Corso di Laurea in Ingegneria Informatica (270)
Metodi Matematici e Probabilistici (9 CFU)
Prova intermedia del 25/10/2013.

Nome e Cognome:

Compito A

1. Dimostrare che il determinante di una matrice $\mathbf{A} \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ è il prodotto dei suoi autovalori.

Soluzione. Siano $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ gli autovalori e $p_{\mathbf{A}}(s) = \det(s\mathrm{Id} - \mathbf{A})$ il polinomio caratteristico di $\mathbf{A}$. Allora $p_{\mathbf{A}}(s) = (s - \lambda_1)(s - \lambda_2)\cdots(s - \lambda_n)$. Pertanto $(-1)^n \det \mathbf{A} = p_{\mathbf{A}}(0) = (-\lambda_1)\cdots(-\lambda_n)$.

2. Sia $A : X \to Y$ un operatore tra spazi euclidei. Cos'è e come si caratterizza l'inversa di Moore-Penrose?

Soluzione. Indico con $Q : Y \to Y$ la proiezione ortogonale su $\operatorname{Im} A$. Per ogni $y \in Y$, esiste un unico $x = x(y) \in X$ tale che

$$\begin{cases} Ax = Qy, \\ x \in \ker A^{\perp} \end{cases}$$

e la mappa $A^{\dagger} : Y \to X$ definita da $A^{\dagger}y := x(y)$ si chiama *inversa di Moore-Penrose di* A. Dal teorema dell'alternativa $x := A^{\dagger}y$ è anche l'unica soluzione di

$$\begin{cases} A^*Ax = A^*y, \\ x \in \operatorname{Im} A^*. \end{cases}$$

3. Sia A un operatore autoaggiunto su uno spazio euclideo X. Se A è semidefinito positivo, dire quali relazioni intercorrono tra gli autovalori e gli autospazi di A e gli autovalori e gli autospazi di A^4.

Soluzione. λ è autovalore per A se e solo se λ^4 è autovalore per A^4 e $V(\lambda, A) = V(\lambda^4, A^4)$ dove si e' indicato con $V(\mu, B)$ l'autospazio dell'operatore B associato all'autovalore μ.

4. Calcolare le potenze $\{\mathbf{A}^n\}$ della matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Soluzione. La matrice ha autovalori 1 2. L'autovalore 2 ha molteplicità algebrica 2 ma il suo autospazio ha dimensione 1. $\mathbf{A}$ non è diagonalizzabile e quindi applico il metodo di Putzer. Siano

$$\mathbf{M}_0 = \mathrm{Id}, \qquad \mathbf{M}_1 = (\mathbf{A} - 1\mathrm{Id}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e

$$\mathbf{M}_2 = \mathbf{M}_1(\mathbf{A} - 2\mathrm{Id}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e siano

1. $\{c_1(n)\}$ soluzione di $c_1(n+1) = c_1(n)$, $c_1(0) = 1$, i.e., $c_1(n) = 1\ \forall n$,
2. $\{c_2(n)\}$ soluzione di $c_2(n+1) = 2c_2(n) + 1$, $c_2(0) = 0$, i.e., $c_2(n) = \sum_{j=0}^{n-1} 2^{n-1-j} = 2^n - 1\ \forall n$,
3. $\{c_3(n)\}$ soluzione di $c_3(n+1) = 2c_3(n) + 2^n - 1$, $c_2(0) = 0$, i.e., $c_3(n) = \sum_{j=0}^{n-1} 2^{n-1-j}(2^j - 1) = n2^{n-1} - 2^n + 1\ \forall n$,

Allora dalla formula di Putzer,

$$\mathbf{A}^n = \mathrm{Id} + (2^n - 1)\mathbf{M}_1 + \Big((n-2)2^{n-1} + 1\Big)\mathbf{M}_2 \qquad \forall n \geq 0.$$

5. Siano dati i punti del piano $P_1 = (0,1)$, $P_2 = (1,2)$, $P_3 = (2,5)$, $P_4 = (3,7)$ e $P_5 = (4,1)$. Calcolare la retta di regressione lineare.

Soluzione. Per ogni $i = 1, \dots, 5$, sia $P_i = (x_i, y_i)$. Si tratta di trovare (m, q) tale che $\sum_{i=1}^5 |y_i - (mx_i - q)|^2 \to \min$. Sia $\mathbf{A}^T := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. $(m,q)^T$ è l'unica soluzione del sistema

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A}\begin{pmatrix} m \\ q \end{pmatrix} = \mathbf{A}^T\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 7 & 1 \end{pmatrix}^T.$$

6. Trovare la successione $\{x_n\}$ soluzione della ricorrenza $\begin{cases} x_{n+2} - 3x_{n+1} + 2x_n = 0 \ \forall n \geq 0, \\ x_0 = 0, x_1 = 1. \end{cases}$.

Soluzione. Sia $F_n := \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix}$. Allora $\{F_n\}$ è la soluzione della ricorrenza del primo ordine

$$\begin{cases} F_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} F_n, \\ F_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Posto $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, allora $F_n = \mathbf{A}^n(0,1)^T$ e $x_n = (\mathbf{A}^n)^1_2$.
Resta da calcolare $\mathbf{A}^n$. La matrice $\mathbf{A}$ ha due autovalori distinti $\lambda = 1, 2$ e quindi due autovalori associati indipendenti, ad esempio $u_1 = (1,1)^T$ e $u_2 = (1,2)^T$. Posto $\mathbf{S} = [u_1 \,|\, u_2]$, allora $\mathbf{A} = \mathbf{S}\ \mathrm{diag}(1,2)\,\mathbf{S}^{-1}$, quindi

$$\mathbf{A}^n = \mathbf{S}\ \mathrm{diag}(1, 2^n)\,\mathbf{S}^{-1}.$$

7. Come si modellano le estrazioni del lotto?

Soluzione. L'estrazione del lotto si svolge estraendo equamente un insieme di 5 numeri scelti tra novanta. Pertanto la si modella come uno spazio probabilizzato $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ dove $\Omega = \{x_1, \dots, x_N\}$ è l'insieme (finito) delle cinquine estraibili, $N := \binom{90}{5}$, la classe degli eventi $\mathcal{E} = \mathcal{P}(\Omega)$ è l'insieme di tutti i sottoinsiemi di Ω e la densità di massa di $\mathbb{P}$ è uniforme, $\mathbb{P}(\{x_i\}) = 1/\binom{90}{5}$ $\forall i$.

8. Cos'è uno spazio probabilizzato?

Soluzione. Uno spazio probabilizzato è un insieme Ω sul quale è assegnata una misura di probabilità $(\mathcal{E}, \mathbb{P})$, cioè una famiglia di sottoinsiemi $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ di parti di Ω aventi la proprietà di essere una σ-algebra e una funzione $\mathbb{P} : \mathcal{E} \to [0,1]$ tale che $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$, $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ σ-additiva: per ogni successione $\{A_i\} \subset \mathcal{E}$ di eventi a due a due disgiunti, $\mathbb{P}(\cup_{i=1}^\infty A_i) = \sum_{i=1}^\infty \mathbb{P}(A_i)$.

9. Una ditta produce apparecchi con un tasso di malfunzionamento dell'8%. Viene quindi attivato un test di collaudo. Su un campione di apparecchiature il test non viene superato dall'80% delle apparecchiature guaste e dall'1% delle apparecchiature funzionanti. Dire, giustificando la risposta, qual è la probabilità che una apparecchiatura messa in commercio dopo aver superato il test sia difettosa?

Soluzione. Si considerino i seguenti eventi

- Ω =l'insieme delle apparecchiature campionate,
- F =l'insieme delle apparecchiature campionate funzionanti,
- G =l'insieme delle apparecchiature campionate guaste,
- T =l'insieme delle apparecchiature campionate che superano il test.

Si suppone che la probabilità utilizzata sia quella uniforme. Per ipotesi $\mathbb{P}(G) = 0.08$, $\mathbb{P}(T \mid G) = 0.2$, $\mathbb{P}(T \mid S) = 0.01$. Si vuole calcolare $\mathbb{P}(G \mid T)$. Si applica dunque la formula di Bayes

$$\mathbb{P}(G \mid T) = \mathbb{P}(T \mid G)\frac{\mathbb{P}(G)}{\mathbb{P}(T|G)\,\mathbb{P}(G) + \mathbb{P}(T|S)(1 - \mathbb{P}(G))}.$$

10. Un'urna contiene 5 palline bianche, 5 palline rosse e 10 palline nere numerate da 1 a 20. Si estraggono due palline (senza reimbussolamento). Calcolare, giustificando la risposta, la probabilità che le due palline siano dello stesso colore.

Soluzione. I tre eventi favorevoli sono che si estraggno o A =due palline bianche o B =due rosse o C =due nere e i tre eventi favorevoli sono disgiunti. Pertanto l'evento facolrevole è $A \cup B \cup C$ con A, B, C a due a due disgiunti. Pertanto

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) = \frac{\binom{5}{2} + \binom{5}{2} + \binom{10}{2}}{\binom{20}{2}}.$$

11. Abbiamo 2 urne. La prima urna contiene 3 palline rosse, 5 palline bianche e 7 palline nere; la seconda contiene 5 palline rosse, 5 palline bianche e 5 palline nere, tutte numerate. Si estraggono a caso due palline da una medesima urna scelta a caso (senza reimbussolare). Sono entrambe nere. Dire, giustificando la risposta, qual è la probabilità che le palline siano state estratte dalla seconda urna?

Soluzione. Siano U_1 e U_2 rispettivamente la prima e la seconda urna e A l'evento estrazione di due nere. Per ipotesi $\mathbb{P}(A \mid U_1) = \binom{7}{2}/\binom{15}{2}$, $\mathbb{P}(A \mid U_2) = \binom{5}{2}/\binom{15}{2}$. La scelta dell'urna è casuale con probabilità uniforme, i.e., $\mathbb{P}(U_1) = \mathbb{P}(U_2) = 1/2$. Si vuole calcolare $\mathbf{P}(U_1 \mid A)$. Segue dalla formula di Bayes che

$$\mathbb{P}(U_1 \mid A) = \mathbb{P}(A \mid U_1)\frac{\mathbb{P}(U_1)}{\mathbb{P}(A \mid U_1)\,\mathbb{P}(U_1) + \mathbb{P}(A \mid U_2)\mathbf{P}(U_2)} = \frac{\binom{7}{2}}{\binom{7}{2} + \binom{5}{2}}.$$

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica (270)
Metodi Matematici e Probabilistici (9 CFU)
Prova intermedia del 25/10/2013.

Nome e Cognome:

Compito B

1. Dimostrare che la traccia di una matrice $\mathbf{A} \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ è la somma dei suoi autovalori.

Soluzione. Una matrice triangolare $\mathbf{T}$ ha sulla diagonale i suoi autovalori $\lambda_1(\mathbf{T}), \dots, \lambda_n(\mathbf{T})$. Pertanto $\operatorname{tr}\mathbf{T} = \sum_{i=1}^n \lambda_i(\mathbf{T})$. D'altra parte per il teorema di Schur $\mathbf{A}$ è $\mathbb{C}$-simile ad una matrice triangolare $\mathbf{T}$. $\mathbf{A}$ e $\mathbf{T}$ hanno allora lo stesso polinomio caratteristico

$$p_{\mathbf{A}}(s) = \det(s\mathrm{Id} - \mathbf{A}) = s^n - \operatorname{tr}\mathbf{A}\, s^{n-1} + \dots + (-1)^n \det\mathbf{A},$$
$$p_{\mathbf{T}}(s) = \det(s\mathrm{Id} - \mathbf{T}) = s^n - \operatorname{tr}\mathbf{T}\, s^{n-1} + \dots + (-1)^n \det\mathbf{T}$$

quindi hanno gli stessi coefficienti e le stesse radici, gli autovalori. In particolare $\operatorname{tr}\mathbf{A} = \operatorname{tr}\mathbf{T} = \sum_{i=1}^n \lambda_i(\mathbf{T}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(\mathbf{A})$.

2. Sia $A : X \to Y$ un operatore tra spazi euclidei. Enunciare e dimostrare il teorema dell'alternativa.

3. Sia A un operatore autoaggiunto su uno spazio euclideo X. Se A è semidefinito positivo, cosa indica $A^{1/2}$?

4. Calcolare le potenze $\{\mathbf{A}^n\}$ della matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

5. Siano dati i punti del piano $P_1 = (1, 2)$, $P_2 = (1, 3)$, $P_3 = (2, 4)$, $P_4 = (3, 4)$ e $P_5 = (4, 1)$. Calcolare la retta di regressione lineare.

6. Trovare la successione $\{x_n\}$ soluzione della ricorrenza $\begin{cases} x_{n+2} + x_{n+1} - 6x_n = 0 \ \forall n \geq 0, \\ x_0 = 0, x_1 = 1. \end{cases}$.

7. Come si modellano le mani servite nel gioco del poker con 52 carte?

8. Enunciare e dimostrare la formula della probabilità totali.

9. Una ditta produce apparecchi con un tasso di malfunzionamento dell'10%. Viene quindi attivato un test di collaudo. Su un campione di apparecchiature il test non viene superato dall'90% delle apparecchiature guaste e dall'2% delle apparecchiature funzionanti. Dire, giustificando la risposta, qual è la probabilità che una apparecchiatura messa in commercio dopo aver superato il test sia difettosa?

10. Un'urna contiene 5 palline bianche, 4 palline rosse e 11 palline nere numerate da 1 a 20. Si estraggono due palline (senza reimbussolamento). Calcolare, giustificando la risposta, la probabilità che le due palline siano dello stesso colore.

11. Abbiamo 2 urne. La prima urna contiene 7 palline rosse, 5 palline bianche e 3 palline nere; la seconda contiene 3 palline rosse, 5 palline bianche e 7 palline nere, tutte numerate. Si estraggono a caso due palline da una medesima urna scelta a caso (senza reimbussolare). Sono entrambe nere. Dire, giustificando la risposta, qual è la probabilità che le palline siano state estratte dalla seconda urna?

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica (270)
Metodi Matematici e Probabilistici (9 CFU)
Prova intermedia del 25/10/2013.

Nome e Cognome:

Compito C

1. Enunciare il teorema di decomposizione di Schur.

2. Sia $A : X \to Y$ un operatore tra spazi euclidei. Sia $\mathbf{A}$ la matrice associata ad A in una base. Scrivere la matrice associata ad A^* nella stessa base.

3. Sia A un operatore autoaggiunto su uno spazio euclideo X. Quali proprietà hanno gli autovalori e gli autospazi di A?

4. Calcolare le potenze $\{\mathbf{A}^n\}$ della matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

5. Siano dati i punti del piano $P_1 = (2, 2)$, $P_2 = (1, 5)$, $P_3 = (3, 3)$, $P_4 = (0, 6)$ e $P_5 = (3, 1)$. Calcolare la retta di regressione lineare.

6. Trovare la successione $\{x_n\}$ soluzione della ricorrenza $\begin{cases} x_{n+2} + 5x_{n+1} + 6x_n = 0 \ \forall n \geq 0, \\ x_0 = 0, x_1 = 1. \end{cases}$.

7. Come si modella il lancio di un dado?

8. Enunciare e dimostrare la formula di Bayes.

9. Una ditta produce apparecchi con un tasso di malfunzionamento dell'10%. Viene quindi attivato un test di collaudo. Su un campione di apparecchiature il test non viene superato dall'80% delle apparecchiature guaste e dall'1% delle apparecchiature funzionanti. Dire, giustificando la risposta, qual è la probabilità che una apparecchiatura messa in commercio dopo aver superato il test sia difettosa?

10. Un'urna contiene 5 palline bianche, 9 palline rosse e 6 palline nere numerate da 1 a 20. Si estraggono due palline (senza reimbussolamento). Calcolare, giustificando la risposta, la probabilità che le due palline siano dello stesso colore.

11. Abbiamo 2 urne. La prima urna contiene 5 palline rosse, 5 palline bianche e 5 palline nere; la seconda contiene 3 palline rosse, 5 palline bianche e 7 palline nere, tutte numerate. Si estraggono a caso due palline da una medesima urna scelta a caso (senza reimbussolare). Sono entrambe nere. Dire, giustificando la risposta, qual è la probabilità che le palline siano state estratte dalla seconda urna?

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica (270)
Metodi Matematici e Probabilistici (9 CFU)
Prova intermedia del 25/10/2013.

Nome e Cognome:

Compito D

1. Enunciare e dimostrare il teorema di Cayley-Hamilton.

2. Sia $A : X \to Y$ un operatore tra spazi euclidei. Cos'è l'operatore aggiunto di A?

3. Sia A un operatore autoaggiunto su uno spazio euclideo X. Enunciare e dimostrare il teorema di caratterizzazione variazionale degli autovalori.

4. Calcolare le potenze $\{\mathbf{A}^n\}$ della matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Siano dati i punti del piano $P_1 = (1, 2)$, $P_2 = (3, 1)$, $P_3 = (5, 4)$, $P_4 = (2, 1)$ e $P_5 = (4, 1)$. Calcolare la retta di regressione lineare.

6. Trovare la successione $\{x_n\}$ soluzione della ricorrenza $\begin{cases} x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 0 \ \forall n \geq 0, \\ x_0 = 0, x_1 = 1. \end{cases}$.

7. Come si modella il lancio di due dadi?

8. Cos'è la funzione di ripartizione?

9. Una ditta produce apparecchi con un tasso di malfunzionamento dell'5%. Viene quindi attivato un test di collaudo. Su un campione di apparecchiature il test non viene superato dall'90% delle apparecchiature guaste e dall'2% delle apparecchiature funzionanti. Dire, giustificando la risposta, qual è la probabilità che una apparecchiatura messa in commercio dopo aver superato il test sia difettosa?

10. Un'urna contiene 5 palline bianche, 8 palline rosse e 7 palline nere numerate da 1 a 20. Si estraggono due palline (senza reimbussolamento). Calcolare, giustificando la risposta, la probabilità che le due palline siano dello stesso colore.

11. Abbiamo 2 urne. La prima urna contiene 5 palline rosse, 5 palline bianche e 5 palline nere; la seconda contiene 7 palline rosse, 5 palline bianche e 3 palline nere, tutte numerate. Si estraggono a caso due palline da una medesima urna scelta a caso (senza reimbussolare). Sono entrambe nere. Dire, giustificando la risposta, qual è la probabilità che le palline siano state estratte dalla seconda urna?