Corso di Laurea in Ingegneria Informatica (270)
Analisi Matematica (12 CFU)
Esercittazione del 14/04/2014.

1. *Calcolare se esiste* $\lim_{n\to\infty}\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^2}$*, giustificando la risposta.*

Soluzione. Sia $f(x) := (\cos x)^{1/x^2} = e^{\frac{\log\cos x}{x^2}}$, $x \in]0,1]$. Poiché $\frac{\frac{-\sin x}{\cos x}}{2x} \to -\frac{1}{2}$ per $x \to 0^+$, segue dal teorema di De l'Hopital che $\frac{1}{x^2}\log(\cos x) \to -1/2$ e cioè che $(\cos x)^{1/x^2} \to e^{-1/2}$ per $x \to 0^+$. Pertanto dal teorema di collegamento

$$\lim_{n\to\infty}\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^2} = \lim_{x\to 0^+}(\cos x)^{1/x^2} = e^{-1/2}.$$

•

2. *Studiare il comportamento (dire se converge o diverge e eventualmente stimare la somma) della serie* $\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}}\log\left(1+\frac{x}{n}\right)dx$*, giustificando la risposta.*

Soluzione. La serie è a termini positivi. Quindi ha somma, eventualmente infinita. Ora $f(y) := \log(1+y) \le y\ \forall y \ge 0$. Pertanto $\log\left(1+\frac{x}{n}\right) \le \frac{x}{n}\ \forall x \ge 0$ e quindi

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}}\log\left(1+\frac{x}{n}\right)dx \le \int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}}\frac{x}{n}\,dx = \frac{1}{2n^2}.$$

Poiché la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ converge ed ha somma inferiore a 2, si conclude che la serie data converge ed ha somma inferiore a 1. •

3. *Sia* (X,d) *uno spazio metrico e sia* $A \subset X$*. Definire*

- *la* chiusura di A *in termini di palle e in termini di successioni.*
- *la* parte interna di A *in termini di palle e in termini di successioni.*

Soluzione.

- $x \in \operatorname{clos}(A)$ se e solo se per ogni $r > 0$ $B(x,r)\cap A \neq \emptyset$ o, equivalentemente, se e solo se esiste una successione $\{x_n\} \subset A$ tale che $x_n \to x$.
- $x \in \operatorname{int}(A)$ se e solo se esiste $r > 0$ tale che $B(x,r) \subset A$ o, equivalentemente, se e solo se per ogni $x \in A$ e ogni successione $\{x_n\}$ convergente a x, esiste $\overline{n}$ tale che per ogni $n \ge \overline{n}$ $x_n \in A$.

•

4. *Siano* (X,d_X) *e* (Y,d_Y) *due spazi metrici con* (X,d_X) *compatto e sia* $f : X \to Y$ *una funzione continua. Quali informazioni se ne possono trarre?*
Soluzione. Vedere paragrafi 6.d, 6.e. •

5. *Sia* $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 3|x| - 2 \le y \le 1\}$ *e sia* $f(x,y) := x^2 + (y-2)^2$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$*. Dando le opportune spiegazioni, dire se* D *è aperto, chiuso, connesso (per archi), compatto, limitato. Calcolare quindi l'immagine* $f(D)$ *di* D*.*
Soluzione. Il dominio D è chiuso perché è definito come intersezione di sottolivelli chiusi di funzioni continue. D è limitato perché contenuto nel rettangolo $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, |x| \le 1,\ -2 < y \le 1\}$. Inoltre $(0,0) \in DD$, quindi D non è vuoto. Segue che D è compatto e che D non è aperto. Infine, D è il triangolo (pieno) di vertici $(-1,1)$, $(1,1)$ e $(0,-2)$, quindi è convesso e in particolare connesso per archi. Poiché la funzione f è continua (è un polinomio di secondo grado), $f(D) \subset \mathbb{R}$ è un compatto ed un connesso, quindi un intervallo chiuso e limitato $[a,b]$. Restano da calcolare $a = \min_D f$ e $b = \max_D f$. Si osserva che le linee di livello di f sono cerchi centrati in $(0,2)$. Dunque il punto di

minino per f è in $(0,1)$ e il punto di massimo è in $(0,-2)$. Pertanto $a = f(0,1) = (1-2)^2 = 1$ e $b = f(0,-2) = (-2-2)^2 = 16$. •

6. *Sia* $f(x,y,z) = \tan x + \sin(xe^z) + y$, $(x,y,z) \in]-\pi/2, \pi/2[\times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. *Calcolare i piani tangenti e normali al grafico di* f *in* $(0,0,0,0)^T$.
Soluzione. La funzione f ha derivate parziali date in un intorno di $(0,0,0) \in \mathbb{R}^3$ da

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) &= 1 + \tan^2 x + \cos(xe^z)e^z,\\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) &= 1,\\
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) &= \cos(xe^z)xe^z,
\end{aligned}$$

che sono evidentemente continue. Perciò, vedi Teorema 12.1, f è differenziabile in $(0,0,0)^T$ e $\mathbf{D}f(0,0,0) = (2,1,0)$. Pertanto i 3 vettori che hanno come coordinate le colonne della matrice

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

generano lo spazio tangente al grafico di f in $(0,0,0,0)^T$. Infine il vettore $(2,1,0,-1)^T$ genera lo spazio ortogonale al grafico di f in $(0,0,0,0)^T$. •

7. *Siano* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *differenziabili e* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. *Calcolare* $\dfrac{\partial f(g(x,y),2x)}{\partial x}(x,y)$.
Soluzione. Si applica la regola della catena: se $f = f(u,v)$ allora

$$\frac{\partial f(g(x,y),2x)}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial u}(g(x,y),2x)\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) + 2\frac{\partial f}{\partial v}(g(x,y),2x).$$

•

8. *Sia* $f(x,y) = x^2e^y + x$. *Calcolare l'hessiano* $Hf(1,0)$ *di* f *in* $(1,0)$ *e discutere la segnatura della forma quadratica associata* $\big(Hf(1,0)h|h\big)$, $h \in \mathbb{R}^2$.
Soluzione. Si ha $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xe^y + 1$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2e^y$ e

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2e^y & 2xe^y \\ 2xe^y & x^2e^y \end{pmatrix} \qquad \text{e quindi} \qquad Hf(1,0) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Gli autovalori sono dunque 0 e 2. La segnatura della forma quadratica associata è dunque $(0,+)$. •

9. *Enunciare il teorema di caratterizzazione variazionale degli autovalori di una matrice simmetrica.*
Soluzione. Vedi [GM] Vol. 2, Teorema 9.12. •

10. *Sia* $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ *un'applicazione lineare. Dimostrare che* A *è un'applicazione lipschitziana. Dare una caratterizzazione della sua costante di Lipschitz e un algoritmo per il suo calcolo.*
Soluzione. Vedi [GM] Vol.2, 5.e. e Teorema 9.12. •

11. *Siano* $\gamma, \delta : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ *due curve continue.*

1. *Cosa vuol dire che le curve* γ *e* δ *sono equivalenti.*
2. *Mostrare che due curve equivalenti hanno la stessa lunghezza.*

Soluzione. Vedi [GM] Vol.2, Definizione 7.14 e Proposizione 7.18. •

12. *Calcolare la lunghezza della curva* $\gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t) \in \mathbb{R}^2$, $t \in [0, 2\pi]$.

Soluzione. La curva è di classe $C^1([0,2\pi])$. Pertanto la lunghezza $L(\gamma)$ di γ è

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} |\gamma'(t)|\,dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(1-\cos t)^2 + \sin^2 t}\,dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos t}\,dt$$
$$= 2\int_0^{2\pi} |\cos(t/2)|\,dt = 4\int_0^{\pi} |\cos s|\,ds = 8.$$

•