20.d Calcolo delle potenze: metodo di Putzer

La decomposizione di Jordan di $\mathbf{A} \in M_{k,k}(\mathbb{C})$, $\mathbf{A} = \mathbf{SJS}^{-1}$, dà una descrizione analiticamente soddisfacente della successione $\{\mathbf{A}^n\}$ delle sue potenze. È un fatto però che, da un punto di vista numerico, il calcolo preventivo delle $\mathbf{S}$ e $\mathbf{S}^{-1}$ a partire da $\mathbf{A}$ è spesso instabile.

Sappiamo, vedi Proposizione 6.13, che $\mathbf{A}$ è simile ad una matrice triangolare superiore $\mathbf{T}$, $\mathbf{A} = \mathbf{STS}^{-1}$. Poiché $\mathbf{T}$ triangolare superiore, la ricorrenza $\mathbf{Y}_{n+1} = \mathbf{TY}_n$ $\forall n$ è risolubile iterativamente nell'incognita $\{\mathbf{Y}_n\} \subset M_{k,k}(\mathbb{C})$ partendo dall'ultima equazione. Se $\{\mathbf{Y}_n\}$ è una tale soluzione, allora $\{\mathbf{X}_n\}$, $\mathbf{X}_n := \mathbf{S}^{-1}\mathbf{Y}_n$, è soluzione di

$$\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{Y}_{n+1} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{TY}_n = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{TSX}_n = \mathbf{AX}_n.$$

In questo modo le ricorrenze soluzioni di $\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{AX}_n$, in particolare le potenze di $\mathbf{A}$, vengono calcolate a partire dalla conoscenza delle matrici $\mathbf{T}$, $\mathbf{S}$ della decomposizione di Schur di $\mathbf{A}$ mediante la risoluzione di k ricorrenze scalari del primo ordine.

Il seguente metodo, noto come *metodo di Putzer*, calcola le potenze di $\mathbf{A}$ mediante la risoluzione di k ricorrenze scalari del primo ordine a partire dalla sola conoscenza degli autovalori di $\mathbf{A}$.

Sia $\mathbf{A} \in M_{k,k}(\mathbb{C})$ e siano $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ i k autovalori di $\mathbf{A}$ elencati in un ordine arbitrario. Siano $\mathbf{M}_0, \dots \mathbf{M}_k \in M_{k,k}(\mathbb{C})$ definite da

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_0 &= \mathrm{Id},\\
\mathbf{M}_1 &= (\mathbf{A} - \lambda_1 \,\mathrm{Id})\,\mathbf{M}_0\\
\mathbf{M}_2 &= (\mathbf{A} - \lambda_2 \,\mathrm{Id})\,\mathbf{M}_1\\
&\dots\\
\mathbf{M}_k &= (\mathbf{A} - \lambda_k \,\mathrm{Id})\,\mathbf{M}_{k-1}.
\end{aligned} \tag{20.13}$$

Osserviamo che $\mathbf{M}_k = p_{\mathbf{A}}(\mathbf{A})$ è il polinomio caratteristico di $\mathbf{A}$ valutato su $\mathbf{A}$ e pertanto $\mathbf{M}_k = 0$ per il teorema di Cayley–Hamilton. Siano poi $\{c_1(n)\}, \dots, \{c_k(n)\}$ le successioni definite dalle ricorrenze lineari *scalari* del primo ordine

$$\begin{aligned}
&c_1(n+1) = \lambda_1\, c_1(n), && c_1(0) = 1,\\
&c_2(n+1) = \lambda_2\, c_2(n) + c_1(n), && c_2(0) = 0\\
&c_3(n+1) = \lambda_3\, c_3(n) + c_2(n), && c_3(0) = 0\\
&\dots\\
&c_k(n+1) = \lambda_k\, c_k(n) + c_{k-1}(n), && c_k(0) = 0.
\end{aligned} \tag{20.14}$$

20.7 Teorema (Decomposizione di Putzer). *Per ogni $n \geq 0$ si ha $\mathbf{A}^n = \sum_{i=0}^{k-1} c_{i+1}(n)\,\mathbf{M}_i$.*

Dimostrazione. Sia $\mathbf{S}_n := \sum_{i=0}^{k-1} c_{i+1}(n)\,\mathbf{M}_i$. Si ha $\mathbf{AM}_i = \mathbf{M}_{i+1} + \lambda_{i+1}\mathbf{M}_i$ per ogni $i = 0, \dots, k-1$. Pertanto

$$
\begin{aligned}
\mathbf{S}_{n+1} - \mathbf{A}\mathbf{S}_n &= \sum_{i=0}^{k-1} \Big(c_{i+1}(n+1)\mathbf{M}_i - c_{i+1}(n)(\mathbf{M}_{i+1} + \lambda_{i+1}\mathbf{M}_i) \Big) \\
&= \sum_{i=0}^{k-1} \Big(c_{i+1}(n+1) - \lambda_{i+1} c_{i+1}(n) \Big)\mathbf{M}_i - \sum_{i=0}^{k-1} c_{i+1}(n)\mathbf{M}_{i+1} \\
&= \sum_{i=1}^{k-1} c_i(n)\mathbf{M}_i - \sum_{i=1}^{k} c_i(n)\mathbf{M}_i \\
&= -c_k(n)\mathbf{M}_k = 0.
\end{aligned}
$$

Dunque $\{\mathbf{S}_n\}$ è la soluzione della ricorrenza

$$
\begin{cases}
\mathbf{S}_{n+1} = \mathbf{A}\mathbf{S}_n, \\
\mathbf{S}_0 = \mathrm{Id},
\end{cases}
$$

i.e. $\mathbf{S}_n = \mathbf{A}^n \ \forall n \geq 0$. □

20.8 Esercizio. Calcolare le potenze della matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ associata alla successione di Fibonacci, vedi Esercizio 20.6, utilizzando la formula di Putzer.

Soluzione. La matrice $\mathbf{A}$ ha due autovalori distinti

$$\lambda = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \qquad \mu = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Siano dunque

$$\mathbf{M}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{M}_1 = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

le matrici in (20.13). Le successioni $\{c_1(n)\}$ e $\{c_2(n)\}$ in (20.14) sono rispettivamente la successione soluzione di $c_1(n+1) = \lambda c_1(n)$, $c_1(0) = 1$, i.e.

$$\{c_1(n)\} = \{\lambda^n\}$$

e la successione soluzione di

$$
\begin{cases}
c_2(n+1) = \mu c_2(n) + c_1(n), \\
c_2(0) = 0,
\end{cases}
$$

i.e., vedi Esempio 20.4,

$$c_2(n) = \sum_{j=0}^{n-1} \mu^{n-1-j}\lambda^j = \mu^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \Big(\frac{\lambda}{\mu}\Big)^j = \frac{\lambda^n - \mu^n}{\lambda - \mu}.$$

Pertanto, vedi Teorema 20.7,

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A}^n &= \lambda^n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{\lambda^n - \mu^n}{\lambda - \mu} \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \\
&= \dots = \frac{1}{\lambda - \mu} \begin{pmatrix} \lambda^{n-1} - \mu^{n-1} & \lambda^n - \mu^n \\ \lambda^n - \mu^n & \lambda^{n+1} - \mu^{n+1} \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Nell'eseguire i calcoli omessi, fa comodo osservare che $\lambda + \mu = 1$ e $\lambda\mu = 1$.