Corso di Metodi Matematici e Probabilistici
Corso di Laurea in Ingegneria Informatica Anno Accademico 2013-2014

Esercizi proposti, 1

1. Sia $\mathbf{A}$ la matrice $n \times n$ i cui elementi sulla diagonale immediatamente sopra la diagonale principale valgono 1 e gli altri valgono zero. Calcolare $\mathbf{A}^n$ e dedurne che $\det \mathbf{A} = 0$. [*Suggerimento*: Scrivere gli elementi di $\mathbf{A}$ con il simbolo di Kronecker e calcolare $\mathbf{A}^2$.]

2. Sia $\mathbf{B} \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ data da

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ s & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & s & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix}.$$

Provare che $\det \mathbf{B} = (-1)^n$.

3. Sia $\mathbf{A} \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ data da

$$\mathbf{A}_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{pmatrix}.$$

Provare che $\det(s\,\mathrm{id} - \mathbf{A}_n) = s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n$.
[*Suggerimento*: Provare la tesi per $n = 2$ e $n = 3$. Per un generico n, detto $y_n = \det(s\,\mathrm{id} - \mathbf{A}_n)$, provare sviluppando il determinante lungo la prima colonna che $\{y_n\}$ è la soluzione di una ricorrenza lineare.]

4. Risolvere la ricorrenza

$$\begin{cases} X_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} X_n + \begin{pmatrix} 1 \\ 2^{-n} \end{pmatrix}, \\ X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

5. Calcolare le potenze della matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

e direttamente ($\mathbf{A}$ è triangolare superiore) e utilizzando la formula di Putzer.

6. Calcolare il piano di regressione lineare $z = ax + by + c$ per i dati $(1, 0, 2)$, $(1, 1, 2)$, $(2, 3, 3)$, $(2, 1, 1)$, $(0, 1, 3)$ in $\mathbb{R}^3$.

7. Siano λ_1, $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$ gli autovalori di una matrice $\mathbf{A} \in M_{n,n}(\mathbb{C})$. Mostrare che $\det \mathbf{A}$ è il prodotto degli autovalori, $\det \mathbf{A} = \lambda_1\, \lambda_2\, \cdots\, \lambda_n$ e che la traccia di $\mathbf{A}$, definita da $\mathrm{tr}\, \mathbf{A} := \sum_{i=1}^{n} \mathbf{A}_i^i$, è la somma degli autovalori. [*Suggerimento*: Considerare il polinomio caratteristico di $\mathbf{A}$.]

8. Sia $A : X \to X$ un operatore lineare su uno spazio euclideo X. Mostrare che A e A^* hanno gli stessi autovalori.

9. Sia $A : X \to X$ un operatore lineare su uno spazio euclideo X. Mostrare che A è non singolare se e solo se 0 non è un autovalore per A.

10. Sia $A : X \to X$ un operatore lineare autoaggiunto su uno spazio euclideo X. Sia $u_1, u_2, \dots, u_n$ una base ortonormale di X di autovettori di A e siano $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ i corrispondenti autovettori. Detta $A^+ : X \to X$ l'inversa di Moore–Penrose di A, provare che

$$A^+(y) = \sum_{\lambda_i \neq 0} \frac{1}{\lambda_i} (y|u_i) u_i \qquad \forall y \in X.$$

11. Sia $A : X \to X$ un operatore lineare autoaggiunto su uno spazio euclideo o hermitiano X. Siano $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ i valori singolari di A. Provare che per ogni $i = 1, \dots, n$ esiste un autovalore λ di A tale che $|\lambda| = \mu_i$.

12. Sia $A : X \to X$ un operatore lineare su uno spazio euclideo o hermitiano X. Siano $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_n$ i valori singolari di A. Provare che per ogni autovalore λ di A si ha $\mu_1 \leq |\lambda| \leq \mu_n$. Mostrare con un esempio che le disuguaglianze precedenti non possono in generale essere sostituite da uguaglianze.

13. Sia $A : X \to Y$ un operatore lineare tra spazi euclidei o hermitiani. Se $\dim X < \dim Y$, mostrare che $\det(AA^*) = 0$.

14. Sia $\mathbf{A} \in M_{N,n}(\mathbb{R})$ una matrice e siano $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_n$ i valori singolari dell'operatore $x \mapsto \mathbf{A}x$.

1. Mostrare che
$$\mu_n = ||\mathbf{A}||$$
dove $||\mathbf{A}|| := \sup_{x \neq 0} \frac{|\mathbf{A}x|}{x}$. $||\mathbf{A}||$ è una norma e si chiama *coefficiente di massima dilatazione* di $\mathbf{A}$.

2. Mostrare che
$$||\mathbf{A}||_2^2 = \mu_1^2 + \mu_2^2 + \dots + \mu_n^2$$
dove $||\mathbf{A}||_2^2 := \sum_{i,j=1}^n (\mathbf{A}_j^i)^2$. $||\mathbf{A}||_2$ è una norma, detta *norma due* della matrice $\mathbf{A}$.

Dedurne che
$$||\mathbf{A}|| \leq ||\mathbf{A}||_2 \leq \sqrt{\min(n, N)} ||\mathbf{A}||.$$
[*Suggerimento*: Calcolare $||\mathbf{A}||^2$ e osservare che $||\mathbf{A}||_2^2 = \mathrm{tr}\,(\mathbf{A}^T\mathbf{A})$.]

15. Sia dato un sistema meccanico costituito da tre punti materiali aventi masse rispettivamente $1, 2, 3$ interagenti fra loro mediante forse elastiche di richiamo seguenti la legge di Hooke. Indichiamo con k_{ij} la costante elastica della forza di interazione tra la massa i e la massa j. Sapendo che $k_{12} = 2$, $k_{13} = 3$ e $k_{23} = 1$, calcolare le frequenze proprie di vibrazione del sistema.