Corso di Laurea in Ingegneria Informatica (270)
Analisi Matematica (12 CFU)
Esercittazione del 14/04/2014.

Nome e Cognome:

1. Calcolare se esiste $\lim_{n\to\infty}\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^2}$, giustificando la risposta.

2. Studiare il comportamento (dire se converge o diverge e eventualmente stimare la somma) della serie $\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}}\log\left(1+\frac{x}{n}\right)dx$, giustificando la risposta.

3. Sia (X,d) uno spazio metrico e sia $A\subset X$. Definire

- la *chiusura di* A in termini di palle e in termini di successioni.
- la *parte interna di* A in termini di palle e in termini di successioni.

4. Siano (X,d_X) e (Y,d_Y) due spazi metrici con (X,d_X) compatto e sia $f:X\to Y$ una funzione continua. Quali informazioni se ne possono trarre?

5. Sia $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,3|x|-2\le y\le 1\}$ e sia $f(x,y):=x^2+(y-2)^2$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Dando le opportune spiegazioni, dire se D è aperto, chiuso, connesso (per archi), compatto, limitato. Calcolare quindi l'immagine $f(D)$ di D.

6. Sia $f(x,y,z)=\tan x+\sin(xe^z)+y$, $(x,y,z)\in]-\pi/2,\pi/2[\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Calcolare i piani tangenti e normali al grafico di f in $(0,0,0,0)^T$.

7. Siano $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ differenziabili e $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Calcolare $\frac{\partial f(g(x,y),2x)}{\partial x}(x,y)$.

8. Sia $f(x,y)=x^2e^y+x$. Calcolare l'hessiano $Hf(1,0)$ di f in $(1,0)$ e discutere la segnatura della forma quadratica associata $\big(Hf(1,0)h|h\big)$, $h\in\mathbb{R}^2$.

9. Enunciare il teorema di caratterizzazione variazionale degli autovalori di una matrice simmetrica.

10. Sia $A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^k$ un'applicazione lineare. Dimostrare che A è un'aplicazione lipschitziana. Dare una caratterizzazione della sua costante di Lipschitz e un algoritmo per il suo calcolo.

11. Siano $\gamma,\delta:[0,1]\to\mathbb{R}^n$ due curve continue.

   1. Cosa vuol dire che le curve γ e δ sono equivalenti.
   2. Mostrare che due curve equivalenti hanno la stessa lunghezza.

12. Calcolare la lunghezza della curva $\gamma(t)=(t-\sin t,1-\cos t)\in\mathbb{R}^2$, $t\in[0,2\pi]$.