Corso di Laurea in Ingegneria Informatica (270)
Metodi Matematici e Probabilistici (9 CFU)
Prova intermedia del 22/11/2013.

Nome e Cognome:

Compito A

1. Enunciare e dimostrare il teorema di campionanmento.

Soluzione. Vedi [MP] Lemma B.25.

2. Cos'è una misura di probabilità a distribuzione discreta e come si calcola un integrale rispetto ad essa?

Soluzione. Vedi [MP] Esercizio B.47.

3. Come si modella il lancio indipendente di infinite monete?

Soluzione. Si modella una moneta equilibrata come lo spazio probabilizzato $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ $\Omega = \{0, 1\}$, $\mathcal{E} = \mathcal{P}(\{0, 1\})$ e $\mathbb{P}(\{0\}) = \mathbb{P}(\{1\}) = 1/2$. Il lancio di infinte monete si modella con lo spazio probabilizzato $(\Omega^\infty, \mathcal{E}^\infty, \mathbb{P}^\infty)$ dove $\Omega^\infty = \{0, 1\}^\infty$ è lo spazio delle successioni binarie e $\mathcal{E}^\infty$ è la σ-algebra generata dai cilindri di $\{0, 1\}^\infty$ e $\mathbb{P}^\infty = Ber(\infty, 1/2)$ è la misura prodotto di Kolmogorov.

4. Sia $X : \Omega \to \mathbb{R}$ una variabile aleatoria non negativa. Cosa vuol dire $\mathbb{P}_X(dx) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}\,dx$?

Soluzione. Vuol dire che la variabile X ha distribuzione assolutamente continua e precisamente che valgono le tre formule tra loro equivalenti

$$\mathbb{P}_X(A) = \frac{1}{\pi}\int_A \frac{1}{1+x^2}\,dx \qquad \forall A \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$
$$\int \varphi(t)\,\mathbb{P}_X(dt) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\frac{1}{1+x^2}\,dx$$

per ogni φ $\mathcal{B}(\mathbb{R})$-misurabile non negativa o ancora che la funzione di ripartizione di X è

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} \mathbb{P}_X(dx) = \frac{1}{\pi}(\arctan t + \frac{\pi}{2}) \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

5. Enunciare il teorema di Carathéodory.

Soluzione. Vedi [MP] Teorema B.12.

6. Si vuole valutare il valor medio di un parametro misurandolo n volte, operando ogni volta in maniera indipendente. Sappiamo che la varianza dei risultati non è superiore a 25. Se la media dei risultati dell'esperimento è 7, cosa si può affermare sul valore atteso del parametro?

Soluzione. Interpretiamo gli n esperimenti come n variabili aleatorie $X_1, \ldots, X_n$ indipendenti equidistribuite definite su uno spazio probabilizzato $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ e siano $X_1(x), \ldots X_n(x)$ i valori ottenuti. Sia E il valore del parametro da stimare. Dalla legge debole dei grandi numeri

$$\mathbb{P}\left(\left\{x \in \Omega \,\middle|\, \left|\frac{\sum_{k=1}^n X_k(x)}{n} - E\right| > t\right\}\right) \le \frac{25}{t^2 n}$$

Dunque per ogni $t > 0$ si ha $|E - 7| > t$ con probabilità non superiore a $\frac{25}{t^2 n}$.

7. Sia $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ una funzione limitata, $|f(x)| \le 20\ \forall x$. Scegliendo n punti a caso (x_k) in $[0,1]^2$ secondo la distribuzione uniforme, si trova che $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f(x_k) = 8$. Cosa si può affermare su $\iint_{[0,1]^2} f(x,y)\,dxdy$?

Soluzione. Interpretiamo la procedura che sceglie gli n punti a caso come come n variabili aleatorie $X_1, \dots, X_n$ indipendenti equidistribuite definite su uno spazio probabilizzato $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ e siano $X_1(x), \dots, X_n(x)$ i punti scelti. Sia $E := \iint_{[0,1]^2} f(x,y)\,dxdy$ il valore da stimare. Utilizzando il metodo Monte Carlo, dalla legge debole dei grandi numeri

$$\mathbb{P}\Big(\Big\{x \in \Omega \,\Big|\, \Big|\frac{\sum_{k=1}^n f(X_k(x))}{n} - E\Big| > t\Big\}\Big) \le \frac{1600}{t^2 n}$$

Dunque per ogni $t > 0$ si ha $|E - 8| > t$ con probabilità non superiore a $\frac{1600}{t^2 n}$.

8. Calcolare la densità della somma di due variabili indipendenti a distribuzione uniforme su $[0,1]$.

Soluzione. Vedi [MP] Esercizio 13.27.

9. Abbiamo una successione di prove di Bernoulli indipendenti con parametro di successo p, $0 < p < 1$. Definire e calcolare la distribuzione del numero di successi su n prove.

Soluzione. Vedi [MP] paragrafo 10.e e [MP] esempio 10.2.
Il numero i successi su n prove è definito per ogni sequenza di n prove $x = (x_1, \dots, x_n) \in \{0,1\}^n$ da

$$N(x) = \#\Big\{i \in \{1, \dots n\} \,\Big|\, x_i = 1\Big\}.$$

La distribuzione dei valori di $N(x)$ è la distribuzione di Bernoulli $B(n,p)$, e quindi $\mathbb{E}[\,N\,] = np$, formula [MP] (10.6).

10. Siano X e Y variabili indipendenti uniformemente distribuite su $[-1,1]$. Calcolare la densità della variabile aleatoria 3X+Y.

Soluzione. Le variabili aleatorie $3X$ e Y sono indipendenti. La densità di Y è $\sigma(y) = \frac{1}{2}\chi_{-1,1}(y)$ e la densità di $3X$ è $\rho(x) = \frac{1}{6}\chi_{[-1,1]}(x)$. Pertanto $3X + Y$ ha distribuzione assolutamente continua, $\mathbf{P}_{3X+Y}(dt) = \tau(t)\,dt$ con

$$\tau(t) = \int \rho(t-y)\sigma(y)\,dy = \frac{1}{12}\int \chi_{[-1,1]}(t-y)\chi_{[-1,1]}(y)\,dy = \frac{1}{12\cdot 4}\begin{cases} t+2 & \text{se } -2 < t < 0, \\ 2-t & \text{se } 0 < t < 2. \end{cases}$$

11. Sia $[0,1]$ lo spazio probabilizzato dalla distribuzione uniforme. Dare una variabile aleatoria $X : [0,1] \to \mathbb{R}$ tale che $F_X(t) = \rho(t)$ dove $\rho(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0, \\ t + 1/4 & \text{se } 0 \le t < 1/2, \\ 1 & \text{se } t \ge 1/2. \end{cases}$

Soluzione. La funzione cercata è una inversa generalizzata di $\rho(t)$,

$$X(s) = \min\Big\{t \in \mathbb{R} \,\Big|\, \rho(t) \ge s\Big\}$$

In questo caso

$$X(s) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \le s \le 1/4, \\ s - 1/4 & \text{se } 1/4 < s < 3/4, \\ 1/2 & \text{se } 3/4 < s < 1. \end{cases}$$

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica (270)
Metodi Matematici e Probabilistici (9 CFU)
Prova intermedia del 22/11/2013.

Nome e Cognome:

Compito B

1. Enunciare e dimostrare il teorema di Beppo Levi.

2. Scrivere i vari modi di esprimere l'indipendenza di due variabili aleatorie.

3. Come si modellano le estrazioni del lotto di un intero anno (un'estrazione la settimana)?

4. Sia $X : \Omega \to \mathbb{R}$ una variabile aleatoria non negativa. Cosa vuol dire X è priva di memoria?

5. Enunciare il teorema di Kolmogorov.

6. Si vuole valutare il valor medio di un parametro misurandolo n volte, operando ogni volta in maniera indipendente. Sappiamo che la varianza dei risultati non è superiore a 36. Se la media dei risultati dell'esperimento è 5, cosa si può affermare sul valore atteso del parametro?

7. Sia $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ una funzione limitata, $|f(x)| \leq 20 \ \forall x$. Scegliendo n punti a caso (x_k) in $[0,1]^2$ secondo la distribuzione uniforme, si trova che $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)$ =4. Cosa si può affermare su $\iint_{[0,1]^2} f(x,y)\,dxdy$?

8. Calcolare la densità della somma di due v.a. a distribuzione assolutamente continue indipendenti.

9. Abbiamo una successione di prove di Bernoulli indipendenti con parametro di successo p, $0 < p < 1$. Definire e calcolare la probabilità di avere almeno 1 successo in n prove.

10. Siano X e Y variabili indipendenti uniformemente distribuite su $[-1,1]$. Calcolare la densità della variabile aleatoria X+2Y.

11. Sia $[0,1]$ lo spazio probabilizzato dalla distribuzione uniforme. Dare una variabile aleatoria $X : [0,1] \to \mathbb{R}$ tale che $F_X(t) = \rho(t)$ dove $\rho(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0, \\ t + 1/3 & \text{se } 0 \leq t < 1/2, \\ 1 & \text{se } t \geq 1/2. \end{cases}$

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica (270)
Metodi Matematici e Probabilistici (9 CFU)
Prova intermedia del 22/11/2013.

Nome e Cognome:

Compito C

1. Enunciare e dimostrare la disuguaglianza di Chebyshev.

2. Cos'è la funzione di ripartizione di una variabile aleatoria? Quali sono le sue proprietà?

3. Come si modella il lancio di una moneta?

4. Sia $X : \Omega \to \mathbb{R}$ una variabile aleatoria non negativa. Cosa vuol dire $\mathbb{P}_X = \exp(\lambda)$?

5. Enunciare la formula di Cavalieri.

6. Si vuole valutare il valor medio di un parametro misurandolo n volte, operando ogni volta in maniera indipendente. Sappiamo che la varianza dei risultati non è superiore a 36. Se la media dei risultati dell'esperimento è 6, cosa si può affermare sul valore atteso del parametro?

7. Sia $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ una funzione limitata, $|f(x)| \leq 20\ \forall x$. Scegliendo n punti a caso (x_k) in $[0,1]^2$ secondo la distribuzione uniforme, si trova che $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)$ =10. Cosa si può affermare su $\iint_{[0,1]^2} f(x,y)\,dxdy$?

8. Calcolare la densità del prodotto di due v.a. a distribuzione assolutamente continue indipendenti.

9. Abbiamo una successione di prove di Bernoulli indipendenti con parametro di successo p, $0 < p < 1$. Definire e calcolare il numero medio di successi su n prove.

10. Siano X e Y variabili indipendenti uniformemente distribuite su $[-1,1]$. Calcolare la densità della variabile aleatoria X+Y.

11. Sia $[0,1]$ lo spazio probabilizzato dalla distribuzione uniforme. Dare una variabile aleatoria $X : [0,1] \to \mathbb{R}$ tale che $F_X(t) = \rho(t)$ dove $\rho(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0, \\ \frac{1}{2}(t+1) & \text{se } 0 \leq t < 1, \\ 1 & \text{se } t \geq 1. \end{cases}$

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica (270)
Metodi Matematici e Probabilistici (9 CFU)
Prova intermedia del 22/11/2013.

Nome e Cognome:

Compito D

1. Enunciare e dimostrare la formula di composizione.

2. Cos'è una misura di probabilità a distribuzione assolutamente continua e come calcola un integrale rispetto ad essa?

3. Come si modella il lancio indipendente di n monete?

4. Sia $X : \Omega \to \mathbb{R}$ una variabile aleatoria non negativa. Cosa vuol dire $\mathbb{P}_X = N(m, \sigma^2)$?

5. Enunciare il teorema di Fubini.

6. Si vuole valutare il valor medio di un parametro misurandolo n volte, operando ogni volta in maniera indipendente. Sappiamo che la varianza dei risultati non è superiore a 16. Se la media dei risultati dell'esperimento è 8, cosa si può affermare sul valore atteso del parametro?

7. Sia $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ una funzione limitata, $|f(x)| \leq 20\ \forall x$. Scegliendo n punti a caso (x_k) in $[0,1]^2$ secondo la distribuzione uniforme, si trova che $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)$ =12. Cosa si può affermare su $\iint_{[0,1]^2} f(x,y)\,dxdy$?

8. Calcolare la densità del minimo di due variabili a distribuzione esponenziale indipendenti.

9. Abbiamo una successione di prove di Bernoulli indipendenti con parametro di successo p, $0 < p < 1$. Definire e calcolare la frequenza dei successi su n prove.

10. Siano X e Y variabili indipendenti uniformemente distribuite su $[-1,1]$. Calcolare la densità della variabile aleatoria 2X+Y.

11. Sia $[0,1]$ lo spazio probabilizzato dalla distribuzione uniforme. Dare una variabile aleatoria $X : [0,1] \to \mathbb{R}$ tale che $F_X(t) = \rho(t)$ dove $\rho(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0, \\ t + 1/2 & \text{se } 0 \leq t < 1/2, \\ 1 & \text{se } t \geq 1/2. \end{cases}$