0.a Un sistema di ODE: piccole oscillazioni

Siano dati N punti materiali $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N$ in $\mathbb{R}^3$ aventi masse rispettivamente $m_1, m_2, \dots, m_N$ non nulle. e si supponga che le suddette masse interagiscano fra loro con forze soddisfacenti la *legge di Hooke*. Indichiamo con $\mathbf{x}_i(t)$ la legge oraria del moto dell' i -esimo punto. La forza di richiamo esercitata dalla massa in $\mathbf{x}_j$ su $\mathbf{x}_i$ è dunque proporzionale al vettore $\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i$

$$\mathbf{f}_{ij} := k_{ij}(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i), \quad j \neq i, \quad k_{ij} \geq 0.$$

Si pone $k_{ij} = 0$ se non c'è alcuna forza di richiamo diretta tra i e j . Per il principio di azione e reazione, la forza esercitata da $\mathbf{x}_i$ su $\mathbf{x}_j$ è uguale e opposta, $\mathbf{f}_{ji} = -\mathbf{f}_{ij}$ e le costanti elastiche k_{ij} , $i \neq j$, soddisfano la relazione di simmetria $k_{ij} = k_{ji}$.

La forza totale agente sulla massa in $\mathbf{x}_i$ è la somma delle forze esercitate dagli altri punti, i.e.,

$$\mathbf{f}_i = \sum_{j \neq i} k_{ij}(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) = \sum_{j \neq i} k_{ij}\mathbf{x}_j - \left(\sum_{j \neq i} k_{ij} \right) \mathbf{x}_i := \sum_{j=1}^n k_{ij}\mathbf{x}_j$$

se si ha cura di porre $k_{ii} := -\sum_{j \neq i} k_{ij}$. Le equazioni della dinamica danno quindi luogo ad un sistema di $3N$ equazioni accoppiate

$$m_i \mathbf{x}_i'' = \mathbf{f}_i = \sum_{j=1}^N k_{ij} \mathbf{x}_j, \quad i = 1, \dots, N.$$

Tuttavia, l'accoppiamento è tale che la j -esima componente della forza dipende solo dalle coordinate j -esime dei punti materiali. Il sistema si divide dunque in 3 sistemi di N equazioni del secondo ordine, uno per coordinata

$$\begin{aligned} m_i (\mathbf{x}_i^1)''(t) &= \sum_{j=1}^N k_{ij} \mathbf{x}_j^1(t), & \forall i = 1, \dots, N, \\ m_i (\mathbf{x}_i^2)''(t) &= \sum_{j=1}^N k_{ij} \mathbf{x}_j^2(t), & \forall i = 1, \dots, N, \\ m_i (\mathbf{x}_i^3)''(t) &= \sum_{j=1}^N k_{ij} \mathbf{x}_j^3(t), & i = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

Siano $\mathbf{M} := \text{diag}(m_1, m_2, \dots, m_N)$, $\mathbf{K} := (k_{ij}) \in M_{N,N}(\mathbb{R})$ la matrice simmetrica delle costanti elastiche (dove si è posto per ogni i , $k_{ii} := -\sum_{j \neq i} k_{ij}$) e sia $X(t) = X_j(t) \in \mathbb{R}^N$ il vettore colonna delle j -esime coordinate dei moti dei punti $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N$

$$X(t) = X_j(t) := (x_1^j(t), \dots, x_N^j(t))^T, \quad \mathbf{x}_i(t) =: (\mathbf{x}_i^1(t), \mathbf{x}_i^2(t), \mathbf{x}_i^3(t)).$$

Allora $X(t)$ verifica il sistema di N equazioni

$$X''(t) = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} X(t).$$

e quindi la mappa a valori matrici $N \times 3$ data da $t \mapsto \mathbf{X}(t) := [X_1(t)|X_2(t)|X_3(t)]$ verifica il sistema

$$\mathbf{X}''(t) = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} \mathbf{X}(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

La matrice $\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K}$ non è in generale simmetrica (pur essendolo le matrici $\mathbf{M}$ e $\mathbf{K}$). Tuttavia si osserva quanto segue.

- La mappa bilineare $(x, y) \mapsto (x|y) = \mathbf{M}x \bullet y := \sum_{i=1}^N m_i x_i y_i$ è un prodotto scalare su $\mathbb{R}^N$, la cui matrice di Gram è $\mathbf{M}$.
- Le colonne di $\mathbf{M}^{-1/2}$,

$$\mathbf{M}^{-1/2} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{m_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{m_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -0 & 0 & \dots & 1/\sqrt{m_N} \end{pmatrix}$$

formano una base di $\mathbb{R}^N$ ortonormale per il prodotto scalare $(\ |)$.

- La mappa $x \rightarrow \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}x$ è autoaggiunta per il prodotto scalare $(\ |)$. Infatti $\forall x, y \in \mathbb{R}^N$

$$(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}x|y) = \mathbf{K}x \bullet y = x \bullet \mathbf{K}y = x \bullet \mathbf{M}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}y = \mathbf{M}x \bullet \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}y = (x|\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}y).$$

Equivalentemente, la matrice $\mathbf{M}^{1/2}(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K})\mathbf{M}^{-1/2} = \mathbf{M}^{-1/2}\mathbf{K}\mathbf{M}^{-1/2}$ è simmetrica; infatti,

$$(\mathbf{M}^{-1/2}\mathbf{K}\mathbf{M}^{-1/2})_{ij} = k_{ij} \frac{1}{\sqrt{m_i}\sqrt{m_j}}$$

In particolare, $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$ ha N autovalori reali $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ se contati con la loro molteplicità.

- Gli autovalori della matrice $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$ sono tutti non positivi. Infatti si osserva che la matrice $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$ è una Q -matrice: per $i \neq j$

$$(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K})_j^i = \sum_{h=1}^N \frac{1}{m_i} \delta_{ih} \mathbf{K}_j^h = \frac{1}{m_i} k_{ij} \geq 0$$

e

$$\sum_{j=1}^N (\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K})_j^i = \frac{1}{m_i} \sum_{j=1}^N k_{ij} = 0.$$

Pertanto, cfr. Lemma 0.1, tutti gli autovalori di $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$ sono contenuti in un cerchio chiuso $B(-q, q)$ con $q \leq 0$, in particolare sono non positivi.

- Poiché $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$ è autoaggiunta con autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ tutti non positivi, i numeri $-\lambda_1, \dots, -\lambda_N$ sono i *valori singolari* della matrice $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$. Si possono pertanto calcolare concretamente con l'algoritmo di decomposizione secondo i valori singolari.
- 0 è un autovalore di $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$ e $(1, 1, \dots, 1)^T$ è un suo autovettore. Infatti

$$(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}(1, 1, \dots, 1)^T)^i = \sum_{j=1}^N (\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K})_j^i = 0.$$

- Si può dimostrare che se i punti sono tra loro connessi, o, come si dice, se la matrice $\mathbf{K}$ è *irriducibile*, allora 0 è un autovalore di molteplicità 1, e tutti gli altri autovalori sono strettamente negativi

$$\lambda_N \leq \lambda_{N-1} \leq \dots \leq \lambda_2 < \lambda_1 = 0.$$

Pertanto dal teorema spettrale, esiste una base $u_1, u_2, \dots, u_N$ di $\mathbb{R}^N$ ortonormale per il prodotto scalare $(\cdot | \cdot)$ formata da autovettori di $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$. Se λ_s denota l'autovalore relativo a u_s e $\mathbf{S} := [u_1 | \dots | u_N]$ è la matrice che ha in colonna s le coordinate di u_s , allora

$$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} = \mathbf{S} \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N) \mathbf{S}^{-1}$$

e quindi la mappa a valori matrici $N \times 3$ definita da

$$t \mapsto \mathbf{Y}(t) := \mathbf{S}^{-1}\mathbf{X}(t)$$

verifica

$$\mathbf{Y}''(t) = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{X}''(t) = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N)\mathbf{Y}(t)$$

Per ogni $s = 1, \dots, N$, indichiamo con $\mathbf{y}^s(t) \in \mathbb{R}^3$ il punto avente come coordinate la riga s -esima della matrice $\mathbf{Y}$. Allora

$$(\mathbf{y}^s)''(t) = \lambda_s \mathbf{y}^s(t)$$

i.e., le coordinate di $\mathbf{y}^s$ sono tutte soluzioni dell'equazione

$$y''(t) = \lambda_s y(t)$$

i.e., si muovono o di moto rettilineo uniforme se $\lambda_s = 0$ o con moto armonico semplice di periodo $\sqrt{-\lambda_s}$ se $\lambda_s < 0$.

Pertanto, per ogni $s = 1, \dots, n$

- o se $\lambda_s = 0$, la curva $t \mapsto \mathbf{y}^s(t)$ è un moto rettilineo uniforme. In particolare, se si prende come autovettore di norma 1 relativo all'autovalore nullo il vettore $u_1 := \frac{1}{M}(1, \dots, 1)^T$ con $M := \sum_{i=1}^N m_i$, allora il punto

$$\mathbf{y}^1(t) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{x}_i(t),$$

i.e., il *baricentro del sistema*, si muove di moto rettilineo uniforme.

- o se $\lambda_s < 0$, allora

$$\mathbf{y}^s(t) = \cos(\omega_s t) \mathbf{y}(0) + \frac{\sin(\omega_s t)}{\omega_s} (\mathbf{y}^s)'(0)$$

dove $\omega_s := \sqrt{-\lambda_s}$. La traiettoria descritta da $\mathbf{y}^s(t)$ è un'ellisse centrata in 0 nel piano generato da $\mathbf{y}^s(0)$ e $(\mathbf{y}^s)'(0)$. I numeri

$$\nu_s := \frac{\sqrt{-\lambda_s}}{2\pi}, \quad \lambda_s < 0,$$

si chiamano *frequenze proprie del sistema*.

Infine, ciascun punto $\mathbf{x}_i$ descrive un moto che è una combinazione lineare dei moti dei punti $\mathbf{y}_i$ essendo $\mathbf{X}(t) = \mathbf{S}\mathbf{Y}(t)$.

0.1 Lemma. Sia $\mathbf{A}$ una matrice $N \times N$ a coefficienti complessi. Per ogni $i = 1, \dots, N$ siano $x_i := \mathbf{A}_i^i$ e $r_i := \sum_{j \neq i} |\mathbf{A}_j^i|$ e indichiamo con B_i la palla chiusa di centro x_i e raggio r_i , $B_i := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - x_i| \leq r_i\}$. Allora gli autovalori di $\mathbf{A}$ appartengono a $\bigcup_{i=1, \dots, N} B_i$.

Dimostrazione. Sia $\lambda \in \mathbb{C}$ un autovalore di $\mathbf{A}$ e sia $z = (z^1, z^2, \dots, z^N) \in \mathbb{C}^N$ un autovettore non nullo relativo all'autovalore λ , $\mathbf{A}z = \lambda z$. Sia $h = h(\lambda)$ l'indice tale che $|z^h| = \max_i |z^i|$. Allora

$$\begin{aligned} |\lambda - x_h| |z^h| &= |(\mathbf{A}z)^h - \mathbf{A}_h^h z^h| = \left| \sum_{j \neq h} \mathbf{A}_j^h z^j \right| \\ &\leq \left(\sum_{j \neq h} |\mathbf{A}_j^h| \right) \max_i |z^i| \leq r_h |z^h|. \end{aligned}$$

Pertanto $|\lambda - x_h| \leq r_h$, i.e., $\lambda \in B_h$. □