Corso di Laurea in Ingegneria Informatica (270)
Analisi Matematica (12 CFU)
Esercittazione del 17/03/2014.

Nelle soluzioi si fa riferimento ai volumi

[GM1] M. Giaquinta, G. Modica, *Note di Analisi Matematica: Funzioni di una variabile*, Pitagora Editrice, Bologna, 2000.

[GM2] M. Giaquinta, G. Modica, *Note di Analisi Matematica: Funzioni di più variabili*, Pitagora Editrice, Bologna, 2006.

1. **Esercizio.** *Enunciare il principio di induzione.*
Soluzione. Vedi [GM1] 24.3. •

2. **Esercizio.** *Provare per induzione che* $1 - q^{n+1} = (1-q)(1+q+q^2+\cdots+q^n)$ $\forall n \geq 0$.
Soluzione. Dimostriamo che la formula ha la proprietà induttiva:

- Per $n = 0$ l'uguaglianza si legge come $1 - q = (1-q)\cdots 1$: l'uguaglianza è verificata.
- Supponiamo che per $n \in \mathbb{N}$ fissato si sappia che $1 - q^{n+1} = (1-q)(1+\cdots+q^n)$. Allora

$$\begin{aligned} 1 - q^{n+2} &= 1 - q^{n+1} + q^{n+1} - q^{n+2} = (1-q)(1+\cdots+q^n) + (1-q)q^{n+1} \\ &= (1-q)(1+\cdots+q^n+q^{n+1}). \end{aligned}$$

La fornula ha dunque la proprietà induttiva. Per il principio di induzione la formula è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$. •

3. **Esercizio.** *Sia* $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$ *una successione. Cosa vuol dire la frase "*$\{x_n\}$ *converge?*
Soluzione. Vedi [GM2] Cap. 1 pag. 3. •

4. **Esercizio.** *Calcolare, se possibile e giustificando la risposta, il limite*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\arctan(1/n^2)}{1-\cos(1/n^2)}.$$

Soluzione. Utilizzando la formula di Taylor con resto di Peano, si ha $\arctan(x) = x + O(x^3)$ per $x \to 0$ e $1 - \cos x = \frac{x^2}{2} + O(x^4)$ per $x \to 0$. Pertanto

$$\frac{\arctan x}{1-\cos x} \to 2 \qquad \text{per } x \to 0. \tag{1}$$

Poiché $1/n^2 \to 0$, segue dal teorema di collegamento che il limite cercato esiste e vale 2.
Ovviamente si può calcolare il limite (1), che si presenta nella forma 0/0, con il teorema di de l'Hopital. •

5. **Esercizio.** *Calcolare, se possibile e giustificando la risposta, il limite*

$$\lim_{n\to\infty} n \int_0^1 \frac{xe^{-nx}}{1+x^2}\,dx.$$

Soluzione. Cambiando variabile nell'integrale, ponendo $y = nx$,

$$\int_0^1 \frac{xe^{-nx}}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{n^2}\int_0^n ye^{-y}\frac{n^2}{n^2+y^2}\,dy.$$

Pertanto

$$0 \leq n\int_0^1 \frac{xe^{-nx}}{1+x^2}\,dx = n\frac{1}{n^2}\int_0^n ye^{-y}\frac{n^2}{n^2+y^2}\,dy \leq \frac{1}{n}\int_0^n ye^{-y}\,dy \leq \frac{1}{n}\int_0^\infty ye^{-y}\,dy.$$

Essendo l'integrale $\int_0^\infty ye^{-y}\,dy$ finito, segue dal teorema del confronto che il limite cercato è zero. •

6. **Esercizio.** *Enunciare il teorema della permanenza del segno per successioni.*
Soluzione. Vedi [GM2] Proposizione 1.3. •

7. **Esercizio.** *Sia* $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ *una successione. Cosa indica il simbolo* $\sum_{n=0}^\infty a_n$ *?*
Soluzione. Può avere due significati, vedi [GM2] Cap. 2 pag.15 e [GM2] Definizione 2.4. •

8. **Esercizio.** *Enunciare il criterio del confronto per serie a termini posotivi..*
Soluzione. Vedi [GM2] Proposizione 3.1. •

9. **Esercizio.** *Dare una stima dall'alto per la somma della serie* $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right]^2$.
Soluzione. La funzione $\arctan x$, $0 \le x \le 1$, è concava. Dunque $\arctan x \ge \frac{4}{\pi}x$ $\forall x \in [0,1]$. Segue in particolare per $x = 1/\sqrt{n}$ che

$$\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \ge \frac{4}{\pi}\frac{1}{\sqrt{n}}$$

e quindi

$$\left[\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right]^2 \ge \frac{4}{\pi}\frac{1}{n}$$

Poiché la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ diverge, per il criterio del confronto, la serie data diverge. •

10. **Esercizio.** *Quali stime conosce per le somme armoniche* $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$, $n \ge 1$*?*
Soluzione. Vedi [GM2] Proposizioni 2.9 e 2.10. •

11. **Esercizio.** *Quali relazioni esistono tra le nozioni di serie e di integrale generalizzato?*
Soluzione. Vedi [GM2] Proposizione 2.5. •

12. **Esercizio.** *Dire, giustificando la risposta, se la serie* $\sum_{n=1}^{\infty}\arctan(n^2)\sin(1/n^2)$ *converge.*
Soluzione. Si ha $\arctan(n^2) \le \frac{\pi}{2}$ e $\sin(1/n^2) \le 1/n^2$. Pertanto per ogni $n \ge 1$, $\arctan(n^2)\sin(1/n^2) \le \frac{\pi}{2}\frac{1}{n^2}$. Poiché la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ converge con somma non superiore a 2, per il criterio del confronto la serie data converge con somma non superiore a π:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\arctan(n^2)\sin(1/n^2) \le \pi.$$

•

13. **Esercizio.** *Dire, giustificando la risposta, se la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} n\arctan(n^2)\sin(1/n^2)$ *converge.*
Soluzione. Si ha $\arctan(n^2) \ge \arctan(1) = \pi/4$ e $\sin x \ge \frac{2}{\pi}x$ $\forall x \in [0,1]$. Pertanto

$$n\arctan(n^2)\sin(1/n^2) \ge n\,\frac{\pi}{4}\,\frac{2}{\pi}\,\frac{1}{n^2} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{n}.$$

Poiché la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ diverge, per il criterio del confronto, la serie data diverge. •