Corso di Laurea in Ingegneria Informatica (270)
Analisi Matematica (12 CFU)
Esercitazione del 19/05/2014. Soluzioni.

1.*Studiare il comportamento (dire se converge o diverge e eventualmente stimare la somma) della serie* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n-\sqrt{n}}\int_0^n e^{-x^2}\,dx$, *giustificando la risposta.*

Soluzione. Per ogni $n \geq 1$ si ha $\sqrt{n} \leq 2^{n-1}$ e quindi $2^n - \sqrt{n} \geq 2^n - 2^{n-1} = 2^n/2$. Inoltre, $n \leq (3/2)^n$ e quindi $\frac{n}{2^n-\sqrt{n}} \leq 2\frac{1}{2^n}(\frac{3}{2})^n = 2(\frac{3}{4})^n$. D'altra parte $\int_0^n e^{-x^2}\,dx \leq \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \leq 2$. In definitiva, si ha la stima

$$\frac{n}{2^n-\sqrt{n}}\int_0^n e^{-x^2}\,dx \leq 4\Big(\frac{3}{4}\Big)^n.$$

Poiché la serie geometrica $\sum_{n=1}^\infty\left(\frac{3}{4}\right)^n$ converge ed ha somma 3, per il criterio del confronto la serie data converge ed ha somma non superiore a 12. •

2. *Siano (X,d) uno spazio metrico, $A \subset X$ e $d(x,A)$ la distanza di $x \in X$ da A.*

- *Caratterizzare i punti $x \in X$ tali che $d(x,A) = 0$.*
- *Dimostrare che se A è aperto e $K \subset A$ è compatto, allora $d(K,A) := \inf_{x\in K} d(x,\partial A) > 0$.*

Soluzione. (i) $d(x,A) = 0$ se e solo se x è nella chiusura di A, $\{x \in X \mid d(x,A) = 0\} = \overline{A}$, vedi [GM] vol.2 Corollario 5.8.
(ii) La funzione $f(x) := d(x,\partial A)$ è continua e K è compatto. Dunque per il teorema di Weierstrass esiste $\overline{x} \in K$ tale che $\inf_{x\in K} d(x,\partial A) = d(\overline{x},\partial A)$. Ora per ipotesi $K \subset A$ e A è aperto, dunque $K \cap \partial A = \emptyset$. Pertanto $\overline{x} \notin \partial A$. Se per assurdo fosse $d(\overline{x},\partial A) = 0$, $\overline{x}$ apparterrebbe a $\overline{\partial A}$ cioè a ∂A perché ∂A è chiuso, un assurdo. •

3. *Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = (y^2+1)\log(1+2x^2)$. Determinarne l'immagine, giustificando la risposta.*
Soluzione. La funzione data è continua su $\mathbb{R}^2$ e non negativa. L'immagine di $\mathbb{R}^n$ tramite f è dunque un intervallo generalizzato $A \subset [0,+\infty[$. Poiché $f(0,1) = 0$, 0 è il valore minimo assunto da f. Inoltre sui punti della successione $\{x_n\}$, $x_n = (1,n)$, la funzione vale $f(x_n) = (1+n^2)\log 3$ da cui $f(x_n) \to +\infty$. Pertanto f assume valori arbitrariamente grandi. Si conclude che $A = f(\mathbb{R}^2) = [0,\infty[$. •

4. *Enunciare il teorema di caratterizzazione variazionale degli autovalori di una matrice simmetrica.*
Soluzione. Vedi [GM] Vol. 2, Teorema 9.12. •

5. *Sia $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ un'applicazione lineare. Dimostrare che A è un'aplicazione lipschitziana. Dare una caratterizzazione della sua costante di Lipschitz e un algoritmo per il suo calcolo.*
Soluzione. Vedi [GM] Vol.2, 5.e. e Teorema 9.12. •

6. *Sia $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ la curva data da $\gamma(t) = (t, t^3 - t, \arctan t)^T$. Determinare il piano di $\mathbb{R}^3$ passante per $\gamma(1)$ tangente a γ in $\gamma(1)$ e parallelo al vettore $\gamma''(1)$.*
Soluzione. Si ha $\gamma(1) = (1, 0, \pi/4)^T$,

$$\gamma'(t) = \Big(1, 3t^2-1, \frac{1}{1+t^2}\Big)^T, \qquad \gamma''(t) = \Big(0, 4t, \frac{-2t}{(1+t^2)^2}\Big)^T,$$

e quindi $\gamma'(1) = (1,2,1/2)^T$ e $\gamma''(1) = (0,4,-1/2)^T$. L'equazione parametrica del piano cercato è

$$(t,s) \mapsto \phi(t,s) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \pi/4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1/2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \pi/4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix}.$$

$\bullet$

7. *Sia* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definita da* $f(x,y) := xy - x\cos y$. *Calcolare* $\dfrac{\partial f}{\partial v}(1, \pi/2)$ *nella direzione* $v := (1/2, \sqrt{3}/2)$.

Soluzione. La funzione data è di classe C^∞ e dunque differenziabile. La matrice jacobiana di f in $(1, \pi/2)$ è $\mathbf{D}f(1,\pi/2) = (\pi/2, 2)$. Pertanto

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \mathbf{D}f(1,\pi/2)v = (\pi/2, 2)\begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} = \pi/4 + \sqrt{3}.$$

$\bullet$

8. *Siano* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *e* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *differenziabili. Calcolare* $\dfrac{d}{dx}\Big(f(x, g(x))\Big)(x)$.

Soluzione. Se denoto con (u,v) le variabili indipendenti di f, la regola della catena dà

$$\begin{aligned}\frac{df(x,g(x))}{dx}(x) &= \frac{\partial f}{\partial u}(x,g(x))\frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v}(x,g(x))\frac{dv}{dx} \\ &= \frac{\partial f}{\partial u}(x,g(x)) + \frac{\partial f}{\partial v}(x,g(x))\, g'(x).\end{aligned}$$

$\bullet$

9. *Scrivere l'equazione del piano tangente alla linea di livello* $\Gamma := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, e^y + 2ye^z - zxe^y = x^2 - 2\}$ *nel punto* $(2,0,0)^T$.

Soluzione. La funzione $f(x,y,z) := xe^y + 2ye^z - zxe^y - x^2 + 2$ è di classe $C^1(\mathbb{R}^3)$. Posto $P_0 = (2,0,0)^T$, si ha $\mathbf{D}f(P_0) = (e^y - 2x - ze^y, xe^y + 2e^z - zxe^y, 2ye^z - xe^y)_{|P_0} = (-3, 4, -2)$. Pertanto per il teorema delle funzioni implicite, la linea di livello data Γ è in un intorno di P_0 una 2-sottovarietà regolare di $\mathbb{R}^3$ con piano tangente in P_0 dato da

$$\operatorname{Tan}_{P_0}\Gamma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, (-3,4,-2)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0\right\} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, -3x + 4y - 2z = 0\right\}$$

$\bullet$

10. *Sia* S *la superficie di* $\mathbb{R}^3$ *parametrizzata dalla funzione* $\phi(t,\theta) = (t^2, t, t^2\sin\theta)^T$, $(t,\theta) \in \mathbb{R}\times]-\pi,\pi[$. *Scrivere l'equazione dello spazio tangente ad* S *nel punto* $P = \phi(1,0)$.

Soluzione. La parametrizzazione $\phi(t,\theta)$ è di classe $C^1(\mathbb{R}^2)$. Inoltre

$$\mathbf{D}\phi(t,\theta) = \begin{pmatrix} 2t & 0 \\ 1 & 0 \\ 2t\sin\theta & t^2\cos\theta \end{pmatrix} \qquad \text{e quindi} \qquad \mathbf{D}\phi(1,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Poiché $\mathbf{D}\phi(1,0)$ ha rango massimo (2), lo spazio tangente alla superficie parametrizzata è dato da $\operatorname{Im}\mathbf{D}\phi(1,0)$, i.e., il piano per l'origine generato dai vettori $(2,1,0)^T$ e $(0,0,1)^T$. $\bullet$

12. *Determinare, giustificando la risposta, gli eventuali punti critici di* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = x + y - \sqrt{6}z$, *sulla sfera di centro* 0 *e raggio* 1.

Soluzione. Il vincolo è un insieme chiuso e limitato e la funzione è una funzione lineare, quindi continua. Mi aspetto dunque di trovare almeno due punti critici, un punto di massimo e un punto di minimo. Inoltre, essendo le linee di livello di f piani paralleli tra loro, mi aspetto di trovare solo due punti critici e questi tra loro antipodali.

Per trovarli, decido di utilizzare il metodo dei moltiplicatori di Langrange: $(x, y, x)^T$ è un punto critico vincolato se e solo se esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che (x, y, z, λ) è soluzione di

$$\begin{cases} 1 = \lambda 2x, \\ 1 = \lambda 2y, \\ -\sqrt{6} = \lambda 2z, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1. \end{cases}$$

Segue che $\lambda \neq 0$ e dunque

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2\lambda}, \\ y = \frac{1}{2\lambda}, \\ z = \frac{-\sqrt{6}}{2\lambda}, \\ \frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} + \frac{6}{4\lambda^2} = 1, \end{cases}$$

da cui $\lambda := \pm\sqrt{2}$ e i due punti critici $\frac{1}{2\sqrt{2}}(1, 1, -\sqrt{6})^T$ e $\frac{1}{2\sqrt{2}}(-1, -1, \sqrt{6})^T$. •

13. *Determinare, giustificando la risposta, gli eventuali punti di massimo e di minimo della funzione* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + y^2 + 2$, *condizionati al vincolo* $g(x, y) = x^2 - 2xy + y^2 = 0$.

Soluzione. L'equazione del vincolo si riscrive come $g(x, y) = (x - y)^2 = 0$. Il vincolo è dunque la retta di equazione $y = x$ Osserviamo che per ogni intero n il punto $x_n = (n, n)$ è sul vincolo e $f(x_n) = 2n^2 + 2 \to \infty$, pertanto f assume valori arbitrariamente grandi: non ha quindi massimi assoluti. Inoltre, f è sempre maggiore o uguale a due, e $f(x, y) = 2$ se e solo se $x^2 + y^2 = 0$, i.e. $(x, y) = (0, 0)$. Poiché $(0, 0)$ appartiene al vincolo, si conclude che f ha $(0, 0)$ come unico punto di minimo assoluto vincolato. •

14. *Calcolare* $\iint_D (x^2 + y^2)\, dxdy$ *dove* D *è la regione piana compresa tra le circonferenze di equazione* $x^2 + y^2 - 2y = 0$ *e* $x^2 + y^2 - 4y = 0$.

Soluzione. Il dominio D è l'intersezione tra il cerchio di centro $(0, 2)$ e raggio 2 e l'esterno del cerchio di centro $(0, 1)$ e raggio 1,

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 + y^2 - 4y \leq 0,\ x^2 + y^2 - y \geq 0 \right\}.$$

Decido di passare a coordinate polari centrate in $(0, 0)$,

$$\phi(\rho, \theta) = \begin{cases} x = \rho \cos\theta, \\ y = \rho \sin\theta. \end{cases}$$

Allora $D \setminus \{0, 0\} = \phi(E)$ dove

$$\begin{aligned} E : &= \left\{ (\rho, \theta) \,\middle|\, \rho > 0, \theta \in [0, 2\pi[,\ 2\sin\theta \leq \rho \leq 4\sin\theta \right\} \\ &= \left\{ (\rho, \theta) \,\middle|\, \rho \geq 0, \theta \in]0, \pi[,\ 2\sin\theta \leq \rho \leq 4\sin\theta \right\}. \end{aligned}$$

Poiché ϕ è $1 - 1$ da E su $D \setminus \{(0, 0)\}$, dalla formula di cambiamento di variabili

$$\iint_D (x^2 + y^2)\, dxdy = \iint_E \rho^3\, d\rho d\theta,$$

e, essendo E normale rispetto all'asse delle ρ, si ha

$$\iint_E \rho^3\, d\rho d\theta = \int_0^\pi d\theta \int_{2\sin\theta}^{4\sin\theta} \rho^3\, d\rho = \frac{256 - 16}{4} \int_0^\pi \sin^4\theta\, d\theta = \cdots$$

•

15. *Calcolare* $\iint_D 2xy\,dxdy$ *dove* $D = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2 < 1,\ x^2+(y+1)^2 \geq 2\Big\}$.

Soluzione. Il dominio è l'intersezione tra l'interno del cerchio di raggio 1 e centro $(0,0)$ e l'esterno del cerchio di centro $(0,-1)$ e raggio $\sqrt{2}$. Pertanto

$$D = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, -1 \leq x \leq 1,\ \sqrt{2-x^2}-1 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\Big\}.$$

Poiché D è normale rispetto all'asse y e posto per brevità $\alpha(x) := \sqrt{2-x^2}-1$ e $\beta(x) = \sqrt{1-x^2}$, si ha

$$\iint_D 2xy\,dxdy = \int_{-1}^{1} dx 2x \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} y\,dy = \int_{-1}^{1} x(\beta^2(x) - \alpha^2(x))\,dx = \cdots$$

•

16. *Calcolare il volume del solido* $D = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z \geq 0, x^2+y^2 \leq \frac{1}{z^2}\Big\}$.

Soluzione. D ha simmetria cilindra attorno all'asse delle z. Pertanto, se si pone per ogni $z \in \mathbb{R}$

$$D_z := \begin{cases} \emptyset & \text{se } z < 1, \\ \{x^2+y^2 < \frac{1}{z^2}\} & \text{se } z \geq 1, \end{cases}$$

dal teorema di Fubini

$$\mathcal{L}^3(D) = \int dz \mathcal{L}^2(D_z) = \int_1^\infty \frac{\pi}{z^2}\,dz = \pi.$$

•

17. *Calcolare* $\iiint_D (4-z)\,dxdydz$ *dove* D *è la piramide con vertici* $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ *e* $(0,0,4)$.

Soluzione. Poiché la funzione integranda dipende solo su z e una delle facce è perpendicolare all'asse z, decido di procedere "affettando" D con piani perpendicolari all'asse z. Se D_z è la sezione di D a livello z, ovviamente $D_z = \emptyset$ se $z < 0$ o $z > 4$ e, per il teorema di Talete, $\mathcal{L}^2(D_z) = (\frac{4-z}{4})^2 \mathcal{L}^2(D_0) = \frac{1}{32}(4-z)^2$ se $0 \leq z \leq 4$. Segue dal teorema di Fubini che

$$\iiint_D (4-z)\,dxdydz = \int_0^4 \iint_{D_z} (4-z)\,dz = \int_0^4 (4-z)\mathcal{L}^2(D_z) = \frac{1}{32}\int_0^4 (4-z)^3\,dz = \cdots.$$

•

18. *Il quadrato del piano* (y,z) *di vertici* $(1,0)$, $(2,0)$, $(1,1)$, $(2,1)$ *genera ruotando attorna all'asse* z *un volume* D. *Calcolare* $\iiint_D |z|\,dxdydz$.

Soluzione. Il dominio ha simmetria cilindrica attorno all'asse z e una sua sezione D_z con un piano perpendicolare all'asse z è vuota se $z < 0$ o se $z > 1$ ed è una corona circolare concentrica centrata in $(0,0)$ e raggi 1 e 2. Pertanto dal teorema di Fubini

$$\iiint_D |z|\,dxdydz = \int_0^1 z\mathcal{L}^2(D_z)dz = \int_0^1 z\pi(4-1)dz = \frac{3\pi}{2}.$$

•

19. Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione. Cosa vuol dire "f è $\mathcal{L}^n$-misurabile?". Enunciare le varie formulazioni equivalenti di $\mathcal{L}^n$-misurabilità per f, in particolare il lemma di quantizzazione.

Soluzione. Vedi [GM] vol.2 Cap. 17.c e lemma 17.7. •

20. Enunciare il teorema di passaggio a limite di Beppo Levi. Dare controesempi al teorema di Beppo Levi.

Soluzione. Vedi [GM] vol.2 teorema 17.8.

Sia $\varphi(x)$, $x \in \mathbb{R}$, una funzione continua non negativa con $\varphi(x) \to 0$ per $|x| \to \infty$ e $\int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\,dt > 0$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $f_n(x) := \varphi(x-n)$. Allora $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ e però

$$0 = \int_{\mathbb{R}} 0\,dx = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx \neq \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\,dt.$$

Un altro controesempio è il seguente per $n \geq 1$ e $x \geq 1$, sia $f_n(x) = \frac{1}{nx}$. Allora $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{nx} = 0$ e però

$$0 = \int_1^\infty 0\,dx = \int_1^\infty \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx \neq \lim_{n\to\infty} \int_1^\infty f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int_1^\infty \frac{1}{x}dx = +\infty.$$

•

21. Enunciare la formula di Cavalieri.

Soluzione. Vedi [GM] vol.2 Teorema 17.10. •

22. Enunciare il teorema di cambiamento di variabili negli integrali multipli.

Soluzione. Vedi [GM] vol.2 Teorema 18.4. •