando al conteggio, se al primo livello le proposizioni sono raggruppate in $q \geq 2$ gruppi aventi rispettivamente i_1, i_2, \dots, i_q elementi ($i_1, \dots, i_q \geq 1$), il numero di modi di mettere le parentesi in ciascuno di essi è per definizione rispettivamente $h(i_1), h(i_2), \dots, h(i_q)$. Quindi il numero di modi di mettere le parentesi partendo dalla suddivisione “primaria” (i_1, i_2, \dots, i_q) fissata è

$$h(i_1) h(i_2) \dots h(i_q)$$

e dunque per $k \geq 2$

$$h(k) = \sum_{q=2}^k \left(\sum_{\substack{i_1+i_2+\dots+i_q=k \\ i_1, \dots, i_q \geq 1}} h(i_1) h(i_2) \dots h(i_q) \right) \tag{9.9}$$

dove la somma interna è estesa a tutte le q -uple di interi maggiori o uguali a 1 a somma k .

Il secondo membro della (9.9) è quasi un prodotto di convoluzione iterato, cfr. (2.8), e dunque lo strumento delle funzioni generatrici dovrebbe dare una qualche informazione. Conveniamo di porre $h(0) := 0$ in modo che per $k \geq 2$

$$h(k) = \sum_{k=2}^{\infty} \left(\sum_{\substack{i_1+i_2+\dots+i_q=k \\ i_1, i_2, \dots, i_q \geq 0}} h(i_1) h(i_2) \dots h(i_q) \right)$$

e di chiamare

$$H(z) := \sum_{k=0}^{\infty} h(k)z^k = z + \sum_{k=2}^{\infty} h(k)z^k$$

la relativa funzione generatrice. Si ha allora

$$\begin{aligned}
 H(z) &= z + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\sum_{q \geq 2} \sum_{\substack{i_1+i_2+\dots+i_q=k \\ i_1, i_2, \dots, i_q \geq 0}} h(i_1) h(i_2) \dots h(i_q) \right) z^k \\
 &= z + \sum_{q=2}^{\infty} \left(\sum_{k=2}^{\infty} \left\{ \sum_{\substack{i_1+i_2+\dots+i_q=k \\ i_1, i_2, \dots, i_q \geq 0}} h(i_1) h(i_2) \dots h(i_q) \right\} z^k \right) \\
 &= z + \sum_{q=2}^{\infty} \left(H^q(z) - H^q(0) - (H^q)'(0)z \right) = z + \sum_{q=2}^{\infty} H^q(z)
 \end{aligned}$$

per il Teorema 2.11, cfr. la (2.10). Nell'ultima uguaglianza si è utilizzato $H(0) = 0$ e $q \geq 2$. Pertanto, utilizzando le proprietà della serie geometrica, si arriva all'equazione

$$H(z) = z + \frac{H^2(z)}{1 - H(z)},$$

i.e.,

$$2H^2(z) - (1+z)H(z) + z = 0, \tag{9.10}$$

equazione che risolta da

$$H(z) = \frac{1+z - \sqrt{1-6z+z^2}}{4}. \tag{9.11}$$

Tramite la (9.11) si arriva sia ad una formula esplicita per $h(n)$, che qui tralasciamo, sia ad una formula iterativa per $h(n)$. Infatti, procedendo come nella dimostrazione della Proposizione 9.3 segue dalla (9.11) che

$$(z^2 - 6z + 1)H'(z) = (z - 3)H(z) - z + 1 \tag{9.12}$$

e dunque, passando ai coefficienti della serie di potenze, per $n \geq 2$ si ha

$$(n-1)h_{n-1} - 6nh_n + (n+1)h_{n+1} = h_{n-1} - 3h_n$$

e in definitiva,

$$\begin{cases} h_0 = 0, h_1 = 1, h_2 = 1, \\ (n+2)h_{n+2} = 3(2n+1)h_{n+1} - (n-1)h_n, \quad \forall n \geq 1. \end{cases} \tag{9.13}$$

Confrontando le Figure 9.8 and 9.3 si ha l'impressione che $S_n = 2h_{n+1} \forall n \geq 1$ e infatti è così. Lasciamo al lettore il compito di verificarlo, utilizzando le relative funzioni generatrici.

9.f Alberi su un insieme

Sia A un insieme con $|A| = n$. Un *albero* (*free labelled tree*) su A è un grafo (A, E) semplice, connesso e senza cicli. I punti di A sono perciò distinti (*labelled*) etichettati e si chiamano *vertici* o *nodi* e due nodi sono sempre congiunti da un unico cammino (unione di archi). Il numero di archi che insiste su un nodo è il *grado* del nodo. Un albero, non avendo cicli, ha almeno due nodi con grado 1.

Un albero con radice (*rooted labelled tree*) è un albero in cui uno dei nodi è stato etichettato come radice. Ogni albero a n nodi determina n alberi con radice, essendovi n modi di scegliere la radice dell'albero.

9.10 Teorema (Cayley). *Sia A un insieme con $|A| = n \geq 2$. Gli alberi su A sono in numero di n^{n-2} .*

Dimostrazione. La dimostrazione consiste nel mettere in corrispondenza biunivoca, in particolare nel rappresentare, un albero a n vertici con una $n - 2$ -parola da un alfabeto di n simboli. Diamo qui la costruzione di H. Prüfer (1896-1934) che permette di rappresentare un albero T su A con una parola di $n - 2$ caratteri con lettere prese da A . Non è restrittivo supporre che $A = \{1, \dots, n\}$. Sia T un albero su $\{1, \dots, n\}$. Poniamo $T_1 = T$ e costruiamo una successione di alberi T_2, \dots, T_{n-1} e due sequenze x_1, x_2, \dots, x_{n-1} e y_1, y_2, \dots, y_{n-1} “smontando l’albero” nel modo seguente.

Dato T_i con $n - i + 1$ vertici, $i = 2, \dots, n - 1$, sia x_i il primo vertice monovalente di T_i . Cancelliamo x_i e il ramo $x_i y_i$ da T_i e otteniamo così un albero T_{i+1} con $n - i$ vertici. Si costruisce così la tabella

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_{n-1} \\ \hline y_1 & y_2 & y_3 & \dots & y_{n-1} \end{array} \tag{9.14}$$

dove, ripetiamo, per ogni $k = 1, \dots, n - 1$, x_k è il primo vertice monovalente di T_k e y_k è il vertice di T_k a cui x_k è collegato. Osserviamo che $\{x_1, \dots, x_{n-1}\} = \{1, \dots, n - 1\}$; inoltre, si può scegliere y_{n-1} uguale a y_{n-2} perché l’ultimo albero è un segmento, quindi avente due vertici di cui uno è necessariamente y_{n-2} .

È un fatto che la lista (y_1, \dots, y_{n-2}) , detta *nome* di T , permette di ricostruire la tabella e quindi l’albero T . Infatti, estendiamo la lista a $(y_1, \dots, y_{n-2}, y_{n-2})$ e osserviamo che per ogni $k = 1, \dots, n - 1$, x_k è ovviamente diverso da x_1, \dots, x_{k-1} ed è diverso da y_k, \dots, y_{n-2} essendo un nodo monovalente di T_k . Se ne deduce che x_k è il primo dei vertici non contenuti in $\{x_1, \dots, x_{k-1}\} \cup \{y_k, \dots, y_{n-2}\}$, e dunque è determinato dal nome di T . Siamo pertanto in grado di ricostruire l’albero T a partire dal suo nome.

Abbiamo appena provato che l’applicazione \mathcal{P} che mappa l’albero T sul suo nome $\mathcal{P}(T) := \{y_1, \dots, y_{n-2}\}$ è una mappa iniettiva tra l’insieme degli alberi e l’insieme delle parole di $(n - 2)$ -caratteri scelti in $\{1, \dots, n\}$. È facile ora convincersi che \mathcal{P} è surgettiva, da cui la tesi. \square

9.11 Corollario. *Gli alberi a n nodi con radice sono in numero di n^{n-1} .*

Come vedremo, si può calcolare la funzione generatrice esponenziale degli alberi con radice a n nodi. Per questo osserviamo che se la radice ha k figli, eliminare gli archi che collegano la radice con i suoi figli, e considerare ogni figlio della radice come radice del proprio sottoalbero, produce un insieme di k alberi con radice distinti, distinguibili tra loro i.e., un insieme di alberi, nota come *foresta di alberi con radice*. Quale sia il legame tra la funzione generatrice esponenziale degli alberi con radici e la funzione generatrice esponenziale delle foreste di alberi con radici è un caso particolare di interazioni fra strutture combinatorie.

Su un albero con radice è naturalmente definito un semiordinamento: se x e y sono due nodi dell’albero, $x \preceq y$ se e solo se il cammino che va dalla radice dell’albero a y passa per x . Il numero di archi necessari a raggiungere un nodo dalla radice si chiama la *profondità* o *livello* del nodo. Nodi aventi la stessa profondità si dicono *adiacenti*; nodi immediatamente *successivi* ad un nodo x si dicono anche *figli* del nodo x . I nodi con grado uno che non siano la radice si chiamano anche *foglie* dell’albero. Se la radice ha grado uno, si dice che l’albero è un *albero piantato*. Ci si convince immediatamente che gli alberi a n nodi e una radice sono tanti quanti gli alberi piantati a $n + 1$ nodi e una radice: basta aggiungere un arco alla radice dell’albero.

Vediamo ora una definizione ricorsiva degli *alberi con radice*.

9.12 Definizione. *Sia S un insieme di vertici (quindi punti distinti). Una struttura ad albero su S è la seguente struttura definita ricorsivamente:*

- (i) se $|S| = 1$, $S = \{P\}$, allora $T = \{P\}$,

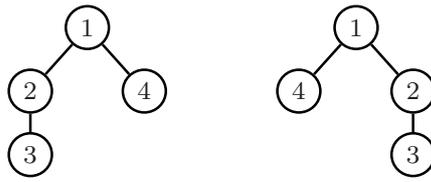


Figura 9.6. Due rappresentazioni nel piano dell'albero $T = \{1, \{2, \{3\}\}, \{4\}\}$.

(ii) altrimenti $S = \{x, T_1, T_2, \dots, T_m\}$ dove $m \geq 1$, $x \in S$ e T_1, \dots, T_m sono alberi su $S \setminus \{x\}$.

x è la radice dell'albero.

Ad esempio un albero su $S = \{1, 2, 3, 4\}$ è $T = \{1, \{2, \{3\}\}, \{4\}\}$
 Per distinguere i due “alberi” in Figura 9.6, si introduce un ordinamento.

9.13 Definizione. Sia S un multiinsieme. Una struttura ad albero ordinato o ad albero piano su S è la struttura così definita:

- (i) Se $S = \{x^1\}$, allora $T = (x)$,
- (ii) Se $|S| > 1$, allora $T = (x, T_1, \dots, T_m)$ dove $m \geq 1$, $x \in S$ e T_1, \dots, T_m sono alberi ordinati su una partizione (S_1, S_2, \dots, S_m) di $S \setminus \{x\}$.

x è la radice dell'albero.

Anche qui, le parentesi aperta e chiusa incrementano e decrementano rispettivamente di uno la profondità. La rappresentazione grafica dell'albero ordinato sul piano utilizza l'ordine da sinistra a destra nel disegnare i successivi elementi della lista. Sugli alberi ordinati, indipendentemente dal tipo di nodi (distinti o indistinti), è definito l'algoritmo *deep-first* che visita tutti i nodi dell'albero ordinato seguendo l'ordine delle parentesi della struttura T da sinistra verso destra.

9.14 Esempio. I due alberi ordinati $T = (1, (2, (3)), (4))$ e $T_2 = (1, (3), (2, (4)))$ sono rappresentati in Figura 9.6.

9.15 (Alberi piani su nodi indistinti). Calcoliamo il numero P_n di alberi piani con radice fissata e n nodi indistinti. Sia T uno di questi alberi. Si elimini il livello più esterno di parentesi e si segua l'elenco delle parentesi da sinistra a destra (algoritmo *deep-first*) facendo corrispondere ad una parentesi aperta un incremento $(1, 1)$ e alla chiusura di una parentesi un incremento $(1, -1)$. Si disegna così sul piano un cammino da $(0, 0)$ a $(2n, 0)$ costituito da segmenti $(1, 1)$

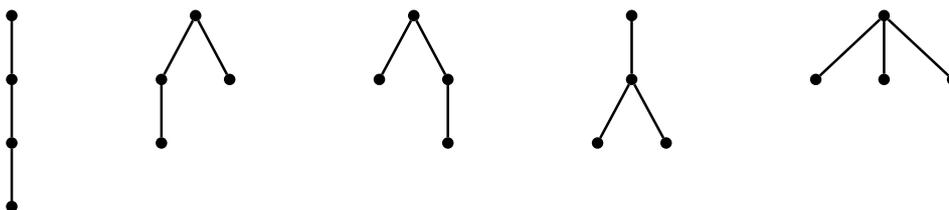


Figura 9.7. I cinque alberi ordinati su 4 nodi indistinti.

e $(1, -1)$ che non attraversa mai l'asse delle x . Evidentemente il metodo deep-first è una corrispondenza biunivoca tra gli alberi ordinati su n nodi indistinti e l'insieme dei cammini di Dyck. Pertanto $P_n = C_n$, l' n -esimo numero di Catalan.

Un modo più diretto di fare il conto è la seguente osservazione. Sia T uno di questi alberi. Spezziamo l'albero in due eliminando l'arco più a sinistra uscente dalla radice. T è allora unione di due alberi ordinati T_1 e T_2 , e la coppia (T_1, T_2) individua univocamente T . Se j è il numero di punti in T_1 , T_1 può cambiare in P_{j-1} modi e T_2 in $P_{n+1-j-1} = P_{n-j}$ modi. Pertanto

$$P_2 = 1, \quad P_n = \sum_{j=1}^n P_{j-1}P_{n-j} = \sum_{j=0}^{n-1} P_jP_{n-1-j} \forall n \geq 2.$$

Segue che $P_1 = 1$ e che $P_n = C_n \forall n \geq 1$.

9.16 (Alberi binari completi su nodi indistinti). Un *albero binario* è un albero ordinato in cui ogni nodo ha al più due figli ($1 \leq m \leq 2$ nella definizione ricorsiva di albero ordinato). Chiaramente ogni nodo interno ha al più due figli e si dimostra che i nodi con grado uno sono due in più che i nodi con grado tre. In un albero binario non ci sono restrizioni al numero di nodi di grado due. Un albero binario si dice *completo* se tutti i nodi escluse le foglie terminali hanno due figli. Il numero di nodi di un albero binario completo è dispari $2n - 1$ e il numero di foglie è n .

Calcoliamo il numero B_n di alberi binari completi con radice fissata e $2n$ nodi indistinti. Evidentemente $B_1 = 1$ $B_2 = 2$. Sia T uno di questi alberi. Cancelliamo i due rami associati alla radice. T si spezza in due alberi binari completi T_1 e T_2 che evidentemente individuano completamente T . Se $2j + 1$, $0 \leq j \leq n - 1$, è il numero di punti di T_1 , T_1 può variare in B_j modi e T_2 in B_{n-j-1} modi, essendo T_2 un albero su $2n + 1 - 2j + 1 - 1 = 2n - 2j - 2 + 1$ nodi. Pertanto

$$B_1 = 1, \quad B_n = \sum_{j=0}^{n-1} B_j B_{n-1-j} \quad n \geq 1.$$

Segue $B_0 = 1$ e $B_n = C_n$ l' n -esimo numero di Catalan per ogni $n \geq 0$.

Per ulteriori informazioni sulla combinatorica delle strutture ad albero, si veda, ad esempio, il volume II di [8].

9.g Strutture combinatorie

Supponiamo di avere una struttura combinatoria \mathcal{F} che costruisce oggetti partendo da n punti. Successivamente questi oggetti vengono considerati come punti distinti sui quali si applica un'altra struttura combinatoria \mathcal{G} . La struttura complessiva risultante si chiama *struttura composta* da \mathcal{F} e \mathcal{G} e si indica con $\mathcal{G} \circ \mathcal{F}$.

Una *struttura combinatoria* \mathcal{F} produce un certo numero di oggetti f_n a partire da un insieme di n punti (distinti) e a questa struttura si associa la corrispondente *funzione generatrice esponenziale*

$$Exp_{\mathcal{F}}(z) := \sum_{k=0}^{\infty} f_k \frac{z^k}{k!}$$

Elenchiamo qui alcune delle strutture che abbiamo visto con la rispettiva funzione generatrice esponenziale.

- la struttura ordine (ci sono $k!$ modi di ordinare k elementi), $\frac{1}{1-z}$,
- le estrazioni ordinate in cui conta l'ordine in cui gli oggetti sono estratti, $\frac{1}{1-z}$,
- le collocazioni in n scatole distinte, e^{nz} ,
- il partizionamento, $\exp(e^z - 1)$,
- la struttura insieme o uniforme, $a_k = 1 \forall k$, e^z ,
- la struttura permutazione, $\frac{1}{1-z}$,
- la struttura albero, $\sum_{n=2}^{\infty} k^{k-2} \frac{z^k}{k!}$.

Un ulteriore esempio è la *struttura circolare*, i.e., la messa in ordine circolare degli elementi. Se si hanno k punti, e si parte con un punto dato, si possono sistemare gli altri in $(k - 1)!$ modi e dunque $Exp(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} z^k = -\log(1 - z)$.

9.h Strutture unione

Se ora \mathcal{F} e \mathcal{G} sono due strutture *distinte*, si può costruire la *struttura unione* di \mathcal{F} e \mathcal{G} . Si intende qui che i punti a disposizione vengono suddivisi in una partizione ordinata di due sottoinsiemi e che la struttura \mathcal{F} agisce sui primi e la struttura \mathcal{G} sui secondi. Siano $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \frac{z^k}{k!}$ e $G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \frac{z^k}{k!}$ le funzioni generatrici esponenziali delle strutture \mathcal{F} e \mathcal{G} . Se si hanno k elementi a disposizione, per ogni $j = 0, 1, \dots, k$ ci sono $\binom{k}{j}$ modi di scegliere un sottoinsieme di j elementi, ci sono a_j modi di operare sugli elementi scelti e b_{k-j} modi di operare sui restanti. Pertanto il numero di modi di applicare la struttura unione a k punti è

$$c_k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} a_j b_{k-j} \quad \forall k \geq 0.$$

Segue che la funzione generatrice esponenziale della struttura unione è $\mathcal{F}(z)\mathcal{G}(z)$.

9.17 Esercizio. Una permutazione consiste di un insieme di punti fissi e di una permutazione senza punti fissi sui punti restanti. Pertanto la struttura permutazione è la struttura composta da quella uniforme e dalla permutazione senza punti fissi. In termini di funzioni generatrici, la funzione generatrice esponenziale delle permutazioni è $\frac{1}{1-z}$, quella della struttura uniforme è e^z e se $D(z)$ è la funzione generatrice esponenziale delle permutazioni senza punti fissi, allora

$$\frac{1}{1-z} = e^z D(z), \quad \text{i.e.,} \quad D(z) = \frac{e^{-z}}{1-z}$$

9.i Strutture composte

Supponiamo ora di avere una struttura combinatoria \mathcal{F} che costruisce oggetti partendo da n punti. Successivamente questi oggetti vengono considerati come punti distinti ai quali si applica un'altra struttura combinatoria \mathcal{G} . La struttura complessiva risultante si chiama *struttura composta* da \mathcal{F} e \mathcal{G} e si indica con $\mathcal{G} \circ \mathcal{F}$.

Ad esempio, si può interpretare la struttura partizioni come una struttura composta con due operazioni. Infatti si inizia con la costruzione di sottoinsiemi con almeno un elemento, quindi questi sottoinsiemi vengono a loro volta aggregati a formare un insieme.

Allo stesso modo la struttura *foresta di alberi* è una struttura composta con due operazioni. Si inizia con la costruzione di alberi con radice, quindi si aggregano questi alberi a formare un insieme.

Si ha il seguente importante teorema

9.18 Teorema (Composizione). *Siano \mathcal{F} e \mathcal{G} due strutture combinatorie e $\mathcal{G} \circ \mathcal{F}$ la struttura composta. Siano f_k e g_k rispettivamente il numero di configurazioni prodotte rispettivamente dalle strutture \mathcal{F} e \mathcal{G} partendo da k punti distinti e sia $f_0 = 0$. Allora il numero di configurazioni prodotte da $\mathcal{G} \circ \mathcal{F}$ partendo da k punti distinti è*

$$c_k = \sum_{q=1}^k \frac{g_q}{q!} \sum_{\substack{i_1+i_2+\dots+i_q=k \\ i_1, i_2, \dots, i_q \geq 0}} \binom{k}{i_1 \ i_2 \ \dots \ i_q} f_{i_1} f_{i_2} \dots f_{i_q}. \quad (9.15)$$

per ogni $k \geq 1$. La somma interna è estesa a tutte le partizioni ordinate di k , i.e., alle k -uple di interi nonnegativi tali che $i_1 + \dots + i_q = k$.

Inoltre, se $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_k}{k!} z^k$ e $G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_k}{k!} z^k$ sono le funzioni generatrici di \mathcal{F} e \mathcal{G} e se $F(0) = f_0 = 0$, allora la funzione generatrice esponenziale della struttura composta $\mathcal{G} \circ \mathcal{F}$ è

$$\text{Exp}_{\mathcal{G} \circ \mathcal{F}}(z) = \text{Exp}_{\mathcal{G}}(\text{Exp}_{\mathcal{F}}(z)) = G(F(z)). \quad (9.16)$$

Dimostrazione. Fissiamo $k \geq 1$, $1 \leq q \leq k$, e sia (i_1, \dots, i_q) una partizione ordinata di k in q parti, $i_1 + i_2 + \dots + i_q = k$ in interi *positivi*. Ci sono

$$\binom{k}{i_1 \ \dots \ i_q} = \frac{k!}{i_1! i_2! \dots i_q!}$$

modi di collocare k oggetti in q scatole distinte con i_1 elementi nella prima, i_2 nella seconda, etc.; e, essendo i numeri i_j tutti positivi, ci sono

$$\frac{1}{q!} \binom{k}{i_1 \ \dots \ i_q} = \frac{1}{q!} \frac{k!}{i_1! i_2! \dots i_q!}$$

modi di partizionare un insieme di k punti in q sottoinsiemi in cui uno ha i_1 elementi, un'altro i_2 elementi, ecc. Essendo f_{i_j} il numero di configurazioni prodotte dalla struttura \mathcal{F} su i_j elementi, il numero di configurazioni prodotte dalla struttura \mathcal{F} su k punti suddivisi in q gruppi distinti è

$$\begin{aligned} d_q &:= \frac{1}{q!} \sum_{\substack{i_1+\dots+i_q=k \\ i_j \geq 1 \forall j}} \binom{k}{i_1 \ i_2 \ \dots \ i_q} f_{i_1} f_{i_2} \dots f_{i_q} \\ &= \frac{1}{q!} \sum_{\substack{i_1+\dots+i_q=k \\ i_1, \dots, i_q \geq 0}} \binom{k}{i_1 \ i_2 \ \dots \ i_q} f_{i_1} f_{i_2} \dots f_{i_q} \end{aligned}$$

l'uguaglianza è dovuta all'ipotesi $f_0 = 0$. D'altra parte g_q è il numero di configurazioni che \mathcal{G} produce su q punti, e dunque il numero di configurazioni prodotte dalla struttura composta $\mathcal{G} \circ \mathcal{F}$ su k elementi è

$$c_k := \sum_{q=1}^k g_q d_q \quad \forall k \geq 1,$$

i.e., la (9.15). La seconda parte della tesi segue quindi dal Teorema 2.15. □

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
s(n)	0	1	1	3	11	45	197	903	4279	20793	103049	518859	...

Figura 9.8. Numeri $h(n)$ all'aumentare di n partendo da $n = 0$.

9.19 Esercizio. Trovare il generatore esponenziale delle partizioni.

Soluzione. Il generatore esponenziale della struttura sottoinsiemi non vuoti è $e^z - 1$ e il generatore della struttura insieme è e^z . Segue dal Teorema 9.18 che la funzione generatrice delle partizioni è $\exp(e^z - 1)$.

9.20 Esercizio. Sia $RT(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{RT_n}{n!} z^n$, $RT_n = n^{n-1}$, la funzione generatrice esponenziale degli alberi con radice. Si assume che $RT_0 = 0$. Allora la funzione generatrice delle foreste di alberi con radice è

$$FRT(z) = e^{RT(z)}.$$

9.21 (Altra dimostrazione del teorema di Cayley). Vogliamo ora ritrovare il numero di alberi a n nodi con radice $RT_n = n^{n-1}$, usando lo strumento delle funzioni generatrici.

Se ad un albero con radice a $n + 1$ nodi si cancella la radice e i rami che collegano la radice ai suoi figli, quel che resta è una foresta di alberi su n nodi aventi radice i figli della radice dell'albero iniziale. La corrispondenza così definita tra alberi con radice a $n + 1$ nodi e foreste di alberi con radice su n nodi è bigettiva. Pertanto

$$[RT(z)]_n = [FRT(z)]_{n-1} = [zFRT(z)]_n = [ze^{RT(z)}]_n \quad \forall n \geq 0.$$

Ne segue che $RT(z)$ verifica l'equazione $RT(z) = ze^{RT(z)}$, i.e., $RT(z)$ è la funzione inversa della funzione olomorfa z/e^z ,

$$\frac{RT(z)}{e^{RT(z)}} = z \tag{9.17}$$

Pertanto dal teorema di Lagrange, Corollario 2.9, si calcola il numero di alberi con radice su n punti

$$\begin{aligned} RT_n &= n! [RT(z)]_n = n! \frac{1}{n} \left[\frac{z^n}{z^n/e^{nz}} \right]_{n-1} = (n-1)! [e^{nz}]_{n-1} \\ &= (n-1)! \frac{n^{n-1}}{(n-1)!} = n^{n-1}. \end{aligned}$$

Pertanto il numero di alberi liberi su n punti è n^{n-2} , per ogni $n \geq 2$, come già sappiamo.

9.j Esercizi

9.22 Esercizio (Cammini di Motzkin). Sulla griglia dei punti a coordinate interi, un *cammino di Motzkin* è un cammino da $(0, 0)$ a $(n, 0)$ contenuto nel semipiano superiore unione di vettori $(1, 1)$, $(1, -1)$ e $(1, 0)$, cfr. Figura 9.9. Si vuole calcolare il numero M_n di questi cammini. Questi cammini e i numeri $\{M_n\}$ si chiamano *cammini* e *numeri di Motzkin* dal cognome del matematico americano T. S. Motzkin (1908–1970). Anch'essi enumerano numerose strutture combinatorie.

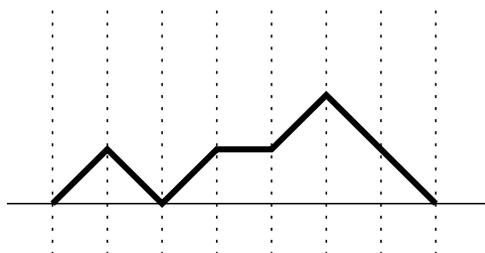


Figura 9.9. Cammini di Motzkin.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
M_n	1	1	2	4	9	21	51	127	323	835	2188	5798 ...

Figura 9.10. Numeri di Motzkin M_n all'aumentare di n partendo da $n = 0$.

Per ogni $n \geq 0$ sia M_n il numero di questi cammini. Evidentemente $M_1 = 1$, $M_2 = 2$ e, per comodità, poniamo $M_0 = 1$. Dividiamo la classe A dei cammini di Motzkin da $(0, 0)$ a (n, n) in due insiemi disgiunti A_1 e A_2 dove Sia A_1 il sottoinsieme dei cammini di Motzkin da $(0, 0)$ a (n, n) che passano per $(n - 1, 0)$: i cammini in A_1 sono completamente individuati dal tratto da $(0, 0)$ a $(n - 1, 0)$: è un cammino alla Motzkin da $(0, 0)$ a $(n - 1, 0)$ e quindi $|A_1| = M_{n-1}$. I cammini restanti passano necessariamente per $(n - 1, 1)$. Se r è uno di questi, sia $(k, 0)$ il penultimo punto in cui r tocca l'asse orizzontale (l'ultimo è $(n, 0)$). Deve essere $0 \leq k \leq n - 2$. Siano r_1 e r_2 i due pezzi di r prima e dopo di $(k, 0)$. r_1 è un cammino alla Motzkin da $(0, 0)$ a $(k, 0)$ e questi sono in numero di M_{k-1} . Il cammino r quindi prosegue in maniera obbligata da $(k, 0)$ a $(k + 1, 1)$ e quindi prosegue fino a $(n - 1, 1)$ restando sempre sopra la linea $y = 1$. Il secondo tratto da $(k + 1, 1)$ a $(n - 1, 1)$ è dunque equivalente ad un cammino alla Motzkin da $(0, 0)$ a $(n - k - 2, 0)$, e questi sono in numero di M_{n-k-2} . Pertanto $\{M_n\}$ verifica la ricorrenza

$$\begin{cases} M_0 = 1, & M_1 = 1, \\ M_n = M_{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} M_k M_{n-2-k} & \forall n \geq 2, \end{cases} \tag{9.18}$$

Se $M(z) = \sum_{n=0}^{\infty} M_n z^n$ è la funzione generatrice dei numeri di Motzkin, si ha per $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} M_n &= [M(z)]_n, \\ M_{n-1} &= [M(z)]_{n-1} = [zM(z)]_n, \\ \sum_{k=0}^{n-2} M_k M_{n-2-k} &= [M^2(z)]_{n-2} = [z^2 M^2(z)]_n \end{aligned}$$

e dunque dalla (9.18)

$$[M(z)]_n = [zM(z)]_n + [z^2 M^2(z)]_n \quad \forall n \geq 2$$

i.e., tenendo conto che $M_0 = 1$ e $M_1 = 1$,

$$M(z) - M_0 - M_1 z = zM(z) - [zM(z)]_0 - [zM(z)]_1 z + z^2 M^2(z)$$

i.e., ricordando che $M_0 = M_1 = 1$,

$$z^2 M^2(z) - (1 - z)M(z) + 1 = 0$$

equazione, che risolta in $M(z)$ dà

$$M(z) = \frac{1 - z - \sqrt{1 - 2z - 3z^2}}{2z^2}. \tag{9.19}$$

Procedendo come nella dimostrazione della Proposizione 9.3 si dimostra che la successione $\{M_n\}$ soddisfa la ricorrenza

$$\begin{cases} M_0 = 1, & M_1 = 1, \\ (n + 2)M_n = (2n + 1)M_{n-1} + 3(n - 1)M_{n-2} & \forall n \geq 2. \end{cases} \tag{9.20}$$

9.23 Esercizio. In quanti modi si può partizionare un insieme a n elementi in cicli.

Soluzione. Evidentemente è il numero delle permutazioni di $\{1, \dots, n\}$, i.e. $n!$. Un'altra dimostrazione è la seguente. Ci sono $(k-1)!$ modi di costruire un ciclo di k elementi. Il generatore esponenziale dei cicli è perciò

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-1)!}{k!} z^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} z^k = -\log(1-z).$$

La partizione in cicli è un insieme di cicli, e la struttura insieme ha come generatore esponenziale $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k = e^z$. Pertanto la funzione generatrice esponenziale della partizione in cicli è

$$\exp(-\log(1-z)) = \frac{1}{1-z}$$

i.e. il generatore esponenziale delle permutazioni.

9.24 Esercizio. In quanto modi h_n si possono disporre n persone in file lineari e queste file in cerchio?

Soluzione. Ci sono $n!$ modi di disporre n persone in fila indiana; il generatore esponenziale è

$$F(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n!} z^n = \frac{z}{1-z}.$$

Ci sono poi $(n-1)!$ modi di disporre n persone in cerchio. Il corrispondente generatore esponenziale è

$$G(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{n!} z^n = -\log(1-z)$$

Pertanto il generatore esponenziale della struttura composta è

$$H(z) = G(F(z)) = -\log\left(1 - \frac{z}{1-z}\right) = -\log(1-2z) + \log(1-z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - 1}{n} z^n$$

e il numero cercato è $h_n = (2^n - 1)(n-1)!$.

9.25 Esercizio. n bambini si dispongono in cerchi con in ogni cerchio un bambino al centro. In quanti modi possono disporsi?

Soluzione. Sia f_n il numero dei modi in cui n bambini possono disporsi in cerchio con uno al centro. Il bambino in centro è uno degli n e gli altri $n-1$ si possono disporre in cerchio in $(n-2)!$ modi. Pertanto $f_n = n(n-2)!$ e il generatore esponenziale della struttura è

$$F(z) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-2)!}{n!} z^n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1} z^n = -z \log(1-z).$$

Questi cerchi di bambini vengono poi messi insieme a fare un insieme di cerchi. La struttura insieme ha come funzione generatrice esponenziale la funzione $G(z) = e^z$. Pertanto dal Teorema 9.18 la funzione esponenziale della struttura composta è

$$e^{F(z)} = (1-z)^{-z}$$

il numero cercato è

$$n! \left[e^{F(z)} \right]_n.$$

9.26 Esercizio (Operazioni binarie non associative). In quanti modi è possibile eseguire una operazione binaria non associativa su n numeri ordinati, $n \geq 2$?

Soluzione. Una domanda equivalente è in quanti modi si possono mettere le parentesi tra x_1, x_2, \dots, x_n per fare il calcolo? Indichiamo l'operazione come una moltiplicazione binaria. Se i numeri sono due c'è un solo modo di procedere. Se i numeri sono tre, x, y e z allora ci sono due modi di procedere: $x(yz)$ e $(xy)z$. Per quattro numeri, ci sono 5 modi di procedere: $(x(yz))t, ((xy)z)t, (xy)(zt), x((yz)t), x(y(zt))$. Se i numeri sono $vxnxn$. Sia d_n il numero cercato.

Allora $d_2 = 1, d_3 = 2, d_4 = 5$. Si osserva che l'operazione più esterna avviene tra due gruppi (x_1, x_2, \dots, x_j) e (x_{j+1}, \dots, x_n) per qualche $j = 1, \dots, n-1$. Sul primo gruppo si può operare in d_j modi e sul secondo gruppo di variabili (x_{j+1}, \dots, x_n) si può operare in d_{n-j} modi. Pertanto

$$d_n = \sum_{j=1}^{n-1} d_j d_{n-j} \quad \forall n \geq 2$$

da cui segue per cominciare che $d_1 = 1$ essendo $d_2 = 1$. Se ora $x_n := d_{n+1}$, allora $x_0 = 1, x_1 = 1$ e

$$x_n = d_{n+1} = \sum_{j=1}^n d_j d_{n+1-j} = \sum_{j=1}^n x_{j-1} x_{n-j} = \sum_{j=0}^{n-1} x_j x_{n-1-j}, \quad \forall n \geq 1$$

i.e., x_n è l' n -esimo numero di Catalan per ogni $n \geq 1$, i.e., $d_n = C_{n-1}$ per ogni $n \geq 2$.

9.27 Esercizio (Decomposizione in settori). Dato un poligono convesso, disegniamo corde senza che queste si intersechino tra loro. Mostrare che il numero di modi di farlo è l' n -esimo numero di Motzkin M_n .

9.28 Esercizio. Siano $T(z), RT(z), FRT(z)$ e $FT(z)$ le funzioni generatrici esponenziali rispettivamente degli alberi liberi (i.e., senza radice), degli alberi con radice, delle foreste di alberi con radice e delle foreste di alberi liberi. Provare che

$$\begin{aligned} FT(z) &= e^{T(z)}, & FRT(z) &= e^{RT(z)}, & RT(z) &= zT'(z), \\ RT(z) &= ze^{RT(z)}, & FRT(z) &= T'(z). \end{aligned}$$

Dedurre che il numero di alberi liberi su n punti è n^{n-2} e che il numero di foreste di alberi con radice su n punti è $(n+1)^{n-1}$.

Soluzione. Le prime due seguono dal teorema di composizione di strutture. Le equazioni $RT_n = nT_n$ per ogni n implicano che $RT(z) = zT'(z)$. La quarta eguaglianza è la (9.17). Infine dalla seconda e dalla terza eguaglianza segue che $RT(z) = zFRT(z)$ e dunque la quinta eguaglianza. Infine

$$FRT_n = n![FRT(z)]_n = n![T'(z)]_n = n! \frac{T_{n+1}}{n!} = (n+1)^{n-1}.$$

10. Il principio di inclusione-esclusione

10.a La formula di inclusione-esclusione

Una tipico problema del Calcolo delle probabilità è calcolare la probabilità che si verifichi almeno uno in un dato insieme di eventi. La *formula di inclusione-esclusione* riconduce il problema al calcolo della probabilità che più eventi si verifichino contemporaneamente, cosa di solito più semplice a valutarsi.

C'è un ovvio corrispettivo nel calcolo combinatorio: dati un insieme finito X e un elenco di sottoinsiemi A_1, A_2, \dots, A_n di X , calcolare la cardinalità dell'insieme $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$. La *formula di inclusione-esclusione* riconduce il calcolo di $|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n|$ al calcolo delle cardinalità delle intersezioni dei sottoinsiemi A_1, A_2, \dots, A_n .

Se A_1, A_2, \dots, A_n sono sottoinsiemi di X e $I \subset \{1, \dots, n\}$ definiamo

$$A_I := \begin{cases} X & \text{se } I = \emptyset, \\ A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k} & \text{se } I = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}. \end{cases}$$

Infine, ricordiamo che per $A \subset X$, si chiama *funzione caratteristica* di A la funzione $\varphi_A : X \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A, \\ 0 & \text{se } x \notin A. \end{cases}$$

la cui lista immagine è il byte di $|X|$ zeri e uni, con 1 al posto x se $x \in A$ e 0 al posto x se $x \notin A$.

Si verifica subito che

$$\begin{aligned} \varphi_{A^c}(x) &= 1 - \varphi_A(x) & \forall A \subset X, \\ \varphi_{A \cap B}(x) &= \varphi_A(x)\varphi_B(x) & \forall A, B \subset X. \end{aligned} \tag{10.1}$$

10.1 Esempio. Siano $A_1, A_2, A_3 \subset X$. I multiindici di $\{1, 2, 3\}$ sono

$$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}$$

e gli insiemi $A_I, I \subset \{1, 2, 3\}$ sono rispettivamente

$$\begin{aligned} A_{\{\emptyset\}} &= X, & A_{\{1\}} &= A_1, & A_{\{2\}} &= A_2, & A_{\{3\}} &= A_3, \\ A_{\{1,2\}} &= A_1 \cap A_2, & A_{\{2,3\}} &= A_2 \cap A_3, & A_{\{1,3\}} &= A_1 \cap A_3, \\ A_{\{1,2,3\}} &= A_1 \cap A_2 \cap A_3. \end{aligned}$$

10.2 Proposizione. Sia X un insieme e $A_1, A_2, \dots, A_n \subset X$. Allora

$$\varphi_{(\cup_{i=1}^n A_i)^c}(x) = \sum_{J \subset \{1, \dots, n\}} (-1)^{|J|} \varphi_{A_J}(x) \quad \forall x \in X. \quad (10.2)$$

Dimostrazione. Dalla formula di De Morgan

$$\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^n A_i^c$$

si ottiene

$$\begin{aligned} \varphi_{(\cup_{i=1}^n A_i)^c}(x) &= \varphi_{\cap_{i=1}^n A_i^c}(x) = \varphi_{A_1^c}(x) \varphi_{A_2^c}(x) \cdots \varphi_{A_n^c}(x) \\ &= (1 - \varphi_{A_1}(x))(1 - \varphi_{A_2}(x)) \cdots (1 - \varphi_{A_n}(x)) \\ &= 1 + \sum_{k=1}^n \sum_{\{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, n\}} (-1)^k \varphi_{A_{i_1}}(x) \varphi_{A_{i_2}}(x) \cdots \varphi_{A_{i_k}}(x) \\ &= \varphi_X(x) + \sum_{k=1}^n (-1)^k \sum_{\{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, n\}} \varphi_{A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}}(x) \\ &= \varphi_{A_\emptyset}(x) + \sum_{k=1}^n (-1)^k \sum_{\substack{J \subset \{1, \dots, n\} \\ |J|=k}} \varphi_{A_J}(x) = \sum_{J \subset \{1, \dots, n\}} (-1)^{|J|} \varphi_{A_J}(x). \end{aligned}$$

□

10.3 Teorema. Sia X un insieme e $A_1, A_2, \dots, A_n \subset X$. Vale la formula di inclusione-esclusione o formula di Sylvester

$$\left| \left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right)^c \right| = \sum_{J \subset \{1, \dots, n\}} (-1)^{|J|} |A_J| \quad (10.3)$$

e la

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{\emptyset \neq J \subset \{1, \dots, n\}} (-1)^{|J|-1} |A_J|. \quad (10.4)$$

Dimostrazione. Sommando le (10.2) al variare di x in X , si ottiene

$$\begin{aligned} \left| \left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right)^c \right| &= \sum_{x \in X} \varphi_{(\cup_{i=1}^n A_i)^c}(x) = \sum_{x \in X} \sum_{J \subset \{1, \dots, n\}} (-1)^{|J|} \varphi_{A_J}(x) \\ &= \sum_{J \subset \{1, \dots, n\}} (-1)^{|J|} \sum_{x \in X} \varphi_{A_J}(x) = \sum_{J \subset \{1, \dots, n\}} (-1)^{|J|} |A_J|. \end{aligned}$$

La seconda formula segue immediatamente. □

10.b La valenza

Se $A_1, A_2, \dots, A_n \subset X$ e $x \in X$, si chiama *valenza* della famiglia A_1, A_2, \dots, A_n in $x \in X$ il numero di sottoinsiemi della famiglia A_1, A_2, \dots, A_n che contengono x ,

$$\text{val}(x) := \left| \left\{ j \mid x \in A_j \right\} \right|.$$

Supponiamo che x abbia valenza k e $x \in A_{p_1} \cap \dots \cap A_{p_k}$. Allora $x \in A_J$ se e solo se $J \subset \{p_1, \dots, p_k\}$. Essendo il numero di sottoinsiemi di j elementi contenuti in $\{p_1, \dots, p_k\}$ pari a $\binom{k}{j}$, si conclude che

$$\begin{aligned} \sum_{|J|=j} \varphi_{A_J}(x) &= \left| \left\{ J \mid |J|=j, x \in A_J \right\} \right| \\ &= \begin{cases} 0 & \text{se } j > \text{val}(x), \\ \binom{\text{val}(x)}{j} & \text{altrimenti.} \end{cases} = \binom{\text{val}(x)}{j} \end{aligned} \quad (10.5)$$

e quindi dalla (10.2)

$$\varphi_{(\cup_{i=1}^n A_i)^c}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{\text{val}(x)}{j} \quad \forall x \in X;$$

segue, sommando su $x \in X$ le (10.5)

$$\sum_{\substack{J \subset \{1, \dots, n\} \\ |J|=j}} |A_J| = \sum_{x \in X} \binom{\text{val}(x)}{j} \quad \forall j = 0, \dots, n. \quad (10.6)$$

Altra dimostrazione del Teorema 10.3. Per ogni $j = 0, \dots, n$ sia

$$E_j := \{x \in X \mid \text{val}(x) = j\}$$

Evidentemente $E_0 = (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n)^c$. Dalla (10.6)

$$s_j := \sum_{\substack{J \subset \{1, \dots, n\} \\ |J|=j}} |A_J| = \sum_{k=0}^n \binom{k}{j} |E_k| \quad \forall j = 0, \dots, n.$$

La formula di inversione per i coefficienti binomiali, cfr. Teorema 3.2, dà allora

$$|E_j| = \sum_{k=0}^n (-1)^{k+j} \binom{k}{j} s_k \quad \forall j = 0, \dots, n.$$

In particolare per $j = 0$ la formula di inclusione-esclusione.

$$|(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n)^c| = |E_0| = \sum_{k=0}^n (-1)^k s_k = \sum_{J \subset \{1, \dots, n\}} (-1)^{|J|} |A_J|.$$

□

10.c Qualche applicazione

Vediamo due applicazioni classiche. Altre applicazioni si trovano tra gli esercizi finali di questo capitolo.

10.4 (Permutazioni senza punti fissi). Ricalcoliamo il numero di permutazioni di n oggetti senza punti fissi,

$$D_n := n! \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{1}{j!}$$

cfr. Paragrafo 4.e, usando il principio di inclusione-esclusione.

Siano \mathcal{P}_n e \mathcal{D}_n rispettivamente l'insieme delle permutazioni e delle permutazioni senza punti fissi. Per $i = 1, \dots, n$, indichiamo con $A_i \subset \mathcal{P}_n$ l'insieme delle permutazioni che tengono fisso i ,

$$A_i = \left\{ \pi \in \mathcal{P}_n \mid \pi(i) = i \right\}.$$

Ovviamente

$$\mathcal{D}_n = (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n)^c$$

e quindi, dalla formula di inclusione esclusione

$$|\mathcal{D}_n| = \sum_{J \subset \{1, \dots, n\}} (-1)^{|J|} |A_J| = \sum_{j=0}^n (-1)^j \sum_{\substack{J \subset \{1, \dots, n\} \\ |J|=j}} |A_J|.$$

Ora A_J è l'insieme delle permutazioni che tengono fissi i punti k_1, k_2, \dots, k_j se $J = (k_1, \dots, k_j)$. Evidentemente, queste sono tante quante le permutazioni degli elementi restanti i.e., $(n - |J|)!$, i.e., $|A_J| = (n - j)!$. Pertanto,

$$|\mathcal{D}_n| = \sum_{j=0}^n (-1)^j (n - j)! \left(\sum_{\substack{J \subset \{1, \dots, n\} \\ |J|=j}} 1 \right) = \sum_{j=0}^n (-1)^j (n - j)! c_j$$

dove c_j è il numero di multiindici J di lunghezza j in $\{1, \dots, n\}$. i.e., di sottoinsiemi di j elementi in $\{1, \dots, n\}$, i.e., $c_j = \binom{n}{j}$. Pertanto

$$|\mathcal{D}_n| = \sum_{j=0}^n (-1)^j (n - j)! c_j = \sum_{j=0}^n (-1)^j (n - j)! \binom{n}{j} = n! \sum_{j=0}^n (-1)^j \frac{1}{j!}.$$

10.5 (Il problema delle cene conviviali). n coppie, n mariti e n mogli ad esempio, si siedono attorno ad un tavolo circolare. L'etichetta vuole che gli uomini e le donne siano alternati e che moglie e marito non siano seduti l'una accanto all'altro. Quante sono le disposizioni possibili?

Sia K_n il numero cercato. Ovviamente se $n = 1, 2$ $K_n = 0$. Se $n = 3$, ci sono $3! = 6$ modi di disporre i mariti e, per ogni disposizione dei mariti, c'è un solo modo di disporre le mogli, in tutto $K_3 = 3! \cdot 1 = 6$. Per $n \geq 4$ si può procedere nel seguente modo. Intanto vi sono $n!$ permutazioni delle posizioni dei mariti. Una volta fissata la disposizione dei mariti, vanno fatte sistemare le signore e quel che va evitato è che marito e moglie siano seduti l'uno accanto all'altra.

Teorema. *Si ha*

$$K_n = n! U_n, \quad U_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{2n}{2n - k} \binom{2n - k}{k} (n - k)! \quad (10.7)$$

Dimostrazione. Non è restrittivo che i posti siano numerati in senso antiorario da 1 a $2n$. Definiamo per $h = 1, 2, \dots, n$

$$A_{2h-1} = \left\{ \text{permutazioni di } \mathcal{P}_n \text{ che obbligano la moglie } h \text{ a sedersi a sinistra del marito } h \right\},$$

$$A_{2h} = \left\{ \text{permutazioni di } \mathcal{P}_n \text{ che obbligano la moglie } h \text{ a sedersi a destra del marito } h \right\}.$$

Evidentemente le disposizioni ammesse sono $(A_1 \cup \dots \cup A_{2n})^c \subset \mathcal{P}_n$. Segue allora dalla formula di inclusione esclusione che

$$U_n = |(A_1 \cup \dots \cup A_{2n})^c| = \sum_{J \subset \{1, \dots, 2n\}} (-1)^{|J|} |A_J| = \sum_{j=0}^{2n} (-1)^j \left(\sum_{\substack{J \subset \{1, \dots, 2n\} \\ |J|=j}} |A_J| \right)$$

e non resta che calcolare A_J .

Se $|J| = j$ e $J = (k_1, \dots, k_j)$ allora $A_J = A_{k_1} \cap \dots \cap A_{k_j}$. Osserviamo che $A_{2h} \cap A_{2h+1}$ e $A_{2n} \cap A_1$ sono vuoti perché le permutazioni in essi contenute obbligherebbero le mogli h e $h+1$ o n e 1 ad occupare la stessa sedia. Anche $A_{2h-1} \cap A_{2h} = \emptyset$ perché le permutazioni contenute obbligherebbero la moglie h a sedersi in due sedie distinte. In definitiva $A_J = \emptyset$ se J contiene due interi successivi nella sequenza $\{1, \dots, 2n, 1\}$. In particolare $A_J = \emptyset$ se $|J| > n$.

Se J invece non contiene due interi successivi nella sequenza $\{1, \dots, 2n, 1\}$, allora ogni permutazione in A_J fissa la posizione delle mogli k_1, k_2, \dots, k_j se $J = (k_1, \dots, k_j)$. Pertanto A_J contiene tante permutazioni quante sono le permutazioni libere delle $n - |J|$ mogli non vincolate, e quindi $|A_J| = (n - |J|)!$. Ricapitolando, se $J \subset \{1, \dots, 2n\}$ e $j = |J|$,

$$|A_J| = \begin{cases} (n - j)! & \text{se } J \text{ non contiene due interi successivi nella lista } \{1, \dots, 2n, 1\}, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Si ha pertanto

$$\begin{aligned} U_n &= \sum_{j=0}^{2n} (-1)^j \left(\sum_{\substack{J \subset \{1, \dots, 2n\} \\ |J|=j}} |A_J| \right) = \sum_{j=0}^n (-1)^j \left(\sum_{\substack{J \subset \{1, \dots, 2n\} \\ |J|=j}} |A_J| \right) \\ &= \sum_{j=0}^n (-1)^j (n - j)! f(2n, j) \end{aligned} \quad (10.8)$$

dove $f(2n, j)$ è il numero di sottoinsiemi $J \subset \{1, \dots, 2n\}$ di lunghezza $|J| = j$ che non contengono due interi successivi nella lista $\{1, \dots, 2n, 1\}$. Segue dal Lemma seguente (10.9) che

$$f_{2n, j} = \frac{2n}{2n - j} \binom{2n - j}{j}.$$

formula che, assieme alla (10.8) dà la tesi. \square

Lemma. Il numero di sottoinsiemi di k elementi di $\{1, \dots, n\}$ che non contengono due interi successivi della successione $(1, \dots, n, 1)$ è

$$f_{n, k} = \frac{n}{n - k} \binom{n - k}{k}. \quad (10.9)$$

Dimostrazione. Ricordiamo che il numero $f_{n, k}$ di sottoinsiemi di k elementi di $\{1, \dots, n\}$ che non contengono due interi successivi è

$$f_{n, k} = \binom{n - k + 1}{k},$$

cfr. Esercizio 8.14. Sia ora S la classe dei sottoinsiemi di k elementi di $\{1, \dots, n\}$ che non contengono due interi successivi della successione $(1, \dots, n, 1)$. Dividiamo S in due classi disgiunte, $S = S_1 \cup S_2$, dove S_1 sono i sottoinsiemi in S che non contengono 1 e S_2 quelli che contengono

1. Ogni sottoinsieme di S_1 è un sottoinsieme di k interi scelti in $\{2, \dots, n\}$ che non contiene due interi successivi. Pertanto $|S_1| = f_{n-1,k}$. D'altra parte un sottoinsieme in S_2 , non contenendo due interi successivi nella lista $(1, 2, 3, \dots, n, 1)$ e contenendo 1 non contiene né 2 né n , ed è individuato dai restanti $k-1$ elementi. Pertanto $|S_2| = f_{n-3,k-1}$ e si conclude che

$$|S| = f_{n-1,k} + f_{n-3,k-1} = \binom{n-1-k+1}{k} + \binom{n-3-k+1+1}{k-1} = \frac{n}{n-k} \binom{n-k}{k}.$$

□

10.d Esercizi

10.6 Esercizio (Funzione di Eulero). Calcolare per ogni intero $n \geq 1$ il numero di interi compresi tra 1 (incluso) e n (escluso) primi con n ,

$$\phi(n) := \left| \left\{ d \mid 1 \leq d \leq n, \text{MCD}(d, n) = 1 \right\} \right|.$$

Soluzione. Scomponiamo n come prodotto di primi $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ con p_1, p_2, \dots, p_k distinti tra loro e osserviamo che se d non è primo con n , allora uno dei p_i divide d . Pertanto, se si pone per ogni $i = 1, \dots, k$

$$A_i := \left\{ d \mid 1 \leq d \leq n, p_i \text{ divide } d \right\}$$

si ha

$$\phi(n) = |(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k)^c|$$

e si può pensare di utilizzare la formula di inclusione esclusione. Ovviamente $A_\emptyset = \{1, \dots, n\}$ e $A_\emptyset = n$. Per ogni i $A_i = \{p_i, 2p_i, \dots, n\}$ da cui $|A_i| = n/p_i$. Analogamente

$$A_{\{i,j\}} = A_i \cap A_j = \{p_i p_j, 2p_i p_j, \dots, n\}$$

e dunque $|A_{\{i,j\}}| = \frac{n}{p_i p_j}$. Più in generale, si ha per ogni $J \subset \{1, \dots, k\}$

$$|A_J| = \frac{n}{\prod_{i \in J} p_i}.$$

Segue dalla formula di inclusione-esclusione che

$$\begin{aligned} \phi(n) &= \sum_{J \subset \{1, \dots, k\}} (-1)^{|J|} |A_J| \\ &= n \left(1 - \sum_i \frac{1}{p_i} + \sum_{i < j} \frac{1}{p_i p_j} - \sum_{i < j < k} \frac{1}{p_i p_j p_k} + \dots + (-1)^k \frac{1}{p_1 p_2 \dots p_k} \right) \quad (10.10) \\ &= n \left(1 - \frac{1}{p_1} \right) \left(1 - \frac{1}{p_2} \right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_k} \right). \end{aligned}$$

10.7 Esercizio (Partizioni ordinate con vincolo dall'alto). Sia $P_{k,n}$ l'insieme delle partizioni ordinate di k in n parti, i.e., l'insieme delle n -uple (x_1, x_2, \dots, x_n) tali che $x_1 + \dots + x_n = k$. Abbiamo visto che $|P_{k,n}| = \binom{n+k-1}{k}$, cfr. Capitolo 9. Fissato $s \geq 0$, calcolare la cardinalità di

$$P_{k,n,s} := \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in P_{k,n} \mid x_i < s \ \forall i\}.$$

Soluzione. Per $i = 1, \dots, n$ definiamo

$$A_i := \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1 + \dots + x_n = k, x_i \geq s\}$$

Evidentemente siamo interessati a calcolare

$$|P_{k,n,s}| = |(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n)^c|$$

e si può pensare di procedere con la formula di inclusione-esclusione.

Ora $A_\emptyset = P_{k,n}$ e $|A_\emptyset| = \binom{n+k-1}{k}$. Ogni partizione ordinata p di $k \in \mathbb{N}$ in n parti può vedersi come un collocamento di k oggetti indistinti in n scatole distinte, cfr. il Paragrafo 8.1. L'operazione di collocamento associata a $p \in A_i$, colloca intanto s oggetti nella scatola i e quindi colloca liberamente i restanti $k-s$ oggetti nelle n scatole. In altre parole

$$|A_i| = |P_{k-s,n}| = \binom{n+k-s-1}{k-s} = \binom{n+k-s-1}{n-1}.$$

Analogamente, per ogni $i, j \in \{1, \dots, n\}$,

$$|A_{\{i,j\}}| = |A_i \cap A_j| = |P_{k-2s,n}| = \binom{n+k-2s-1}{n-1}$$

e procedendo per induzione, se $J \subset \{1, \dots, n\}$ e $|J| = j$,

$$|A_J| = |P_{k-js,n}| = \binom{n+k-js-1}{n-1}.$$

Segue dalla formula di inclusione-esclusione che

$$|P_{k,n,s}| = \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n+k-js-1}{n-1} c_j$$

dove c_j è il numero di sottoinsiemi di $\{1, \dots, n\}$ con j elementi, i.e., $\binom{n}{j}$ e quindi

$$|P_{k,n,s}| = \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n+k-js-1}{n-1} \binom{n}{j} \quad (10.11)$$

10.8 Esercizio. In quanti modi si possono far sedere lungo un tavolo lineare n coppie, marito e moglie ad esempio, senza che marito e moglie stiano vicini. Non ci sono vincoli di alternanza tra marito e moglie.

11. Insiemi parzialmente ordinati e formule di inversione

11.a Insiemi parzialmente ordinati

Un insieme X si dice *parzialmente ordinato* se è data una funzione $\zeta : X \times X \rightarrow \{0, 1\}$ con le seguenti proprietà

- (i) $\zeta(x, x) = 1 \ \forall x \in X$,
- (ii) se per $x, y \in X$ si ha $\zeta(x, y) = 1$ e $\zeta(y, x) = 1$ allora $x = y$,
- (iii) se per x, y e $z \in X$ si ha $\zeta(x, y) = 1$ e $\zeta(y, z) = 1$, allora $\zeta(x, z) = 1$.

Se $\zeta(x, y) = 1$ si usa dire che “ x precede y ” e si scrive $x \preceq y$. Se invece $\zeta(x, y) = 0$ si dice che “ x non precede y ” e si scrive $x \not\preceq y$. Si scrive poi $x \prec y$ se $x \preceq y$ e $x \neq y$. La relazione $x \preceq y$ ha le proprietà di una *relazione d'ordine*

- (i) (*Riflessiva*) $x \preceq x$,
- (ii) (*Antisimmetrica*) se $x \preceq y$ e $y \preceq x$, allora $x = y$,
- (iii) (*Transitiva*) se $x \preceq y$ e $y \preceq z$, allora $x \preceq z$.

e la funzione ζ si chiama *funzione zeta* dell'insieme parzialmente ordinato (X, \preceq) . Si osservi che la relazione d'ordine è solo parziale, nel senso che, se $x \not\preceq y$, non è detto in generale che $y \preceq x$, i.e., se $\zeta(x, y) = 0$, non è detto che $\zeta(y, x) = 1$.

Considereremo insiemi parzialmente ordinati (X, \preceq) *localmente finiti*, i.e., insiemi tali che per ogni $x, y \in X$ con $x \preceq y$, il *segmento*

$$[x, y] := \left\{ u \in X \mid x \preceq u \preceq y \right\}$$

è finito.

Ecco alcuni esempi di insiemi parzialmente ordinati.

- L'insieme delle parti $\mathcal{P}(X)$ di un insieme X è un insieme parzialmente ordinato dalla relazione di inclusione in X : per $A, B \in \mathcal{P}(X)$, “ A precede B ” se $A \subset B$. $(\mathcal{P}(X), \subset)$ è localmente finito se e solo se X è finito. Anche la relazione opposta “ A precede B se $A \supset B$ ” è un ordinamento parziale su $\mathcal{P}(X)$ e anche questa volta $(\mathcal{P}(X), \supset)$ è localmente finito se e solo se X è finito.
- Su ogni albero con radice T si può definire un ordine parziale: se $x, y \in T$, $x \preceq y$ se il cammino che connette la radice con y passa per x . (T, \preceq) è localmente finito se e solo se T è finito.
- La relazione binaria “ d divide n ”, in formula $d \perp n$, definisce un ordine parziale $d \preceq n$ sull'insieme dei naturali positivi \mathbb{N}_+ . (\mathbb{N}_+, \perp) è localmente finito.

11.b Funzione di Möbius

Si chiama *algebra di incidenza* $\mathcal{A}(X)$ di un insieme parzialmente ordinato localmente finito (X, \preceq) la classe di funzioni

$$\mathcal{A}(X) := \left\{ f : X \times X \rightarrow \mathbb{R} \mid f(x, y) = 0 \text{ se } x \not\preceq y \right\}$$

Si definisce poi un prodotto $*$: $\mathcal{A}(X) \times \mathcal{A}(X) \rightarrow \mathcal{A}(X)$ sull'algebra di incidenza ponendo per $f, g \in \mathcal{A}(X)$

$$f * g(x, y) := \sum_{x \preceq u \preceq y} f(x, u)g(u, y).$$

È facile verificare che il prodotto così definito è associativo

$$(f * g) * h = f * (g * h) \quad \forall f, g, h \in \mathcal{A}(X)$$

ed ha elemento unità δ ,

$$f * \delta = \delta * f = f \quad \forall f \in \mathcal{A}(X)$$

data dalla funzione delta di Kronecker

$$\delta(x, y) := \begin{cases} 1 & \text{se } x = y, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

11.1 Proposizione. *Sia (X, \preceq) un insieme parzialmente ordinato localmente finito con funzione zeta $\zeta : X \times X \rightarrow \{0, 1\}$. Allora esiste un'unica funzione $\mu \in \mathcal{A}(X)$, detta funzione di Möbius di (X, \preceq) tale che $\mu * \zeta = \zeta * \mu = \delta$, i.e., esiste un'unica funzione $\mu : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $\mu(x, y) = 0$ se $x \not\preceq y$ e*

$$\sum_{x \preceq u \preceq y} \zeta(x, u)\mu(u, y) = \delta(x, y), \quad \sum_{x \preceq u \preceq y} \mu(x, u)\zeta(u, y) = \delta(x, y). \quad (11.1)$$

μ è caratterizzata dalla seguente formula ricorsiva

$$\mu(x, y) := \begin{cases} 1 & \text{se } x = y, \\ - \sum_{x \preceq u \prec y} \mu(x, u) = - \sum_{x \prec u \preceq y} \mu(u, y) & \text{se } x \prec y, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \quad (11.2)$$

Dimostrazione. Le funzioni μ e $\mu^* \in \mathcal{A}(X)$ definite rispettivamente da

$$\mu(x, y) := \begin{cases} 1 & \text{se } x = y, \\ - \sum_{x \preceq u \prec y} \mu(x, u) & \text{se } x \prec y, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \quad \mu^*(x, y) := \begin{cases} 1 & \text{se } x = y, \\ - \sum_{x \prec u \preceq y} \mu(u, y) & \text{se } x \prec y, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

sono inverse rispettivamente sinistra e destra di ζ

$$\mu * \zeta = \delta, \quad \zeta * \mu^* = \delta.$$

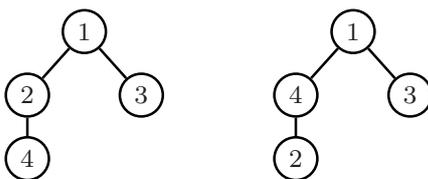


Figura 11.1. I due alberi dell'Esempio 11.3.

Infatti, per $x = y$ si ha $\mu(x, x)\zeta(x, x) = 1$ e $\zeta(x, x)\mu^*(x, x) = 1$ mentre per $x < y$ si ha

$$\mu * \zeta = \sum_{x \preceq u \preceq y} \mu(x, u)\zeta(u, y) = \sum_{x \preceq u \preceq y} \mu(x, u) = \sum_{x \preceq u < y} \mu(x, u) + \mu(x, y) = 0$$

e

$$\zeta * \mu^* = \sum_{x \preceq u \preceq y} \zeta(x, u)\mu^*(u, y) = \sum_{x \preceq u \preceq y} \mu^*(u, y) = \mu^*(x, y) + \sum_{x < u \preceq y} \mu^*(u, y) = 0.$$

Per l'associatività del prodotto μ e μ^* coincidono; infatti,

$$\mu = \mu * \delta = \mu * (\zeta * \mu^*) = (\mu * \zeta) * \mu^* = \delta * \mu^* = \mu^*$$

e sono l'unica funzione inversa (destra e sinistra) di ζ : infatti, se ρ è un'altra inversa destra di ζ , $\zeta * \rho = \delta$, allora

$$\mu = \mu * \delta = \mu * (\zeta * \rho) = (\mu * \zeta) * \rho = \delta * \rho = \rho.$$

□

11.2 Osservazione. Se X è finito, $|X| = n$, sia $\tau : X \rightarrow \{1, \dots, n\}$ una mappa bigettiva. Si associa così ad ogni funzione $f \in \mathcal{A}(X)$ una matrice \mathbf{F} di dimensione $n \times n$ ponendo $\mathbf{F}_j^i := f(u, v)$ se $\tau(u) = i$ e $\tau(v) = j$. È facile convincersi che, se $f, g \in \mathcal{A}(X)$ e \mathbf{F} e \mathbf{G} sono le matrici associate ad f e g mediante τ , allora la matrice associata ad $f * g$ in $\mathcal{A}(X)$ mediante τ è il prodotto \mathbf{FG} righe per colonne. In particolare, la matrice associata alla funzione di Möbius μ è la matrice inversa della matrice associata alla funzione ζ .

Se poi τ è un ordine topologico, i.e., è tale che se $u \preceq v$, allora $\tau(u) \leq \tau(v)$, allora le matrici associate a funzioni $f \in \mathcal{A}(X)$ mediante τ sono triangolari superiori. Questo spiega la somiglianza fra le (11.2) e (1.7).

11.3 Esempio. Le seguenti tabelle descrivono l'ordinamento parziale degli alberi della Figura 11.1 con l'ordinamento top-down.

	1	2	3	4
1	$1 \preceq 1$	$1 \preceq 2$	$1 \preceq 3$	$1 \preceq 4$
2	$2 \not\preceq 1$	$2 \preceq 2$	$2 \not\preceq 3$	$2 \preceq 4$
3	$3 \not\preceq 1$	$3 \not\preceq 2$	$3 \preceq 3$	$3 \not\preceq 4$
4	$4 \not\preceq 1$	$4 \not\preceq 2$	$4 \not\preceq 3$	$4 \preceq 4$

	1	2	3	4
1	$1 \preceq 1$	$1 \preceq 2$	$1 \preceq 3$	$1 \preceq 4$
2	$2 \not\preceq 1$	$2 \preceq 2$	$2 \not\preceq 3$	$2 \not\preceq 4$
3	$3 \not\preceq 1$	$3 \not\preceq 2$	$3 \preceq 3$	$3 \not\preceq 4$
4	$4 \not\preceq 1$	$4 \preceq 2$	$4 \not\preceq 3$	$4 \preceq 4$

Conseguentemente le rappresentazioni matriciali della funzione di Riemann degli alberi in Figura 11.1 utilizzando come indici di riga e di colonna i nomi dei nodi (nell'ordine 1,2,3,4) sono rispettivamente

$$\Sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

le cui inverse sono rispettivamente

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si noti che S_2 e M_2 non sono matrici triangolari superiori. Se si utilizza invece uno degli ordini topologici (1342, 1432, 1423) per ottenere dagli elementi dell'albero gli indici di riga e colonna, le matrici associate alla zeta di Riemann e alla inversa di Möbius sono triangolari superiori. Ad esempio, con l'ordine topologico 1 4 2 3, si ha

$$\Sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad M_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

11.c Esempi di insiemi parzialmente ordinati

La (11.2) permette di calcolare esplicitamente la funzione di Möbius in alcuni casi interessanti.

11.4 (\mathbb{N} con l'ordine naturale). Consideriamo \mathbb{N} come insieme totalmente ordinato dall'ordine naturale. Applicando induttivamente la (11.2)

$$\begin{aligned} \mu(x, x) &= 1, \\ \mu(x, x + 1) &= -\mu(x, x) = -1, \\ \mu(x, x + 2) &= -(\mu(x, x) + \mu(x, x + 1)) = -(1 - 1) = 0, \\ \mu(x, x + 3) &= -(\mu(x, x) + \mu(x, x + 1) + \mu(x, x + 2)) = -(1 - 1 + 0) = 0, \\ &\dots \end{aligned}$$

e, per induzione,

$$\mu(x, y) = \sigma(y - x)$$

dove

$$\sigma(t) := \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \text{ o } t \geq 2, \\ 1 & \text{se } t = 0, \\ -1 & \text{se } t = 1. \end{cases} \quad (11.3)$$

11.5 (Insieme prodotto). Sul prodotto cartesiano $X \times Y$ di due insiemi parzialmente ordinati (X, \preceq_X) e (Y, \preceq_Y) si definisce un ordine parziale $\preceq_{X \times Y}$ ponendo $(a, b) \preceq_{X \times Y} (c, d)$ se $a \preceq_X c$ e $b \preceq_Y d$. La funzione zeta su $X \times Y$ è perciò

$$\zeta_{X \times Y}((a, b), (c, d)) = \zeta_X(a, c)\zeta_Y(b, d).$$

Proposizione. $(X \times Y, \preceq_{X \times Y})$ è localmente finito se (X, \preceq_X) e (Y, \preceq_Y) lo sono e

$$\mu_{X \times Y}((a, b), (c, d)) = \mu_X(a, c)\mu_Y(b, d). \quad (11.4)$$

Dimostrazione. Mostriamo che la funzione $\mu_X(a, c)\mu_Y(b, d)$ è una inversa destra di $\zeta_{X \times Y}$. La tesi segue dalla unicità dell'inversa. Per ogni $a, c \in X$ e $b, d \in Y$ si ha infatti

$$\begin{aligned} & \sum_{(a,b) \preceq (u,v) \preceq (c,d)} \zeta_{X \times Y}((a,b), (u,v)) \mu_X(u, c) \mu_Y(v, d) \\ &= \sum_{\substack{a \preceq u \preceq c \\ b \preceq v \preceq d}} \zeta_X(a, u) \zeta_Y(b, v) \mu_X(u, c) \mu_Y(v, d) \\ &= \left(\sum_{a \preceq u \preceq c} \zeta_X(a, u) \mu_X(u, c) \right) \left(\sum_{b \preceq v \preceq d} \zeta_Y(b, v) \mu_Y(v, d) \right) \\ &= \delta(a, c) \delta(b, d) = \delta((a, b), (c, d)). \end{aligned}$$

□

Un caso interessante è il prodotto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dove ciascun fattore ha l'ordine naturale. Segue da (11.4) che la funzione di Möbius di $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ è

$$\mu((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \mu(x_1, x_2) \mu(y_1, y_2) = \sigma(x_2 - x_1) \sigma(y_2 - y_1). \quad (11.5)$$

dove $\sigma(t)$ è data dalla (11.3).

11.6 (Successioni). Sull'insieme di tutte le successioni a valori interi nonnegativi

$$\mathcal{S} := \left\{ \{x_n\} \mid x_n \geq 0 \forall n \right\}$$

si definisce un ordine parziale ponendo

$$\{x_n\} \preceq \{y_n\} \quad \text{se} \quad x_n \leq y_n \quad \forall n \geq 0$$

E' facile verificare che \mathcal{S} non è localmente finito. Tuttavia il sottoinsieme \mathcal{S}_c di \mathcal{S} delle successioni *definitivamente nulle*

$$\mathcal{S}_c = \left\{ \{x_n\} \in \mathcal{S} \mid \exists n_x \text{ tale che } x_n = 0 \forall n > n_x \right\},$$

è localmente finito. Procedendo per induzione a partire dalla (11.5), si trova che la funzione di Möbius di \mathcal{S}_c è

$$\mu_{\mathcal{S}_c}(\{x_n\}, \{y_n\}) = \prod_{i=1}^{\infty} \sigma(y_i - x_i) \quad (11.6)$$

dove $\sigma(t)$ è data dalla (11.3).

11.7 (Naturali positivi ordinati dalla divisione).

Proposizione. La funzione di Möbius di (\mathbb{N}_+, \perp) è

$$\mu(d, n) = \begin{cases} 1 & \text{se } d = n, \\ (-1)^k & \text{se } \frac{n}{d} \text{ è il prodotto di } k \text{ primi distinti,} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \quad (11.7)$$

Dimostrazione. Il teorema fondamentale dell'aritmetica afferma che ogni numero intero si fattorizza univocamente in prodotto di primi. Se indichiamo con $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$ i primi ordinati in ordine crescente, i.e., $2, 3, 5, \dots$, si afferma che per ogni intero n ,

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$$

dove k e $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ sono interi positivi univocamente determinati da n . Se si estende la k -upla $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ ad una successione definitivamente nulla e si definisce $\psi(n) := (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, 0, 0, \dots)$, il teorema fondamentale dell'aritmetica è equivalente alla biunivocità di $\psi : \mathbb{N}_+ \rightarrow \mathcal{S}_c$. Inoltre la ψ rispetta gli ordinamenti in \mathbb{N}_+ e \mathcal{S}_c , o come si usa dire, ψ è un *isomorfismo* di spazi parzialmente ordinati, i.e.,

$$d \perp n \quad \text{se e solo se} \quad \psi(d) \preceq_{\mathcal{S}_c} \psi(n) \quad \forall d, n \in \mathbb{N}_+.$$

Infatti, se $d = p_1^{\alpha_1} \dots p_h^{\alpha_h}$ e $n = p_1^{\beta_1} \dots p_k^{\beta_k}$, allora d divide n se e solo se $h \leq k$ e $\alpha_i \leq \beta_i$ per ogni $i = 1, \dots, k$, i.e. se e solo se $\{\alpha_n\} \preceq \{\beta_n\}$. Segue che

$$\zeta_{\mathbb{N}_+}(d, n) = \zeta_{\mathcal{S}_c}(\{\alpha_k\}, \{\beta_k\}) \quad \forall d, n \in \mathbb{N}_+$$

e, tenendo conto anche della (11.6)

$$\mu(d, n) = \mu_{\mathcal{S}_c}(\{\alpha_k\}, \{\beta_k\}) = \prod_{i=1}^{\infty} \sigma(\beta_i - \alpha_i). \quad (11.8)$$

D'altra parte, l'uguaglianza

$$\frac{n}{d} = p_1^{\beta_1 - \alpha_1} p_2^{\beta_2 - \alpha_2} \dots p_k^{\beta_k - \alpha_k}$$

implica che le (11.7) e (11.8) sono equivalenti. □

Osservazione. I valori di $\mu(d, n)$ dipendono solo dal rapporto n/d se d divide n ,

$$\mu(d, n) = \bar{\mu}(n/d),$$

essendo $\bar{\mu}(q) : \mathbb{N}_+ \rightarrow \mathbb{Z}$ la *funzione di Möbius classica*

$$\bar{\mu}(q) = \begin{cases} 1 & \text{se } q = 1, \\ (-1)^k & \text{se } q \text{ è il prodotto di } k \text{ primi distinti,} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \quad (11.9)$$

11.8 (Insieme delle parti). Abbiamo già osservato che l'insieme delle parti di un insieme $\mathcal{P}(X)$ è parzialmente ordinato dall'inclusione.

Proposizione. Sia X un insieme finito. La funzione di Möbius di $(\mathcal{P}(X), \subset)$ è

$$\mu(A, B) = (-1)^{|B \setminus A|} \quad \forall A \subset B \subset X.$$

La funzione di Möbius di $(\mathcal{P}(X), \supset)$ è

$$\mu(A, B) = (-1)^{|A \setminus B|} \quad \forall B \subset A \subset X.$$

Dimostrazione. Se $A = B$ $\mu(A, B) = 1 = (-1)^{|\emptyset|}$. Supponiamo ora di aver provato il risultato se $|B \setminus A| = j$ per ogni $j = 0, 1, \dots, n-1$ e proviamolo quando $|B \setminus A| = n$. Per $j = 0, 1, \dots, n-1$, ci sono $\binom{n}{j}$ sottoinsiemi di $|B \setminus A|$ con j punti. Segue dalla (11.2) e dall'ipotesi di induzione

$$\mu(A, B) = - \sum_{A \subset J \subset B} \mu(A, J) = - \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\substack{A \subset J \\ |J|=j}} \mu(A, J) = - \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \binom{n}{j} = (-1)^n \binom{n}{n} = (-1)^n.$$

La prima parte della tesi è così dimostrata. Per la seconda parte si procede in modo analogo o ci si riconduce alla prima. □

11.d Formule di inversione

L'importanza nel calcolo combinatorio della funzione di Möbius è contenuta nelle seguenti *formule di inversione*.

11.9 Proposizione. *Siano (X, \preceq) un insieme parzialmente ordinato, μ la sua funzione di Möbius e $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni.*

- (i) *Se il poset X ha la proprietà che per ogni $y \in X$ l'insieme $V_y := \{x \in X \mid x \preceq y\}$ è finito, allora i sistemi di uguaglianze*

$$g(y) = \sum_{x \preceq y} f(x) \quad \forall y \in X \quad e \quad f(y) = \sum_{x \preceq y} g(x) \mu(x, y) \quad \forall y \in X \tag{11.10}$$

sono equivalenti.

- (ii) *Se il poset X ha la proprietà che per ogni $y \in X$ l'insieme $V_y^* := \{x \in X \mid y \preceq x\}$ è finito, allora i sistemi di uguaglianze*

$$g(y) = \sum_{y \preceq x} f(x) \quad \forall y \in X \quad e \quad f(y) = \sum_{y \preceq x} \mu(y, x) g(x) \quad \forall y \in X \tag{11.11}$$

sono equivalenti.

Dimostrazione. Dimostriamo che la prima delle (11.10) implica la seconda delle (11.10). Si ha

$$\begin{aligned} \sum_{x \preceq y} g(x) \mu(x, y) &= \sum_{x \preceq y} \left(\sum_{u \preceq x} f(u) \right) \mu(x, y) = \sum_{u \preceq y} f(u) \sum_{u \preceq x \preceq y} \mu(x, y) \\ &= \sum_{u \preceq y} f(u) \delta(u, y) = f(y). \end{aligned}$$

Lasciamo al lettore il compito di provare le altre implicazioni. □

11.10 Esempio. Ad esempio per l'insieme totalmente ordinato \mathbb{N} , la prima formula di inversione si riduce alla ovvia osservazione

$$g(n) = \sum_{k=0}^n f(k) \quad \forall n \quad \text{se e solo se} \quad f(n) = g(n) - g(n-1) \quad \forall n.$$

Qualche applicazione

Vediamo ora qualche applicazione classica.

11.e La funzione di Eulero

Ricordiamo che la funzione di Eulero $\phi : \mathbb{N}_+ \rightarrow \mathbb{N}_+$ dà per ogni intero n il numero $\phi(n)$ degli interi compresi tra 1 e $n-1$ coprimi con n .

11.11 Proposizione (Formula di Möbius). *Si ha*

$$\frac{\phi(n)}{n} = \sum_{d \perp n} \frac{\bar{\mu}(d)}{d}. \tag{11.12}$$

Dimostrazione. Per ogni intero d , $1 \leq d \leq n$ sia

$$M_d := \left\{ x \in \{1, \dots, n\} \mid MCD(x, n) = d \right\}$$

Ovviamente $M_d = \emptyset$ se d non divide n e $M_d \cap M_{d'} = \emptyset$ se $d \neq d'$. La famiglia $\{M_d \mid d \perp n\}$ è dunque una partizione di $\{1, \dots, n\}$. Inoltre $MCD(x, n) = d$ se e solo se $MCD\left(\frac{x}{d}, \frac{n}{d}\right) = 1$ e dunque

$$|M_d| = \left| \left\{ q \mid 1 \leq q \leq n, MCD\left(q, \frac{n}{d}\right) = 1 \right\} \right| = \phi\left(\frac{n}{d}\right).$$

Segue che per ogni intero n

$$n = \sum_{d \perp n} |M_d| = \sum_{d \perp n} \phi\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{q \perp n} \phi(q)$$

e dunque dalle formule di inversione per ogni intero n

$$\phi(n) = \sum_{q \perp n} q \mu(q, n) = \sum_{q \perp n} q \bar{\mu}\left(\frac{n}{q}\right) = n \sum_{d \perp n} \frac{\bar{\mu}(d)}{d}.$$

□

11.f Il problema delle collane

Si hanno a disposizione perline di λ colori. Quante collane di n perline si possono fare? Due collane (circolari) si intendono uguali se sono sovrapponibili con una rotazione in senso antiorario.

Ruotando una collana in senso antiorario, si producono numerose parole differenti tra loro. Ad esempio, dalla collana $abcd$ si ricavano quattro parole: $abcd$, $bcda$, $cdab$ e $dabc$ e dalla collana $abab$ si ricavano solo due parole $abab$ e $baba$.

Per maneggiare la complessità introduciamo la nozione di *periodo* di una collana. Si chiama periodo di una collana s la lunghezza del segmento di collana più corto che ripetuto dà s . Ovviamente, se una collana di lunghezza n ha periodo d , allora $d \perp n$ e ad ogni collana di periodo d di lunghezza n corrispondono d parole (distinte) di lunghezza n . E' poi ovvio che ogni parola individua una collana. Se dunque M_d è l'insieme delle collane di periodo d , si ha per ogni intero n

$$\lambda^n = \sum_{d \perp n} d |M_d|$$

e dunque per inversione

$$|M_n| = \frac{1}{n} \sum_{q \perp n} \lambda^q \mu(q, n) = \frac{1}{n} \sum_{q \perp n} \lambda^q \bar{\mu}\left(\frac{n}{q}\right) = \frac{1}{n} \sum_{d \perp n} \bar{\mu}(d) \lambda^{n/d}$$

11.12 Proposizione. Il numero di collane di n perline di λ colori è

$$C_n = \frac{1}{n} \sum_{d \perp n} \phi(d) \lambda^{n/d},$$

$d \mapsto \phi(d)$ è la funzione di Eulero.

Dimostrazione. Si ha, tenendo conto della formula di Möbius (11.12)

$$\begin{aligned} C_n &= \sum_{d \perp n} |M_d| = \sum_{d \perp n} \frac{1}{d} \sum_{q \perp d} \lambda^q \bar{\mu}\left(\frac{d}{q}\right) = \sum_{q \perp n} \sum_{q \perp d \perp n} \frac{1}{d} \bar{\mu}\left(\frac{d}{q}\right) \lambda^q = \sum_{q \perp n} \frac{\lambda^q}{q} \sum_{\frac{d}{q} \perp nq} \frac{\bar{\mu}\left(\frac{d}{q}\right)}{\frac{d}{q}} \\ &= \sum_{q \perp n} \frac{\lambda^q}{q} \frac{\phi\left(\frac{n}{q}\right)}{\frac{n}{q}} = \frac{1}{n} \sum_{q \perp n} \lambda^q \phi\left(\frac{n}{q}\right) = \frac{1}{n} \sum_{d \perp n} \phi(d) \lambda^{n/d}. \end{aligned}$$

□

11.g Polinomi irriducibili in un campo finito

Calcoliamo il numero N_d di polinomi monici irriducibili di grado d sul campo finito F_q .

11.13 Proposizione. *Il numero N_n dei polinomi irriducibili di grado n sul campo finito F_q di ordine q è*

$$N_n = \frac{1}{n} \sum_{d \perp n} \bar{\mu}(d) q^{n/d}. \tag{11.13}$$

Dimostrazione. Calcoliamo la funzione generatrice dei polinomi monici a coefficienti in F_q in due modi distinti. Da una parte il numero di polinomi monici di grado n è q^n e quindi la funzione generatrice dei polinomi monici è

$$\frac{1}{1 - qz}, \quad |z| < \frac{1}{q}.$$

D'altra parte se $\{f_k\}$ è una enumerazione dei polinomi irriducibili su F_q , ogni polinomio P si decompone in modo unico come

$$P = f_1^{\alpha_1} f_2^{\alpha_2} \dots f_k^{\alpha_k} \dots$$

dove $\{\alpha_n\}$ è una successione di numeri nonnegativi definitivamente nulla con il seguente vincolo: se d_1, \dots, d_k, \dots sono i gradi rispettivamente di f_1, \dots, f_k, \dots , allora

$$\alpha_1 d_1 + \alpha_2 d_2 + \dots + \alpha_k d_k + \dots = \deg(P).$$

I polinomi monici di grado n sono dunque tanti quante le decomposizioni *ordinate* di n in una lista di interi (n_1, n_2, \dots) nonnegativi

$$n = n_1 + \dots + n_k + \dots$$

con i vincoli che n_1 sia un multiplo di d_1 , n_2 sia un multiplo di d_2 , ecc. La funzione generatrice delle decomposizioni è dunque, cfr. il Teorema 8.4, il prodotto di

$$\begin{aligned} 1 + z^{d_1} + z^{2d_1} + \dots &= \frac{1}{1 - z^{d_1}}, \\ 1 + z^{d_2} + z^{2d_2} + \dots &= \frac{1}{1 - z^{d_2}}, \\ \dots, \\ 1 + z^{d_k} + z^{2d_k} + \dots &= \frac{1}{1 - z^{d_k}}, \\ \dots \end{aligned}$$

e dunque

$$\frac{1}{1 - qz} = \lim_{k \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^k \frac{1}{1 - z^{d_i}} =: \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1 - z^{d_i}}, \quad |z| < \frac{1}{q},$$

o anche, raccogliendo i fattori uguali,

$$\frac{1}{1 - qz} = \prod_{d=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1 - z^d} \right)^{N_d}, \quad |z| < \frac{1}{q}.$$

Passando ai logaritmi,

$$-\log(1 - qz) = \sum_{d=1}^{\infty} N_d (-\log(1 - z^d)),$$

i.e.,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} q^n \frac{z^n}{n} &= \sum_{d=1}^{\infty} N_d \left(\sum_{h=1}^{\infty} \frac{z^{hd}}{h} \right) = \sum_{d=1}^{\infty} \sum_{d \perp n} d N_d \frac{z^n}{n} \quad (n = hd) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{d \perp n} d N_d \right) \frac{z^n}{n} \end{aligned}$$

da cui per ogni intero n

$$q^n = \sum_{d \perp n} d N_d \tag{11.14}$$

e quindi dalla formula di inversione,

$$N_n = \frac{1}{n} \sum_{d \perp n} \bar{\mu} \left(\frac{n}{d} \right) q^d = \frac{1}{n} \sum_{d \perp n} \bar{\mu}(d) q^{n/d}.$$

□

Una conseguenza della (11.14) è che per ogni intero $n \geq 1$ esiste un polinomio monico irriducibile di grado n a coefficienti in F_q , $q \geq 2$. Infatti, osservando che $\bar{\mu}(1) = 1$ e che per $d \neq 1$ $\bar{\mu}(d) = 0$ o $\bar{\mu}(d) = -1$, si ha dalla (11.14)

$$nN_n = \sum_{d \perp n} \bar{\mu} \left(\frac{n}{d} \right) q^d \geq q^n - \sum_{d=1}^{n-1} q^d = q^n + 1 - \frac{q^n - 1}{q - 1} > 0.$$

11.h Formula di inclusione-esclusione

Diamo un'altra dimostrazione della formula di inclusione-esclusione.

Sia A_1, A_2, \dots, A_n un insieme di n sottoinsiemi di un insieme finito X . Per ogni $I = \{i_1, i_2, \dots, i_n\} \subset \{1, \dots, n\}$, siano

$$A_I := \left\{ x \in X \mid x \in A_i \ \forall i \in I \right\}$$

($A_\emptyset = X$ e

$$B_I := \left\{ x \in A_i \ \forall i \in I \text{ e } x \notin A_i \ \forall i \notin I \right\}$$

Per definizione $B_\emptyset = \bigcap_{i=1}^n A_i^c = \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right)^c$. Si prova facilmente che la famiglia $\{B_I\}_I$ è un ricoprimento di X in parti *disgiunte* e in particolare per ogni $J \subset \{1, \dots, n\}$

$$A_J = \bigcup_{I \supset J} B_I, \quad B_I \cap B_{I'} = \emptyset$$

da cui

$$|A_J| = \sum_{I \supset J} |B_I| \quad \forall J \subset \{1, \dots, n\}. \quad (11.15)$$

Consideriamo l'insieme parzialmente ordinato $(\mathcal{P}(\{1, \dots, n\}), \supset)$. La (11.15) diventa

$$|A_J| = \sum_{I \preceq J} |B_I| \quad \forall J \subset \{1, \dots, n\}$$

e quindi la formula di inversione dà

$$|B_J| = \sum_{I \preceq J} |A_I| \mu(I, J) = \sum_{I \preceq J} (-1)^{|I \setminus J|} |A_I| \quad \forall J \subset \{1, \dots, n\}. \quad (11.16)$$

In particolare,

$$\left| \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right)^c \right| = |B_\emptyset| = \sum_{I \subset \{1, \dots, n\}} (-1)^{|I|} |A_I|$$

i.e., la formula di inclusione-esclusione.

11.i Colorazioni di un grafo

11.14 (Grafo). Un grafo $G = (V, E)$ è una coppia di insiemi: V un insieme di punti, detto l'insieme dei *vertici* o *nodi* del grafo e E un insieme di curve congiungenti i nodi di V , detto l'insieme degli *archi* del grafo. Se x, y sono nodi distinti di un grafo, ed esiste un arco congiungente x e y , si dice che x e y sono *adiacenti*. Nel seguito è sufficiente considerare il caso in cui nodi adiacenti sono collegati da un solo arco. Gli archi si possono allora caratterizzare con la coppia non ordinata dei suoi estremi: si scrive $[x, y]$ per denotare l'arco che congiunge x con y .

Due nodi x e $y \in V$ sono *connessi* se esiste una curva unione di archi in E che congiunge x con y . Un grafo (V, E) si dice *connesso* se ogni coppia di punti $x, y \in V$ è connessa.

Fissato un punto $x_0 \in V$, la *componente connessa* di x_0 è il grafo $G' = (V', E')$ dove $V' \subset V$ è l'insieme di tutti i nodi di V connessi con x_0 e $E' \subset E$ è il sottoinsieme degli archi di E che connettono i punti di V' . Evidentemente ogni grafo G si scompone in componenti connesse e G è connesso se e solo se G ha un'unica componente connessa.

11.15 (Polinomio cromatico). Sia $G = (V, E)$ un grafo. Supponendo di aver a disposizione λ colori. In quanti modi $c(G, \lambda)$ si possono colorare i nodi di V in modo che nodi adiacenti abbiano colori differenti? Il risultato $c(G, \lambda)$ è, come vedremo, un polinomio in λ , detto il *polinomio cromatico* o *polinomio di Birkhoff* del grafo G .

Il caso più semplice è quello in cui $G = (V, \emptyset)$, i.e., il grafo non ha nodi adiacenti. Si può allora colorare ciascun nodo in modo indipendente dagli altri e dunque se $|V| = n$, allora $c(G, \lambda) = \lambda^n$.

All'altro estremo, c'è il caso in cui tutti i nodi sono a due a due adiacenti. In questo caso, se $|V| = n$, le colorazioni possibili sono

$$\max((\lambda)_n, 0) = \begin{cases} \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\cdots(\lambda-n+1), & \text{se } \lambda \geq n \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \quad (11.17)$$

Per un grafo arbitrario $G = (V, E)$, $|V| = n$, la risposta è intermedia

$$\max((\lambda)_n, 0) \leq c(G, \lambda) \leq \lambda^n.$$

È anche chiaro che le colorazioni ammesse delle componenti connesse G_1, \dots, G_k di G sono indipendenti e quindi

$$c(G, \lambda) = \prod_{i=1}^k c(G_i, \lambda).$$

Basterà quindi occuparsi del calcolo della colorazione di grafi connessi.

11.16 (L'algorithmo di Zykov). Il seguente algoritmo dovuto A. A. Zykov permette di individuare il numero di colorazioni cercato. Sia $G = (V, E)$ un grafo. Fissiamo due vertici $a, b \in V$ non adiacenti. e costruiamo i seguenti due grafi: $G^+ = (V, E')$ dove ad E si aggiunge l'arco $[a, b]$ e $G^- = (V', E')$ dove i nodi a e b vengono identificati. G^+ ha un arco in più e G^- un nodo in meno. Ad ogni passo si ha

$$c(G, \lambda) = c(G^+, \lambda) + c(G^-, \lambda) \quad (11.18)$$

perché le colorazioni di G si dividono in quelle per cui a e b hanno lo stesso colore (sono quelle di G^-) e quelle per cui a e b hanno colore diverso (sono quelle di G^+).

Se si sostituisce G^+ e G^- a G e si itera il procedimento, si procede lungo un albero binario i cui nodi terminali sono grafi con nodi a due a due adiacenti e quindi con colorazione definita da (11.17). Risalendo quindi l'albero fino alla radice e usando ad ogni passo la (11.18) per calcolare le colorazioni del grafo nel nodo parente, si trova il numero di colorazioni cercate $c(G, \lambda)$. Per costruzione $c(G, \lambda)$ è un polinomio in λ .

La (11.18) si riscrive anche come

$$c(G^+, \lambda) = c(G, \lambda) - c(G^-, \lambda) \quad (11.19)$$

dove G ha un arco in meno di G^+ e G^- si ottiene da G^+ identificando i due nodi estremi dell'arco tolto a G^+ per ottenere G . La formula di Zykov, scritta nella forma (11.19), procede pertanto "smontando" il grafo.

11.17 (La formula di Rota). Sia $G = (V, E)$ un grafo con $|V| = n$. Supponiamo di aver a disposizione λ colori e sia \mathcal{C} l'insieme delle colorazioni (senza vincoli) possibili dei vertici di G . Ovviamente $|\mathcal{C}| = \lambda^n$.

Sia $\Phi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{P}(E)$ la funzione che alla colorazione $\gamma \in \mathcal{C}$ associa il sottoinsieme $\phi(\gamma) \subset E$ dei lati *monocromatici* per la colorazione γ , e cioè il sottoinsieme dei lati che hanno estremi con lo stesso colore,

$$\phi(\gamma) = \left\{ l \in \mathcal{P}(E) \mid \text{monocromatico} \right\}.$$

Siamo interessati alle colorazioni $\gamma \in \mathcal{C}$ tali che $\phi(\gamma) = \emptyset$.

Per ogni insieme $S \subset \mathcal{P}(E)$, sia

$$A(S) = \phi^{-1}(\{S\}) = \left\{ \gamma \in \mathcal{C} \mid \phi(\gamma) = S \right\}$$

Siamo interessati a calcolare $c(G, \lambda) = |A(\emptyset)|$. Tuttavia, come vedremo, è più semplice calcolare $|A(S)|$ per ogni $S \subset E$!

Per $T \in \mathcal{P}(E)$ sia

$$B(T) := \left\{ \gamma \in \mathcal{C} \mid T \subset \phi(\gamma) \right\}$$

l'insieme delle colorazioni i cui lati monocromatici sono *almeno* quelli contenuti in T . Evidentemente

$$B(T) = \bigcup_{S \supset T} A(S)$$

Essendo gli insiemi $\{A(S)\}$ a due a due disgiunti al variare di S , si ha

$$|B(T)| = \sum_{T \subset S \subset E} |A(S)|. \tag{11.20}$$

Ora $|B(T)|$ è più semplice da calcolare. Infatti, se $\gamma \in A(T)$, γ colora gli estremi dei lati in T con lo stesso colore, e dunque colora in modo uniforme ogni componente connessa di T e, d'altra parte, non ha vincoli sulla colorazione dei nodi in $V \setminus T$. Pertanto, se chiamo con G_T il sottografo di G avente come archi T e come nodi gli estremi degli archi di T , se $c(T)$ e $n(T)$ sono rispettivamente il numero di componenti connessi e di nodi di G_T , allora

$$|B(T)| = \lambda^{c(T)} \lambda^{n-n(T)} \quad \forall T \subset E$$

e dalla (11.20)

$$\lambda^{n-n(T)+c(T)} = \sum_{T \subset S \subset E} |A(S)| \quad \forall T \subset E. \tag{11.21}$$

Per inversione si ottiene dunque la *formula di Rota*

$$|A(T)| = \sum_{T \subset S \subset E} \mu(T, S) \lambda^{n-n(S)+c(S)} = \sum_{T \subset S \subset E} (-1)^{|S \setminus T|} \lambda^{n-n(S)+c(S)}. \tag{11.22}$$

essendo μ la funzione di Möbius dell'insieme parzialmente ordinato $(\mathcal{P}(E), \subset)$. Per $S = \emptyset$ si trova il *polinomio cromatico*

$$c(G, \lambda) = |A(\emptyset)| = \sum_{S \subset E} (-1)^{|S|} \lambda^{n-n(S)+c(S)}.$$

Lasciamo al lettore la verifica che $c(G, \lambda) = \lambda^n - |E| \lambda^{n-1} + \dots$

Si veda per ulteriori informazioni ad esempio M. Cerasoli, F. Eugeni, M. Pro-tasi, *Elementi di Matematica Discreta*, Zanichelli, 1988, Bologna, Capitolo 6.

12. Modelli

Siano N, R insiemi finiti, $\mathcal{F}(N, R)$ la classe delle funzioni $f : N \rightarrow R$, $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}(N, R)$ una classe di funzioni e \sim una relazione di equivalenza su \mathcal{C} . L'insieme delle classi di equivalenza di \mathcal{C} , o equivalentemente l'*insieme quoziente*

$$\mathcal{M} := \mathcal{C} / \sim$$

si chiama anche l'insieme dei *modelli* (*patterns* in inglese) di \mathcal{C} (modulo la relazione di equivalenza \sim).

La teoria seguente fornisce alcune formule utili al calcolo del numero di modelli, i.e., della cardinalità di \mathcal{C} / \sim quando la relazione di equivalenza è prodotta da un *gruppo di permutazioni*. Abbiamo già visto alcuni esempi:

- (i) il *problema delle collane*, i.e., il numero di collane circolari di k palline di λ colori dove due collane si considerano uguali se si possono sovrapporre con una rotazione. cfr. Paragrafo 11.f.
- (ii) le *partizioni* di un insieme in n parti, che abbiamo visto come collocazioni di oggetti distinti in n scatole distinte nessuna vuota modulo le permutazioni dei nomi delle scatole, cfr. Capitolo 7.

12.0.1 Richiami sui gruppi

Sia G un insieme. G si dice un *gruppo* se è definita una operazione $G \times G \rightarrow G$, $(g, h) \rightarrow gh$ con le seguenti proprietà

- (i) (Associatività) $(gh)k = g(hk)$ per ogni $g, h, k \in G$,
- (ii) (Esistenza dell'elemento neutro) $\exists e \in G$ tale che $ge = eg = g \forall g \in G$,
- (iii) (Esistenza dell'inverso) $\forall g \in G \exists h \in G$ tale che $hg = gh = e$.

Usiamo la notazione moltiplicativa per l'operazione di gruppo. Si dimostra immediatamente che

- (i) l'elemento e in (ii), detto *elemento neutro* del gruppo G , è unico;
- (ii) per ogni $g \in G$ l'elemento h in (iii), detto l'inverso di g , è unico e si indica con g^{-1} .

Se G è finito, il numero $|G|$ di elementi di G si chiama anche *ordine* di G .

Un sottogruppo H di G è un sottoinsieme di G che è un gruppo rispetto all'operazione di G . Se $a \in G$, l'insieme $aH := \{ag \mid g \in H\}$ si chiama *classe laterale destra* di a e, $Ha := \{ga \mid g \in G\}$ *classe laterale sinistra* di a . Si dimostra che le classi laterali sinistre (rispettivamente le classi laterali destre) sono una

partizione di G . L'insieme delle classi laterali si indica con G/H (rispettivamente $H \setminus G$) e la mappa $\pi : G \rightarrow G/H$, che ad ogni elemento $a \in G$ associa la sua classe laterale sinistra aH , (rispettivamente la mappa $\pi : G \rightarrow H \setminus G$, che ad ogni elemento $a \in G$ associa la sua classe laterale destra Ha) detta la *proiezione canonica*, è surgettiva. Inoltre, ciascuna classe laterale è in corrispondenza biunivoca con H . In particolare, se G è finito,

$$|aH| = |Ha| = |H|$$

e quindi il *teorema di Lagrange*

$$|G/H| = |H \setminus G| = \frac{|G|}{|H|}.$$

In particolare, l'ordine di H divide l'ordine di G .

Siano G, K due gruppi in cui usiamo la notazione moltiplicativa per l'operazione di gruppo. Un *omomorfismo* $\tau : G \rightarrow K$ è una mappa che verifica le seguenti proprietà:

- (i) $\tau(gh) = \tau(g)\tau(h) \quad \forall g, h \in G$,
- (ii) $\tau(e_G) = e_K$,
- (iii) $\tau(g^{-1}) = \tau(g)^{-1} \quad \forall g \in G$.

Ovviamente e_G e e_K denotano rispettivamente gli elementi neutri di G e K . Abbiamo poi utilizzato la stessa notazione per l'operazione su G e K . Infine, se $\tau : G \rightarrow K$ è un omomorfismo di gruppi, allora l'immagine $\tau(G)$ di G tramite τ è un sottogruppo di K .

12.1 Proposizione. *Siano G un gruppo, H un sottogruppo di G , $\pi : G \rightarrow G/H$ la proiezione canonica, X un insieme e $\varphi : G \rightarrow X$ una applicazione tale che $\varphi(a) = \varphi(ag)$ per ogni $a \in G$. Allora esiste una mappa $\phi : G/H \rightarrow X$ tale che $\varphi = \phi \circ \pi$. Se poi per ogni $a, b \in G$ da $\varphi(a) = \varphi(b)$ segue che $a = bg$ per qualche $g \in H$, allora $\phi : G/H \rightarrow X$ è iniettiva. Infine ϕ è surgettiva se e solo se φ è surgettiva.*

Dimostrazione. La condizione $\varphi(a) = \varphi(ag)$ per ogni $a \in G$ implica che φ è costante su ogni classe laterale. Si può quindi definire $\phi(aH) := \varphi(a) \quad \forall a \in G$. Se poi per ogni $a, b \in G$ da $\varphi(a) = \varphi(b)$ segue che $a = bg$ per qualche $g \in H$, allora φ assume valori diversi su classi laterali diverse. Il legame tra la surgettività di φ e ϕ è ovvio essendo π surgettiva. \square

Sia $g \in S_n$ una permutazione di n elementi rappresentata in prodotto di cicli. $g = (g_1)(g_2) \cdots (g_k)$. Se g è il prodotto di c_1 cicli di lunghezza 1, c_2 cicli di lunghezza 2, eccetera, si dice che g è di *tipo* $1^{c_1} 2^{c_2} \dots k^{c_k}$. Ovviamente ogni permutazione in S_n è di tipo $1^{c_1} 2^{c_2} \dots n^{c_n}$ dove $c_i \geq 0 \quad \forall i$, e $\sum_{i=1}^n i c_i = n$. Il numero $n(g) := \sum_i c_i$ è il numero di cicli di g . Qualche volta per indicare il tipo si preferisce usare il monomio in n variabili

$$z_1^{c_1} z_2^{c_2} \cdots z_n^{c_n} \quad \text{al posto di} \quad 1^{c_1} 2^{c_2} \cdots n^{c_n}.$$

12.2 Proposizione (Cauchy). *Le permutazioni di S_n aventi c_1 punti fissi, c_2 cicli di lunghezza 2, c_3 cicli di lunghezza 3, \dots , c_n cicli di lunghezza n sono in numero di*

$$\binom{n}{c_1 \ c_2 \ \dots \ c_n} \frac{1}{1^{c_1} 2^{c_2} \cdots n^{c_n}}.$$

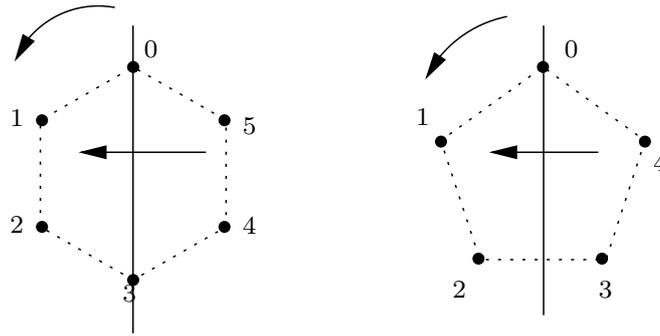


Figura 12.1. Rappresentazione geometrica di D_6 e D_5 come rotazioni e simmetrie di un poligono regolare di 6 e 5 lati.

Dimostrazione. La decomposizione in cicli di una permutazione di S_n di tipo $1^{c_1} 2^{c_2} \dots n^{c_n}$ induce una partizione dell'insieme $\{1, \dots, n\}$ in c_1 parti con un elemento, c_2 parti con due elementi, \dots , c_n parti con n elementi. Queste partizioni sono in numero di

$$\binom{n}{c_1 \ c_2 \ \dots \ c_n} \frac{1}{(1!)^{c_1} (2!)^{c_2} \dots (n!)^{c_n}},$$

cfr. 7.1. Inoltre l'ordine all'interno di ogni ciclo è rilevante. Abbiamo visto che i cicli che si possono fare con k elementi sono $(k - 1)!$. Pertanto il numero cercato è

$$\binom{n}{c_1 \ c_2 \ \dots \ c_n} \frac{[(1 - 1)!]^{c_1} [(2 - 1)!]^{c_2} \dots [(n - 1)!]^{c_n}}{(1!)^{c_1} (2!)^{c_2} \dots (n!)^{c_n}}$$

i.e., la tesi. □

12.a Il gruppo ciclico C_n

Sia $N = \{0, 1, 2, \dots, n - 1\}$ e C_n l'insieme delle permutazioni di N generato dalla permutazione $g = (123 \dots (n - 1))$, i.e.,

$$C_n = \{e, g, g^2, \dots, g^{n-1}\}$$

dove $g^k(i) = i + k \pmod n$. Si può visualizzare C_n pensando N come i vertici di un poligono regolare di n lati, ad esempio come le n radici dell'unità sul cerchio unitario, e a C_n come all'insieme delle rotazioni in senso antiorario che mandano N in sé.

Ovviamente $|C_n| = n$. Poi, ci si convince facilmente che i cicli in cui si decompone eventualmente una permutazione di C_n hanno uguale lunghezza d che in questo caso è necessariamente un divisore di n . Ad esempio per $n = 6$

e	$= (0)(1)(2)(3)(4)(5)$	1^6	6
g	$= (012345)$	6^1	1
g^2	$= (024)(135)$	3^2	2
g^3	$= (03)(14)(25)$	2^3	3
g^4	$= (042)(153)$	3^2	2
g^5	$= (054321)$	6^1	1

e	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$	$(0)(1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)$	1^8	8	1
g	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 0 \end{pmatrix}$	(01234567)	8^1	1	2
g^2	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$(0246)(1357)$	4^2	2	2
g^3	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	(03614725)	8^1	1	2
g^4	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	$(04)(15)(26)(37)$	2^4	1	
σ	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$(07)(16)(25)(34)$	2^4	4	4
σg	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$(0)(17)(26)(35)(4)$	$1^2 2^3$	5	4

Figura 12.2. Le permutazioni di D_8 : per ogni rappresentante di ogni classe coniugata, da sinistra la sua rappresentazione standard, quella ciclica, il suo tipo, il numero di cicli presenti e il numero di elementi della rispettiva classe di elementi coniugati.

Si vede poi che d è il più piccolo intero tale che $g^{kd} = e$. Segue che d è il più piccolo intero tale che $n \perp kd$, i.e., kd è il più piccolo multiplo comune ad n e k ,

$$dk = mcm(n, k)$$

da cui

$$d = \frac{1}{k}mcm(n, k) = \frac{n}{MCD(n, k)} \tag{12.1}$$

Se ne deduce

12.3 Proposizione. *Sia d un divisore di n . Allora*

$$\left| \left\{ g \in C^n \mid g \text{ si scompone in cicli lunghi } d \right\} \right| = \varphi(d)$$

dove $\varphi(d)$ denota la funzione di Eulero.

Dimostrazione. Ricordiamo che $\varphi(d)$ è il numero di interi s , $1 \leq s < d$ coprimi con d . Dalla (12.1)

$$MCD(n, k) = \frac{n}{d}$$

e dunque

$$\begin{aligned} \left| \left\{ k \mid g^k \text{ ha cicli di ordine } d \right\} \right| &= \left| \left\{ k \mid MCD(n, k) = \frac{n}{d} \right\} \right| = \left| \left\{ k \mid MCD\left(d, \frac{kd}{n}\right) = 1 \right\} \right| \\ &= \left| \left\{ s \mid MCD(d, s) = 1 \right\} \right| = \varphi(d). \end{aligned}$$

□

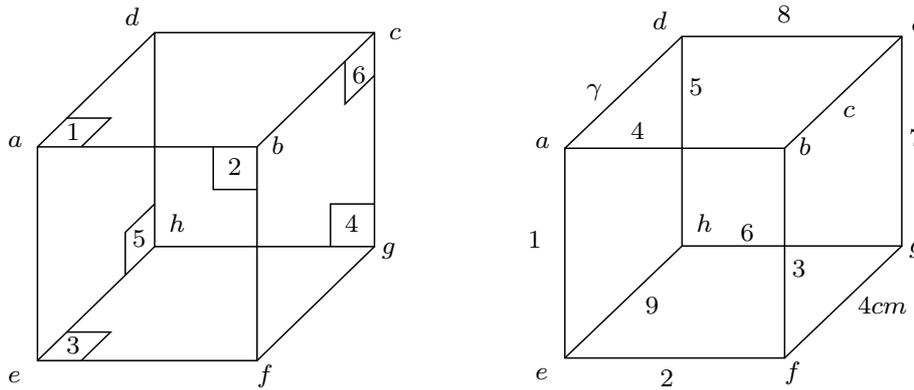


Figura 12.3. La numerazione delle facce del cubo utilizzata per rappresentare le simmetrie del cubo.

12.b Il gruppo diedrale

Sia C_n il gruppo di permutazioni di $N = \{0, 1, \dots, n - 1\}$ generato da $g = (012 \dots (n - 1))$, i.e.,

$$C_n = \{e, g, g^2, \dots, g^{n-1}\}$$

dove $g^k(i) = i + k \pmod n$. Sia σ la permutazione di X data dalla “riflessione” $\sigma(i) = n - i \pmod n$. L’insieme

$$D_n = \{e, g, g^2, \dots, g^{n-1}, \sigma, \sigma g, \sigma g^2, \dots, \sigma g^{n-1}\}$$

è un sottogruppo di $S(N)$ detto il gruppo diedrale su n punti. Ovviamente $|D_n| = 2n$ e

$$\sigma g^k(i) = n - i - k = (n - i) - k = g^{-k} \sigma(i) \pmod n$$

i.e., $\sigma g^k \sigma^{-1} = g^{-k} = g^{n-k} \pmod n$. Segue che se n è dispari, gli insiemi

$$\{e\}, \{g, g^{n-1}\}, \dots, \{g^{\frac{n-1}{2}}, g^{\frac{n+1}{2}}\} \\ \{\sigma, \sigma g, \sigma g^2, \dots, \sigma g^{n-1}\}$$

sono le classi di elementi coniugati; se n è pari le classi di insiemi coniugati sono

$$\{e\}, \{g, g^{n-1}\}, \dots, \{g^{\frac{n}{2}-1}, g^{\frac{n}{2}+1}\}, \{g^{\frac{n}{2}}\} \\ \{\sigma, \sigma g^2, \sigma g^4, \dots, \sigma g^{n-2}\}, \{\sigma g, \sigma g^3, \sigma g^5, \dots, \sigma g^{n-1}\}.$$

Qui di seguito le classi coniugate di D_8

$$\{e\}, \{g, g^7\}, \{g^2, g^6\}, \{g^3, g^5\}, \{g^4\}, \{\sigma, \sigma g^2, \sigma g^4, \sigma g^6\}, \{\sigma g, \sigma g^3, \sigma g^5, \sigma g^7\},$$

e in Figura 12.2 la descrizione delle permutazioni di D_8 .

12.c Il gruppo delle simmetrie del cubo

Sia $C = \{(x, y, z) \mid |x|, |y|, |z| \leq 1\}$ il cubo unitario di \mathbb{R}^3 . Enumeriamo le rotazioni attorno all'origine che mandano il cubo in sé. Oltre all'identità, ci sono senz'altro le 3 rotazioni attorno ad ai tre assi cartesiani di $\pi/2$, π , e $3/2\pi$. Poi ci sono le rotazioni di π attorno alle rette che congiungono i punti medi di spigoli opposti, che sono 6, e infine le rotazioni di $2\pi/3$ e $4\pi/3$ attorno ai tre assi passanti per le quattro coppie di vertici opposti. In totale ci sono

$$1 + 3 \cdot 3 + 1 \cdot 6 + 2 \cdot 4 = 24$$

rotazioni che mandano il cubo in sé e che costituiscono il *gruppo di simmetria del cubo*. Poiché ogni rotazione del cubo induce una e una sola permutazione delle diagonali del cubo (che sono quattro), il gruppo delle rotazioni del cubo è isomorfo a S_4 .

Ogni rotazione agisce sui vertici, sulle facce e sui lati come una permutazione degli stessi. Le Figure 12.6, 12.5 and 12.7 elencano rispettivamente le permutazioni dei vertici, delle facce e dei lati numerati come in Figura 12.3.

12.d Il teorema di Burnside–Frobenius

Da ora in poi tutti gli insiemi e i gruppi che si considerano sono finiti. Se X è un insieme (finito), indichiamo con $S(X)$ il gruppo (rispetto alla composizione) delle mappe bigettive da X in sé, i.e., il gruppo delle permutazioni degli elementi di X .

12.4 Definizione. Sia X un insieme. Si dice che un gruppo G agisce su X se è dato un omomorfismo $g \rightarrow \bar{g}$ da G su $S(X)$.

Indichiamo con $\bar{G} \subset S(X)$ il sottogruppo di permutazioni immagine di G tramite l'azione $g \mapsto \bar{g}$. Diamo quindi le seguenti definizioni.

12.5 Definizione. Sia G un gruppo finito che agisce su un insieme X con l'azione $g \mapsto \bar{g}$.

- (i) Sia $g \in G$. Si dice che $x \in X$ è un punto fisso per g se $\bar{g}(x) = x$. L'insieme dei punti fissi di g viene indicato con

$$X_g := \left\{ x \in X \mid \bar{g}(x) = x \right\}$$

- (ii) Per ogni $x \in X$ lo stabilizzatore di x è l'insieme

$$G_x := \left\{ g \in G \mid \bar{g}(x) = x \right\}$$

degli elementi del gruppo che lasciano fisso x .

- (iii) Per ogni $x \in X$ l'orbita di x prodotta da G è l'insieme

$$M_x := \left\{ y \in X \mid y = \bar{g}(x) \quad \forall g \in G \right\}$$

Se si contano in ‘orizzontale’ e in ‘verticale’ i punti dell’insieme $\{(g, x) \mid \bar{g}(x) = x\}$, allora

$$\sum_{x \in X} |G_x| = \sum_{g \in G} |X_g| \quad (12.2)$$

Inoltre

12.6 Lemma. Per ogni $x \in X$ si ha $|M_x| = \frac{|G|}{|G_x|}$.

Dimostrazione. Ci si convince subito che G_x è un sottogruppo di G . Siano $\pi : G \rightarrow G/G_x$ la proiezione canonica e $\varphi_x : G \rightarrow X$ la mappa data da $\varphi_x(g) = \bar{g}x$. Evidentemente φ_x è surgettiva su M_x e per $a, b \in G$

$$\begin{aligned} \varphi_x(a) = \varphi_x(b) & \text{ se e solo se } \bar{a}(x) = \bar{b}(x) \\ & \text{ se e solo se } \bar{b}^{-1}\bar{a}(x) = x \\ & \text{ se e solo se } \bar{a} = \bar{b}g, g \in G_x. \end{aligned}$$

Segue dalla Proposizione 12.1 che esiste una applicazione bigettiva $\phi_x : G/G_x \rightarrow X$ tale che $\varphi_x = \phi_x \circ \pi$. Pertanto dal teorema di Lagrange

$$|M_x| = |G/G_x| = \frac{|G|}{|G_x|}.$$

□

Dal Lemma 12.6 segue che $|G_x| = |G_y|$ per ogni y nell’orbita di x , $y \in M_x$ e dunque

$$\sum_{y \in M_x} |G_y| = |G_x||M_x| = |G| \quad \forall x \in X, \quad (12.3)$$

e il

12.7 Teorema (Burnside–Frobenius). Sia G un gruppo finito che agisce su un insieme finito X e sia X_G l’insieme delle orbite di X prodotte da G . Allora

$$|X_G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X_g| \quad (12.4)$$

A parole, il numero di orbite è uguale al numero medio di punti fissi prodotti da G !

Dimostrazione. Si ha

$$\sum_{g \in G} |X_g| = \sum_{x \in X} |G_x| = \sum_{M \in X_G} \sum_{y \in M} |G_y| = \sum_{M \in X_G} |G| = |G||X_G|.$$

□

Si tratta di una formula utile perché è a volte difficile individuare direttamente il numero di modelli, mentre è possibile calcolare il numero di punti fissi $|X_g|$ di ogni $g \in G$. Vediamo qualche esempio.

12.8 Esempio. Sia $X = \{0, 1, \dots, n - 1\}$ e C_n il gruppo di permutazioni generato da $g := (012 \dots (n - 1))$, i.e.,

$$C_n = \{e, g, g^2, \dots, g^{n-1}\}$$

dove $g^k(i) = i + k \pmod n$. Ovviamente c'è un'unica orbita, $|X_G| = 1$. D'altra parte è chiaro che l'unica permutazione in C_n che ha punti fissi è l'identità, che ha n punti fissi. Il secondo membro della (12.4) vale allora

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X_g| = \frac{1}{n} (n + 0 + \dots + 0) = 1.$$

12.9 Esempio. Sia $X = \{1, \dots, 5\}$ e G il gruppo ciclico generato da $(123)(45)$. Qui di seguito gli elementi di G , le loro rappresentazioni cicliche e il numero di punti fissi.

1 2 3 4 5	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$	(1)(2)(3)(4)(5)	5
↓			
2 3 1 5 4	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$	(123)(45)	0
↓			
3 1 2 4 5	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$	(132)(4)(5)	2
↓			
1 2 3 5 4	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$	(1)(2)(3)(45)	3
↓			
2 3 1 4 5	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$	(123)(4)(5)	2
↓			
3 1 2 5 4	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$	(132)(45)	0

Ci sono ovviamente due cicli, e anche il secondo membro di (12.4) vale

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X_g| = \frac{1}{6} (5 + 0 + 2 + 3 + 2) = 2.$$

12.10 Osservazione. Si osservi che l'azione di G su X non è ulteriormente specificata. Ad esempio non è richiesto che l'azione sia iniettiva. Tuttavia, come si è visto nella dimostrazione della (12.4), quel che conta è il sottogruppo di permutazioni $\overline{G} \subset S(N)$ immagine di G . Conviene dunque, se si vuole calcolare il secondo membro di (12.4), minimizzare la somma a secondo membro in (12.4) facendo il conto direttamente con il sottogruppo \overline{G} di $S(X)$, i.e.,

$$|X_G| = \frac{1}{|\overline{G}|} \sum_{\overline{g} \in \overline{G}} |X_{\overline{g}}|.$$

12.11 Osservazione. È utile a volte la seguente osservazione. Si verifica subito che due elementi $g_1, g_2 \in G$ coniugati, tali cioè che $g_1 = hg_2h^{-1}$ per qualche $h \in G$ hanno lo stesso numero di punti fissi. Se dunque si indica con $[g]$ la classe dei punti di G coniugati di $g \in G$, si ha

$$|X_G| = \frac{1}{|G|} \sum_{[\bar{g}]} |[\bar{g}]| |X_{\bar{g}}| \quad (12.5)$$

dove la somma è estesa a tutte le classi di equivalenza $[\bar{g}]$ di permutazioni coniugate in \bar{G} .

12.e Il conteggio dei modelli

Siano ora N, R due insiemi, $n = |N|$, $r = |R|$, $\mathcal{F}(N, R)$ la classe delle funzioni $f : N \rightarrow R$ e $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}(N, R)$.

12.12 Definizione. Siano N, R due insiemi e G, H due gruppi finiti che agiscono rispettivamente su N e R . Un sottoinsieme $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}(N, R)$ si dice chiuso rispetto all'azione di G e H se $\bar{k} \circ f \circ \bar{g} \in \mathcal{C}$ per ogni $f \in \mathcal{C}$, $g \in G$ e $h \in H$.

12.13 Esempio. Ovviamente $\mathcal{F}(N, R)$, l'insieme $\mathcal{S}(N, R)$ delle mappe surgettive e l'insieme $\mathcal{I}(N, R)$ delle mappe iniettive da N in R sono chiusi rispetto ad $S(N)$ e $S(R)$ e quindi rispetto all'azione di due gruppi arbitrari G su N e H su R .

Per ogni $g \in G$ e $h \in H$, la mappa $\pi_{g,h} : \mathcal{F}(N, R) \rightarrow \mathcal{F}(N, R)$ data da $\pi_{g,h}(f) := \bar{h} \circ f \circ \bar{g}$ è surgettiva e quindi una permutazione di $\mathcal{F}(N, R)$. Se \mathcal{C} è chiuso rispetto a G e H , allora $\pi_{g,h}\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ è anche una permutazione di \mathcal{C} . Resta così individuata una mappa

$$\pi : G \times H \rightarrow S(\mathcal{C}).$$

12.14 Proposizione. $\pi : G \times H \rightarrow S(\mathcal{C})$ è un omomorfismo di gruppi. In altre parole $G \times H$ è un gruppo finito che agisce su \mathcal{C} .

Dimostrazione. Anzitutto va osservato che se G e H sono due gruppi, l'insieme prodotto cartesiano $G \times H$ ha la ovvia struttura di gruppo prodotto ottenuta operando sulle prime coordinate con l'operazione di G e sulle seconde con l'operazione di H

$$(g_1, h_1)(g_2, h_2) := (g_2g_1, h_1h_2).$$

È facile verificare che $\pi : G \times H \rightarrow S(\mathcal{C})$ è un omomorfismo di gruppi. □

Segue dal teorema di Burnside–Frobenius il seguente teorema sul numero di modelli.

12.15 Teorema (de Bruijn). Siano N, R insiemi finiti, e siano G e H due gruppi finiti che agiscono rispettivamente su N e R . Sia $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}(N, R)$ una classe di mappe $f : N \rightarrow R$ chiusa rispetto all'azione di G su N e H su R . Se $\mathcal{C}_{G \times H}$ denota l'insieme delle orbite prodotte dall'azione di $G \times H$, allora

$$|\mathcal{C}_{G \times H}| = \frac{1}{|G||H|} \sum_{\substack{g \in G \\ h \in H}} \left| \left\{ f \in \mathcal{C} \mid \bar{h} \circ f \circ \bar{g} = f \right\} \right|. \quad (12.6)$$

Dimostrazione. Infatti, applicando il teorema di Burnside–Frobenius a \mathcal{C} e al gruppo di permutazioni $\overline{G} \times \overline{H} \subset S(\mathcal{C})$, si ricava che

$$|\mathcal{C}_{G \times H}| = \frac{1}{|G||H|} \sum_{\substack{g \in G \\ h \in H}} |\mathcal{C}_{g,h}|.$$

D'altra parte

$$\mathcal{C}_{g,h} = \left\{ f \in \mathcal{C} \mid \pi_{g,h}(f) = f \right\} = \left\{ f \in \mathcal{C} \mid \overline{h} \circ f \circ \overline{g} = f \right\}.$$

□

In generale è complicato dare formule esplicite e generali per

$$\left| \left\{ f \in \mathcal{C} \mid \overline{h} \circ f \circ \overline{g} = f \right\} \right|$$

Considereremo solo qualche caso specifico, rimandando ad esempio a [1] per ulteriori risultati e osservazioni.

12.f Modelli rispetto ad una azione sul dominio

In questo caso G agisce su N , $H = \{e\}$, $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}(N, R)$ chiuso rispetto a $G \times \{e\}$. Con riferimento al Teorema 12.15, resta da valutare per ogni $g \in G$

$$\left| \left\{ f \in \mathcal{C} \mid f \circ \overline{g} = f \right\} \right|$$

12.16 Proposizione. Siano $\overline{g} \in S(N)$ e $f \in \mathcal{F}(N, R)$. Allora $f \circ g = f$ se e solo se f è costante sui cicli C_1, C_2, \dots, C_n di g .

Dimostrazione. Sia C un ciclo di \overline{g} , e $x \in C$. Allora

$$C = \left\{ x, \overline{g}(x), \overline{g}^2(x), \dots, \overline{g}^{k-1}(x) \right\}, \quad k = |C|.$$

Segue che

$$f(\overline{g}^{k-1}(x)) = f \circ g(\overline{g}^{k-2}(x)) = f(\overline{g}^{k-2}(x)) = \dots = f(\overline{g}(x)) = f(x)$$

e f è costante su C . Viceversa, se f è costante sui cicli di g , allora $f \circ g(x) = f(x)$ per ogni $x \in N$ poiché x e $g(x)$ appartengono allo stesso ciclo. □

Indichiamo con $n(\overline{g})$ il numero di cicli della permutazione \overline{g} . Segue

12.17 Proposizione. Siano $\overline{g} \in S(N)$ una permutazione di N , $n(\overline{g})$ il numero di cicli di \overline{g} e R un insieme di r elementi

$$\begin{aligned} \left| \left\{ f \in \mathcal{F}(N, R) \mid f \circ g = f \right\} \right| &= r^{n(\overline{g})} \\ \left| \left\{ f \in \mathcal{S}(N, R) \mid f \circ g = f \right\} \right| &= S_r^{n(\overline{g})} \\ \left| \left\{ f \in \mathcal{I}(N, R) \mid f \circ g = f \right\} \right| &= r(r-1) \cdots (r - n(\overline{g}) + 1); \end{aligned}$$

S_n^k denota il numero di mappe surgettive da $\{1, \dots, k\}$ in $\{1, \dots, n\}$.

Il teorema di Burnside–Frobenius e la Proposizione 12.17 danno il seguente risultato

12.18 Teorema (Pólya–Redfeld). Siano N, R insiemi, $|N| = n$, $|R| = r$ e G un gruppo che agisce su N . Allora i modelli modulo G delle mappe, delle mappe surgettive e delle mappe iniettive da N in R sono in numero rispettivamente di

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}(N, R)_G| &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} r^{n(\bar{g})}, \\ |\mathcal{S}(N, R)_G| &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} S_r^{n(\bar{g})}, \\ |\mathcal{I}(N, R)_G| &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} r(r-1)(r-2) \cdots (r-n(\bar{g})+1). \end{aligned}$$

12.19 Esempio. Siano $N = \{0, p-1\}$, p primo, $R = \{1, \dots, r\}$ e C_p il gruppo ciclico di ordine p generato dalla permutazione $g = (012 \dots (p-1))$, i.e., $C_p = \{e, g, g^2, \dots, g^{p-1}\}$ dove $g^k(i) = i+k \pmod{p}$. Ovviamente

$$\left| \left\{ f \in \mathcal{F}(N, R) \mid f \circ g_0 = f \right\} \right| = \left| \left\{ f \in \mathcal{F}(N, R) \mid f = f \right\} \right| = |\mathcal{F}(N, R)| = r^p;$$

inoltre per ogni $1 \leq k \leq p-1$, ci si convince subito che g^k ha un solo ciclo essendo p e k primi fra loro. Pertanto

$$\left| \left\{ f \in \mathcal{F}(N, R) \mid f \circ g^k = f \right\} \right| = r^1 = r$$

In definitiva, il numero di modelli di $\mathcal{F}(N, R)$ rispetto al gruppo ciclico C_p è

$$|\mathcal{F}(N, R)_{C_p}| = \frac{1}{p}(r^p + (p-1)r) \quad (12.7)$$

In particolare, si è dimostrato il piccolo teorema di Fermat: infatti, dalla (12.7) segue che

$$r^p - r = p(-r + |\mathcal{F}(N, R)_G|) = 0 \pmod{p}$$

12.g Esercizi

12.20 Esercizio (Il problema delle collane). Calcolare il numero di collane distinte di n perline di λ colori. Due collane si intendono uguali se con una rotazione una è sovrapponibile all'altra.

Soluzione. Si tratta di contare le mappe $f: N \rightarrow R$ dove $N := \{1, \dots, n\}$ e $R = \{1, \dots, \lambda\}$ che assegnano ad ogni perline il colore della stessa modulo il gruppo C_n delle rotazioni agente su N . C_n è il gruppo ciclico di permutazioni di N generato dalla permutazione $g = (012 \dots (n-1))$, i.e.,

$$C_n = \{e, g, g^2, \dots, g^{n-1}\}.$$

Si è visto che per ogni k , g^k si decompone in n/d cicli aventi la stessa lunghezza d , essendo $d = n/\text{MCD}(n, k)$ e che, cfr. la Proposizione 12.3, il numero di interi k tali che g^k si decompone in n/d cicli di lunghezza d è $\varphi(d)$. Segue dalla formula di Burnside–Frobenius

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}(N, R)_{C_n}| &= \frac{1}{|C_n|} \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^{n(g^k)} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{d \mid n} \lambda^{n/d} |\{k \mid g^k \text{ si decompone in cicli di lunghezza } d\}| \\ &= \frac{1}{n} \sum_{d \mid n} \varphi(d) \lambda^{n/d}. \end{aligned}$$

e in definitiva il numero di collane di n perline e λ colori è

$$\frac{1}{n} \sum_{d \mid n} \varphi(d) \lambda^{\frac{n}{d}}.$$

<i>ident</i>	$(i, j) \rightarrow (i, j)$	8!	1
ρ	$(i, j) \rightarrow (7 - j, i)$	12	2
ρ^2	$(i, j) \rightarrow (7 - i, 7 - j)$	384	1
σ	$(i, j) \rightarrow (i, 7 - j)$	0	2
$\sigma\rho$	$(i, j) \rightarrow (j, i)$	764	2

Figura 12.4. L'azione di D_4 sulla scacchiera $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \times \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. ρ è una rotazione oraria in senso orario di $\pi/2$, σ è la simmetria rispetto all'asse verticale della scacchiera.

12.21 Esercizio (Problema della scacchiera). È data una scacchiera quadrata 8×8 . Calcolare il numero di modi di sistemare 8 torri sulla scacchiera in modo che non si minaccino tra loro. Due disposizioni si pensano equivalenti se di può portare l'una nell'altra con una rotazione o una simmetria.

Soluzione. Ogni disposizione $X \subset \{0, 1, \dots, 7\}^2$ di torri che non si minacciano tra loro è il grafico G_π di una permutazione $\pi \in S_8$. Si tratta di calcolare il numero di orbite di $S(S_8)$ sotto l'azione del gruppo diedrale D_4 data da $g \mapsto \bar{g} : S_8 \rightarrow S_8$ dove per ogni $\pi \in S_8$ $\bar{g}(\pi)$ è la permutazione q tale che $G_q = g(G_\pi)$. Dalla formula di Burnside–Frobenius (12.5),

$$|S_{8D_4}| = \frac{1}{|D_4|} \sum_{[g]} |[g]| |X_g|.$$

dove la somma è estesa alle classi di elementi coniugati di D_4 .

La Figura 12.4 elenca un rappresentante g per ogni classe coniugata di D_4 , la rotazione della scacchiera relativa, il numero dei punti fissi di \bar{g} (calcolato da un semplice programma) e il numero di elementi coniugati della classe. Segue da questi dati che

$$|S_{8D_4}| = \frac{1}{8}(8! + 2 \cdot 12 + 1 \cdot 384 + 2 \cdot \dots \cdot 764) = 5282.$$

12.22 Esercizio (Colorazioni delle facce di un cubo). Vogliamo calcolare in quanti modi possibili è possibile colorare le facce di un cubo con λ colori (un colore per faccia). Due colorazioni si intendono identiche se i cubi colorati nei due modi si possono sovrapporre con una rotazione.

Soluzione. Una colorazione delle facce del cubo è una mappa $f : F \rightarrow R$ che associa ad ogni faccia del cubo il suo colore, se ne deduce che vogliamo calcolare $\mathcal{F}(N, R)_G$ dove $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ è l'insieme delle facce del cubo, $R = \{1, \dots, \lambda\}$ è l'insieme dei colori e G è il gruppo di simmetria del cubo che agisce su N . La Figura 12.5 elenca le permutazioni delle facce prodotte dall'azione del gruppo di simmetria. Il numero di colorazioni è pertanto

$$|\mathcal{F}(F, R)_G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \lambda^{n(\bar{g})} = \frac{1}{24}(\lambda^6 + 3\lambda^4 + 12\lambda^3 + 8\lambda^2)$$

Ad esempio ci sono $240/24 = 10$ modi diversi di colorare le facce con due colori e $2160/24 = 90$ modi di colorare le facce con tre colori.

12.23 Esercizio (Colorazioni dei vertici di un cubo). Calcolare in quanti modi è possibile colorare i vertici di un cubo con λ colori. Due colorazioni si considerano identiche se una colorazione si può sovrapporre all'altra con una rotazione.

Soluzione. Una colorazione dei vertici del cubo è una mappa $f : V \rightarrow R$ che associa ad ogni vertice del cubo il suo colore. Se ne deduce che vogliamo calcolare $\mathcal{F}(N, R)_G$ dove $N = \{a, b, c, d, e, f\}$ è l'insieme delle facce del cubo, $R = \{1, \dots, \lambda\}$ è l'insieme dei colori e G è il gruppo di simmetria del cubo che agisce su V . La Figura 12.6 elenca le permutazioni prodotte in V dall'azione del gruppo di simmetria. Dal teorema di Pólya–Redfeld segue che il numero di colorazioni è

<i>ident</i>	(1)(2)(3)(4)(5)(6)	1^6	6
<i>abcd - efgh</i>	(1)(2645)(3)	$1^2 4^1$	3
	(1)(24)(3)(56)	$1^2 2^2$	4
	(1)(2546)(3)	$1^2 4^1$	3
<i>bcfg - adhe</i>	(1536)(2)(4)	$1^2 4^1$	3
	(13)(2)(4)(56)	$1^2 2^2$	4
	(1635)(2)(4)	$1^2 4^1$	3
<i>abfe - dcgh</i>	(1234)(5)(6)	$1^2 4^1$	3
	(13)(24)(5)(6)	$1^2 2^2$	4
	(1432)(5)(6)	$1^2 4^1$	3
<i>ab - gh</i>	(15)(36)(24)	2^3	3
<i>bc - eh</i>	(12)(34)(56)	2^3	3
<i>cd - ef</i>	(16)(35)(24)	2^3	3
<i>ad - fg</i>	(14)(23)(56)	2^3	3
<i>bf - dh</i>	(13)(25)(46)	2^3	3
<i>ae - gc</i>	(13)(26)(45)	2^3	3
<i>a - g</i>	(145)(632)	3^2	2
	(154)(623)	3^2	2
<i>b - h</i>	(152)(643)	3^2	2
	(125)(634)	3^2	2
<i>c - e</i>	(126)(345)	3^2	2
	(162)(354)	3^2	2
<i>d - f</i>	(164)(352)	3^2	2
	(146)(325)	3^2	2

Figura 12.5. L'azione del gruppo delle rotazioni del cubo sulle facce. Da sinistra: l'asse di rotazione, le permutazioni relative delle facce numerate come in Figura 12.3 nella loro rappresentazione ciclica, il tipo e il numero di cicli.

$$|\mathcal{F}(V, R)| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \lambda^{n(\bar{g})} = \frac{1}{24} (\lambda^8 + 17\lambda^4 + 6\lambda^2)$$

Ad esempio ci sono $552/24 = 23$ modi diversi di colorare i vertici con due colori e $7992/24 = 333$ modi di colorare i vertici con tre colori.

12.24 Esercizio (Colorazioni degli spigoli di un cubo). Calcolare in quanti modi è possibile colorare gli spigoli di un cubo con λ colori. Due colorazioni si considerano identiche se una colorazione si può sovrapporre all'altra con una rotazione.

Soluzione. Una colorazione degli spigoli del cubo è una mappa $f : L \rightarrow R$ che associa ad ogni spigolo del cubo il suo colore. Se ne deduce che vogliamo calcolare $\mathcal{F}(L, R)_G$ dove $L = \{1, 2, 3, \dots, 9, \alpha, \beta, \gamma\}$ è l'insieme dei lati, $R = \{1, \dots, \lambda\}$ è l'insieme dei colori e G è il gruppo delle rotazioni del cubo. La Figura 12.7 enumera le permutazioni dell'azione del gruppo di simmetria del gruppo sull'insieme dei lati L . Segue dal teorema di Pólya-Redfeld che il numero di colorazioni è

$$|\mathcal{F}(L, R)| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \lambda^{n(\bar{g})} = \frac{1}{24} (\lambda^{12} + 6\lambda^7 + 3\lambda^6 + 8\lambda^4 + 6\lambda^3).$$

Ad esempio per ci sono $5232/24 = 218$ modi diversi di colorare i lati con due colori e $547560/24 = 22815$ modi di colorare i lati con tre colori.

<i>ident</i>	$(a)(b)(c)(d)(e)(f)(g)(h)$	1^8	8
<i>abcd - efgh</i>	$(abcd)(efgh)$	4^2	2
	$(ac)(bd)(eg)(fh)$	2^4	4
	$(adcb)(ehgf)$	4^2	2
<i>bcfg - adeh</i>	$(aehd)(bfgc)$	4^2	2
	$(ah)(bg)(cf)(de)$	2^4	4
	$(adhe)(bcgf)$	4^2	2
<i>abfe - dcgh</i>	$(abfe)(cghd)$	4^2	2
	$(af)(be)(ch)(dg)$	2^4	4
	$(aefb)(cdhg)$	4^2	2
<i>ae - cg</i>	$(ae)(cg)(bh)(fd)$	2^4	4
<i>bf - dh</i>	$(ag)(bf)(ce)(dh)$	2^4	4
<i>ab - gh</i>	$(ab)(ce)(df)(gh)$	2^4	4
<i>dc - ef</i>	$(ag)(bh)(dc)(ef)$	2^4	4
<i>ad - fg</i>	$(ad)(bh)(ce)(fg)$	2^4	4
<i>bc - eh</i>	$(ag)(bc)(df)(eh)$	2^4	4
<i>df</i>	$(ahc)(beg)(d)(f)$	$1^2 3^2$	4
	$(ach)(bge)(d)(f)$	$1^2 3^2$	4
<i>ce</i>	$(afh)(bgd)(c)(e)$	$1^2 3^2$	4
	$(ahf)(bdg)(c)(e)$	$1^2 3^2$	4
<i>ag</i>	$(a)(bed)(cfh)(g)$	$1^2 3^2$	4
	$(a)(bde)(chf)(g)$	$1^2 3^2$	4
<i>bh</i>	$(afc)(b)(deg)(h)$	$1^2 3^2$	4
	$(acf)(b)(dge)(h)$	$1^2 3^2$	4

Figura 12.6. L'azione del gruppo delle rotazioni del cubo sui vertici. Da sinistra: l'asse di rotazione, le permutazioni relative dei vertici numerati come in Figura 12.3 nella loro rappresentazione ciclica, il tipo e il numero di cicli.

<i>ident</i>	(1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8)(9)(α)(β)(γ)	$1^1 2$	12
<i>abcd - efgh</i>	(4 β 8 γ)(2 α 69)(1375)	4^3	3
	(48)($\beta\gamma$)(26)(α 9)(17)(35)	2^6	6
	(4 γ 8 β)(296 α)(1573)	4^3	3
<i>bcfg - adhe</i>	(γ 591)(β 7 α 3)(4862)	4^3	3
	(γ 9)(51)($\beta\alpha$)(73)(46)(82)	2^6	6
	(γ 195)(β 3 α 7)(4268)	4^3	3
<i>abfe - dcgh</i>	(5876)(1432)(9 $\gamma\beta\alpha$)	4^3	3
	(57)(86)(13)(42)(9 β)($\gamma\alpha$)	2^6	6
	(5678)(1234)(9 $\alpha\beta\gamma$)	4^3	3
<i>ab - gh</i>	(1 β)(3 γ)(4)(5 α)(6)(79)(28)	$1^2 2^5$	7
<i>bc - eh</i>	(16)(25)(38)(47)(9)($\alpha\gamma$)(β)	$1^2 2^5$	7
<i>cd - ef</i>	(1 α)(2)(39)(46)(5 β)(7 γ)(8)	$1^2 2^5$	7
<i>ad - fg</i>	(72)(63)(54)(81)(α)(β 9)(γ)	$1^2 2^5$	7
<i>bf - dh</i>	(17)(2 β)(3)(4 α)(5)(6 γ)(89)	$1^2 2^5$	7
<i>ae - gc</i>	(1)(2 γ)(35)(49)(6 β)(7)(8 α)	$1^2 2^5$	7
<i>a - g</i>	(14 γ)(2 β 5)(389)(6 α 7)	3^4	4
	(1 γ 4)(25 β)(398)(67 α)	3^4	4
<i>b - h</i>	(1 α 8)(27 γ)(3 β 4)(596)	3^4	4
	(18 α)(2 γ 7)(34 β 4)(569)	3^4	4
<i>c - e</i>	(129)(36 γ)(4 α 5)(78 β)	3^4	4
	(192)(3 γ 6)(45 α)(7 β 8)	3^4	4
<i>d - f</i>	(1 β 6)(23 α)(479)(5 γ 8)	3^4	4
	(16 β)(2 α 3)(497)(58 γ)	3^4	4

Figura 12.7. L'azione del gruppo delle rotazioni del cubo sugli spigoli. Da sinistra: l'asse di rotazione, le permutazioni relative dei lati numerati come in Figura 12.3 nella loro rappresentazione ciclica, il tipo e il numero di cicli.

Bibliografia

1. M. Aigner. A Course in Enumeration, 2007, Springer-Verlag, Berlin.
2. L. Anderson. A First Course in Discrete Mathematics, 2000, Springer-Verlag, Berlin.
3. A. Björner, R. P. Stanley. A Combinatorial Miscellany, 1999, Preprint,
http://www.math.dartmouth.edu/archive/m68f05/public_html/comb.pdf
4. M. Cerasoli, F. Eugeni, M. Protasi. Elementi di Matematica Discreta, 1988, Zanichelli, Bologna.
5. S. K. Lando. Lectures on Generating Functions, Stud. Math. Library 23, Am. Math. Soc., 2003, Providence, Rhode Island.
6. J. Riordan, An Introduction to Combinatorial Analysis, 1980, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ.
7. G. Rota. Introduzione alla probabilita', 1984, Unione Matematica Italiana, Bologna.
8. R. P. Stanley. Enumerative Combinatorics I and II, 1995 and 1997, Cambridge University Press, Cambridge, MA.
9. R. Sprugnoli. An Introduction to Mathematical Methods in Combinatorics. Note del Dipartimento di Sistemi e Informatica, Univ. Firenze, 2006, Firenze.
10. Wikipedia. <http://en.wikipedia.org>.