Corso di Laurea in Ingegneria Informatica (270)
Analisi Matematica (12 CFU)
Esercitazione del 19/05/2014.

Nome e Cognome:

1. Studiare il comportamento (dire se converge o diverge e eventualmente stimare la somma) della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n - \sqrt{n}} \int_0^n e^{-x^2}\, dx$, giustificando la risposta.

2. Siano (X, d) uno spazio metrico, $A \subset X$ e $d(x, A)$ la distanza di $x \in X$ da A.

- Caratterizzare i punti $x \in X$ tali che $d(x, A) = 0$.
- Dimostrare che se A è aperto e $K \subset A$ è compatto, allora $d(K, A) := \inf_{x\in K} d(x, \partial A) > 0$.

3. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = (y^2 + 1)\log(1 + 2x^2)$. Determinarne l'immagine, giustificando la risposta.

4. Enunciare il teorema di caratterizzazione variazionale degli autovalori di una matrice simmetrica.

5. Sia $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ un'applicazione lineare. Dimostrare che A è un'aplicazione lipschitziana. Dare una caratterizzazione della sua costante di Lipschitz e un algoritmo per il suo calcolo.

6. Sia $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ la curva data da $\gamma(t) = (t, t^3 - t, \arctan t)^T$. Determinare il piano di $\mathbb{R}^3$ passante per $\gamma(1)$ tangente a γ in $\gamma(1)$ e parallelo al vettore $\gamma''(1)$.

7. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x, y) = xy - x\cos y$. Calcolare $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(1, \pi/2)$ nella direzione $\mathbf{v} = (1/2, \sqrt{3}/2)$.

8. Siano $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Calcolare $\dfrac{d}{dx}\Big(f(x, g(x))\Big)(x)$.

9. Scrivere l'equazione del piano tangente alla linea di livello $xe^y + 2ye^z - zxe^y = x^2 - 2$ nel punto $(2, 0, 0)$.

10. Sia S la superficie di $\mathbb{R}^3$ parametrizzata dalla funzione $\phi(t, \theta) = (t^2, t, t^2 \sin\theta)^T$, $(t, \theta) \in \mathbb{R}\times]-\pi, \pi[$. Scrivere l'equazione dello spazio tangente ad S nel punto $P = \phi(1, 0)$.

11. Determinare, giustificando la risposta, gli eventuali punti critici di $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = x + y - \sqrt{6}z$, sulla sfera di centro 0 e raggio 1.

12. Determinare, giustificando la risposta, gli eventuali punti di massimo e di minimo della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + y^2 + 2$, condizionati al vincolo $g(x, y) = x^2 - 2xy + y^2 = 0$.

13. Calcolare $\iint_D (x^2 + y^2)\, dxdy$ dove D è la regione piana compresa tra le circonferenze di equazione $x^2 + y^2 - 2y = 0$ e $x^2 + y^2 - 4y = 0$.

14. Calcolare $\iint_D 2xy\, dxdy$ dove $D = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 < 1,\ x^2 + (y + 1)^2 \geq 2\Big\}$.

15. Calcolare il volume del solido $D = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z \geq 1, x^2 + y^2 \leq \frac{1}{z^2}\Big\}$.

16. Calcolare $\iiint_D (4 - z)\, dxdydz$ dove D è la piramide con vertici $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 4)$.

17. Il quadrato del piano (y, z) di vertici $(1, 0)$, $(2, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 1)$ genera ruotando attorna all'asse z un volume D. Calcolare $\iiint_D |z|\, dxdydz$.

18. Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione. Cosa vuol dire "f è $\mathcal{L}^n$-misurabile?". Enunciare le varie formulazioni equivalenti di $\mathcal{L}^n$-misurabilità per f, in particolare il lemma di quantizzazione.

19. Enunciare il teorema di passaggio a limite di Beppo Levi. Dare controesempi al teorema di Beppo Levi.

20. Enunciare la formula di Cavalieri.

21. Enunciare il teorema di cambiamento di variabili negli integrali multipli.