18.d Somme di serie numeriche

18.16 Teorema (Somme di serie di funzioni). *Sia $f(z)$ una funzione olomorfa su $\mathbb{C}$ con eventualmente un numero finito di singolarità fuori dai punti $\pm 1, \pm 2, \dots$ e tale che per qualche $M, \alpha > 1$ si abbia $|f(z)| \le M/|z|^\alpha$ per ogni z con $|z| >> 1$. Allora la serie $\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty} |f(n)|$ converge e*

$$\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{+\infty} f(n) = - \sum_{\substack{z=0 \text{ oppure}\\ z \text{ singolarità di } f}} \mathrm{Res}\Big(\frac{\pi f(z)}{\tan(\pi z)}, z\Big),$$

$$\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{+\infty} (-1)^n f(n) = - \sum_{\substack{z=0 \text{ oppure}\\ z \text{ singolarità di } f}} \mathrm{Res}\Big(\frac{\pi f(z)}{\sin(\pi z)}, z\Big),$$

Premettiamo la

18.17 Proposizione. *Sia $f : \mathbb{C} \setminus \{|z| \ge R_0\} \to \mathbb{C}$ continua con $|f(z)| \le M/|z|^\alpha$ per qualche $M > 0$ e $\alpha > 1$ e sia Q_n il quadrato*

$$Q_n := \Big\{ z = x + iy \,\Big|\, |x|, |y| \le n + \frac{1}{2} \Big\}.$$

Allora

$$\int_{\partial^+ Q_n} f(z) \frac{1}{\tan(\pi z)}\, dz \to 0 \qquad \text{per } n \to \infty,$$

$$\int_{\partial^+ Q_n} f(z) \frac{1}{\sin(\pi z)}\, dz \to 0 \qquad \text{per } n \to \infty.$$

Dimostrazione. Sia n_0 così grande che $B(0, R_0) \subset Q_{n_0}$. Verificheremo a breve che $1/\tan(\pi z)$ *è limitata su ∂Q_n indipendentemente da n per ogni $n \ge n_0$*. Se C è una tale limitazione, allora

$$\Big| \int_{\partial^+ Q_n} f(z) \cot(\pi z)\, dz \Big| \le \frac{8\, C\, M}{\big(n + \frac{1}{2}\big)^\alpha} \Big(n + \frac{1}{2}\Big) \to 0$$

per $n \to \infty$.

Sia $z = x + iy \in \partial Q_n$; distinguiamo due casi: se $|y| \ge 1/2$ allora, vedi la (13.7),

$$|\cot(\pi z)| \le \coth(\pi |y|) = \frac{1 + e^{-2\pi|y|}}{1 - e^{-2\pi|y|}} \le \frac{1 + e^{-\pi}}{1 - e^{-\pi}} =: C_1$$

mentre se $|y| < 1/2$, allora necessariamente $|x| = n + 1/2$ e quindi $\cot(\pi(x + iy)) = \cot(\pi/2 + i\pi y) = \tanh(\pi y)$ da cui

$$|\cot(\pi z)| \le \tanh \pi |y| \le 1.$$

In definitiva $|\cot(\pi z)| \le C := \max(C_1, 1)$ su ∂Q_n.

Si procede in modo analogo per il secondo limite osservando che anche $1/\sin(\pi z)$ è limitata su ∂Q_n indipendentemente da n per ogni $n \ge n_0$. □

Dimostrazione del Teorema 18.16. La stima di decadimento all'infinito di $|f(z)|$ implica immediatamente la convergenza delle serie $\sum_{n=1}^\infty |f(n)|$ e $\sum_{n=1}^\infty |f(-n)|$.

Dimostriamo la prima uguaglianza. La seconda uguaglianza si prova in modo simile. Sia $g(z) = f(z)\pi \cot(\pi z)$ e sia $Q_n := \Big\{ x + iy \,|\, |x|, |y| \le n + 1/2 \Big\}$. Se n è sufficientemente grande,

$g(z)$ ha poli solo in Q_n e sull'asse reale. Segue dal teorema dei residui e dalla Proposizione 18.17 che

$$\sum_{z\in Q_n} \operatorname{Res}\Big(\pi f(z)\cot(\pi z), z\Big) \to 0 \qquad \text{per } n\to\infty.$$

Poiché i punti singolari di $\cot(\pi z)$ non nulli sono gli interi non nulli e sono tutti poli semplici, e poiché f è per ipotesi olomorfa in un intorno di ciascuno di essi,

$$\operatorname{Res}(g(z),k) = \operatorname{Res}\Big(f(z)\pi\frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}, k\Big) = f(k)\frac{\pi\cos(\pi k)}{\pi\cos(\pi k)} = f(k) \qquad \forall k\in\mathbb{Z},\ k\neq 0.$$

Perciò

$$\sum_{\substack{k=-n\\ k\neq 0}}^{n} f(k) + \sum_{\substack{z\in Q_n,\ z=0\\ z\text{singolarità di } f}} \operatorname{Res}(g(z),z) \to 0 \qquad \text{per } n\to\infty,$$

cioè la tesi. □

18.18 Esercizio (Eulero). Sia $k\geq 1$. Calcolare $\zeta(2k) := \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2k}}$.

Soluzione. Si considera la funzione $f_k(z) := \frac{\pi\cos(\pi z)}{z^{2k}\sin(\pi z)} = \frac{\pi\cot(\pi z)}{z^{2k}}$. La funzione $f_k(z)$ è una funzione olomorfa con singlarità polari nei punti $z=\{0,\pm1,\pm2,\dots\}$. Segue dal Teorema 18.16 che

$$2\zeta(2k) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2k}} = -\operatorname{Res}(f_k(z),0).$$

Resta da calcolare il residuo di f_k in 0 che è un polo di ordine $2k+1$ per $f_k(z)$. Per questo, ricordando che

$$\cot z = 2i\Big(\frac{1}{2}+\frac{1}{e^{2iz}-1}\Big),$$

vedi Esercizio 13.10, si ha

$$\operatorname{Res}(f_k(z),0) = \operatorname{Res}\Big(\frac{2\pi i}{z^{2k}(e^{2\pi iz}-1)},0\Big).$$

Ora, vedi Esercizio 17.14,

$$\frac{1}{z^{2k}}\frac{2\pi i}{e^{2\pi iz}-1} = \frac{1}{z^{2k+1}}\frac{2\pi iz}{e^{2\pi iz}-1} = \frac{1}{z^{2k+1}}\sum_{j=0}^{\infty}B_j\frac{(2\pi i)^j z^j}{j!} = \sum_{j=0}^{\infty}B_j\frac{(2\pi i)^j z^{j-2k-1}}{j!}.$$

Il residuo di $\frac{2\pi i}{z^{2k}(e^{2\pi iz}-1)}$ in 0 è dunque il coefficiente di $1/z$ nello sviluppo precedente, cioè

$$\operatorname{Res}\Big(\frac{2\pi i}{z^{2k}(e^{2\pi iz}-1)},0\Big) = \frac{(-1)^k 2^{2k}}{(2k)!}B_{2k}\pi^{2k}$$

e in definitiva

$$\zeta(2k) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2k}} = \frac{(-1)^{k-1}2^{2k-1}}{(2k)!}B_{2k}\pi^{2k}.$$

Per $k=1,2$ si ottiene

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

18.19 Esercizio. Calcolare

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{n^2+a^2} = \frac{\pi}{a}\coth a,\ \ a\in\mathbb{R},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12},$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{n^4+4a^4} = \frac{\pi}{4a^3}\Big(\frac{\sinh 2\pi a+\sin 2\pi a}{\cosh 2\pi a-\cos 2\pi a}\Big).$$