Corso di Laurea in Ingegneria Informatica (270)
Metodi Matematici e Probabilistici (9 CFU)
Prova intermedia del 20/12/2013.

Compito A

1. Calcolare, se possibile, $\displaystyle\int_{\partial^+ B(0,1)} \frac{\sin z}{z^2}\, dz.$

Soluzione La funzione $\sin z$ è olomorfa su tutto $\mathbb{C}$ e $\sin z = z - z^3/3! + \cdots$. Pertanto $f(z) := \sin z/z^2 = \frac{1}{z} - \frac{z}{3!} + \cdots$. Il residuo in zero, il coefficiente del termine $1/z$ è dunque 1. Pertanto

$$\int_{\partial^+ B(0,1)} \frac{\sin z}{z^2}\, dz = 2\pi i \operatorname{Res}\left(f(z), 0\right) = 2\pi i.$$

2. Calcolare, se possibile, la somma della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n+3} z^n.$

Soluzione Si ha $\frac{n+2}{n+3} = 1 - \frac{1}{n+3}$. D'altra parte

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n = \frac{z}{1-z} \qquad \text{se } |z| < 1,$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+3} z^n = \frac{1}{z^3}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n+3}}{n+3} = \frac{1}{z^3}\Big(-\log(1-z) - z - \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3}\Big) \qquad \text{se } |z| < 1.$$

Pertanto la somma $S(z)$ della serie data è

$$S(z) = \frac{z}{1-z} + \frac{1}{z^3}\Big(\log(1-z) + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3}\Big) \qquad \text{se } |z| < 1.$$

Per $|z| > 1$ la serie data non converge. Questo segue facilmente o calcolando il suo raggio di convergenza, che è uno, o osservando che la funzione $S(z)$ è singolare nel punto $z = 1$.

3. Enunciare il teorema di Cauchy.

Soluzione Vedi [GM] Teorema 14.6.

4. Enunciare e dimostrare il teorema di Liouville.

Soluzione Vedi [GM] Teorema 15.1.

5. Sia $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ una serie di potenze. Cosa sono le stime di Cauchy per una funzione olomorfa?

Soluzione Siano $\Omega \subset \mathbb{C}$ e $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Sia $z_0 \in \Omega$ e $\rho := \operatorname{dist}(z_0, \partial\Omega)$. Allora per ogni intero $k \geq 1$ e ogni $r < \rho$

$$|f^{(k)}(z_0)| \leq \frac{k!}{r^k} \sup_{z \in \partial^+ B(z_0, r)} |f(z)|.$$

6. Calcolare, se possibile, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{16 + x^4}\, dx.$

Soluzione Sia $a > 0$. calcoliamo $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a^4+x^4}\, dx$. Cambiando variabili con $s = x/a$, si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a^4 + x^4}\, dx = \frac{1}{a^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + x^4}\, dx$$

Resta dunque da calcolare $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^4}\,dx$. Procediamo con il metodo dei residui. Sia $f(z) := \frac{1}{1+z^4}$. $f(z)$ è olomorfa su tutto $\mathbb{C}$ eccetto che nei quattro punti $z_k = e^{i\pi/4+k\pi/2}$, $k = 0,1,2,3$. Poiché $|1+z^4| \geq |z^4| - 1$ se $|z| > 1$,

$$|f(z)| = \left|\frac{1}{1+z^4}\right| \leq \frac{1}{|z|^4 - 1} \qquad \text{se } |z| > 1.$$

Si applica perciò la formula dei resisui, vedi [GM] Sezione 18.b, e

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^4}\,dx = 2\pi i(\mathrm{Res}\,(f(z), z_0) + \mathrm{Res}\,(f(z), z_1)).$$

Ora z_0 e z_1 sono poli smplici per $f(z)$, per cui

$$\mathrm{Res}\,(f(z), z_0) + \mathrm{Res}\,(f(z), z_1) = \frac{1}{4z_0^3} + \frac{1}{4z_1^3} = \frac{1}{4z_1} + \frac{1}{4z_0} = \frac{1}{4}(z_2 + z_3) = \frac{-i}{4\sqrt{2}}.$$

Pertanto

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^4}\,dx = 2\pi i\,\frac{-i\sqrt{2}}{4} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

e l'integrale cercato vale $\frac{\pi}{8\sqrt{2}}$.

7. Sia $\{X_n\}$ una catena di Markov a stati finiti S con matrice di transizione $\mathbf{P}$. Cos'è il numero di visite in uno stato e cosa si può dire sul numero medio di visite in uno stato?

Soluzione Vedi [MP] Sezioni 20.b e 20.c.

8. Sia $\{X_n\}$ una catena di Markov a stati finiti S con matrice di transizione $\mathbf{P}$. Enunciare le proprietà dei successivi tempi di ritorno per $\{X_n\}$.

Soluzione Vedi [MP] Teorema 21.1.

9. Sia $\mathbf{P}$ una matrice stocastica. Come si simula una catena di Markov con matrice di transizione $\mathbf{P}$?

Soluzione Vedi [MP] Teorema 19.8.

10. Sia $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ una funzione limitata, $|f(x)| \leq 1$ $\forall x$. Scegliendo n punti a caso (x_k) in $[0,1]^2$ secondo la distribuzione uniforme, si trova che $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f(x_k) = -.2$. Cosa si può affermare su $\iint_{[0,1]^2} f(x,y)\,dxdy$?

Soluzione Sia $E = \iint_{[0,1]^2} f(x,y)\,dxdy$. Per ogni $t > 0$ la probabilità che $|E + 0.2| > t$ è inferiore a $\frac{4}{t^2 n}$.

11. Sia $[0,1]$ munito della distribuzione uniforme. Trovare una variabile aleatoria $X : [0,1] \to \mathbb{R}$ tale che $F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0, \\ \frac{2}{\pi}\arctan t & \text{se } t > 0 \end{cases}$.

Soluzione

$$X(s) = \tan\left(\frac{\pi}{2}s\right), \qquad s \in]0,1[.$$